УДК 512.644

А. С. ПИЛИПЧУК

РАСПОЛОЖЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ОБОЗРЕВАЕМЫХ УЗЛОВ В ОБОБЩЕННОМ ГРАФЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТРАФИКА ЕГО НЕНАБЛЮДАЕМОЙ ЧАСТИ

Рассмотрены разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений, возникающие в задачах исследования трафика в обобщенном графе. Эта проблема имеет важные приложения в задачах нахождения дуговых потоков и значений переменных интенсивностей узлов на ненаблюдаемых частях обобщенного графа. Одним из приложений является решение задачи оптимального расположения сенсоров в узлах обобщенного графа, т. е. нахождения минимального количества сенсоров в обозреваемых узлах обобщенного графа, в целях определения дуговых потоков и узлов с переменной интенсивностью для всего обобщенного графа.

Ключевые слова: задача расположения сенсоров; разреженная недоопределенная система; обобщенный граф; трафик; обозреваемые узлы.

The article is devoted to the underdetermined sparse systems of linear algebraic equations arising in research of traffic problems in the generalized graph. That problem has important applications in problems of finding arc flows and the values of the variables intensities of the nodes on unobservable parts of the generalized graph. One of applications is the sensor location problem (SLP) for the generalized graph, that is the location of the minimum number of sensors in the the observed nodes of the generalized graph, in order to determine the arcs flow volume and nodes with variable intensities for all generalized graph.

Key words: sensor location problem; sparse underdetermined system; generalized graph; traffic; monitored nodes.

Процессы оценки потоков на ненаблюдаемой части обобщенного графа содержат априорную информацию, исследуя которую и используя специальные методы разреженного численного анализа можно оценить потоки на дугах всего графа. Опишем задачу математического моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части обобщенного графа. Рассмотрим связный конечный ориентированный симметричный [2] граф $G=(I,U)$ с множеством узлов I и множеством дуг U. Обозначим через x_{ij} величину дугового потока дуги $(i,\ j)\in U$, μ_{ij} – коэффициент преобразования дугового потока x_{ij} дуги (i, j): дуговой поток дуги $(i,\ j)\in U$ величины x_{ij} исходит из узла i и входит в узел j в преобразованном виде $\mu_{ij}x_{ij}$, причем преобразование дугового потока x_{ij} осуществляется непосредственно перед узлом j, $x=\left(x_{ij},(i,\ j)\in U\right)$ – вектор дуговых потоков графа $G=(I,U)$ и $\mu=\left(\mu_{ij},(i,j)\in U\right)$ – вектор коэффициентов их преобразования, и пусть I^* – множество узлов с переменной интенсивностью x_i. В узлах из множества I^* поток создается или поглощается. Если для узла $i\in I^*$ переменная интенсивность $x_i > 0$, то узел i является источником; если $x_i < 0$, то узел $i\in I^*$ является стоком; узел i – промежуточный, если $x_i = 0$. Каждой дуге $(i,\ j)\in U$ поставим в соответствие рациональное число p_{ij}. Число p_{ij} – доля суммарного потока $\sum\limits_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}$, который исходит из узла i и проходит по дуге (i, j), $0 < p_{ij} \le 1$, $(i,\ j)\in U$:

$$x_{ij}=p_{ij}\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij},\ \text{где}\ I_i^+(U)=\{j\in I:(i,\ j)\in U\},\quad \sum_{j\in I_i^+(U)} p_{ij}=1.$$

Основой для моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части обобщенного графа является система линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji}=\begin{cases} x_i,\ i\in I^*,\\ 0,\ i\in I\setminus I^*,\end{cases} \tag{1}$$

где $I_i^-(U)=\{j\in I:(j,i)\in U\}$. В работе [1] представлены конструктивная теория и методы решения экстремальных задач сетевой оптимизации, часть ограничений которых имеет сетевую структуру вида (1). На основании применения аппарата теории графов, результатов теории потоков и современных достижений в технологии построения численных решений задач потокового программирования для обобщенных сетей получены эффективные алгоритмы решения экстремальных задач указанного класса. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений вида (1) для случая постоянных интенсивностей узлов связного графа исследованы в [2]. Теория декомпозиции применена в [2, 3] для построения решений разреженных систем с прямоугольными матрицами с учетом их типов разреженности. В [4] рассмотрены комбинаторные аспекты задачи оптимального расположения сенсоров в узлах связного графа для оценки потоков на его ненаблюдаемой части без учета преобразования дуговых потоков $x=\left(x_{ij},(i,\ j)\in U\right):\mu_{ij}=1,(i,\ j)\in U.$

Рассмотрим задачу оптимального расположения сенсоров в узлах связного графа $G=(I,U)$, для которого дуговые потоки $x=\left(x_{ij},\,(i,\,j)\in U\right)$ и значения переменных интенсивностей $x_i,\ i\in I^*$, узлов множества I^* удовлетворяют системе (1), где учтены преобразования дуговых потоков $\mu=\left(\mu_{ij},\,(i,\ j)\in U\right)$. Если $I^*\neq\varnothing$, то ранг матрицы системы (1) для связного графа G равен $|I|$ [1]. Установим сенсоры в некоторые узлы графа $G=(I,U)$ с целью учета априорной информации.

Обозначим множество узлов, в которых установлены сенсоры, через M (обозреваемые узлы), $M\subseteq I$. Заметим, что для каждого обозреваемого узла $i\in M$ известны следующие дуговые потоки: $x_{ij}=f_{ij},\ j\in I_i^+(U),\quad x_{ji}=f_{jj},\ j\in I_i^-(U)$. Кроме этого, для каждого обозреваемого узла i из множества $i\in M\bigcap I^*$ известно значение его переменной интенсивности: $x_i=f_i,\ i\in M\bigcap I^*$.

В задаче расстановки сенсоров в узлах связного графа используется следующий критерий оптимизации: найти минимальное количество $|M|$ обозреваемых узлов графа G, чтобы система (1) с учетом априорной информации об известных значениях дуговых потоков и известных значениях переменных интенсивностей узлов имела единственное решение, $M\subseteq I$.

Выберем любую дугу (i,v_i), исходящую из узла i, если для узла $i\in I$ выполняется соотношение $\left|I_i^+(U)\right|\geq 2$. Выразим дуговые потоки для всех дуг, исходящих из узла $i\in I$ (за исключением дуги (i,v_i)), через дуговой поток x_{iv_i} выбранной дуги (i,v_i), $p_{iv_i}>0$, следующим образом:

$$x_{ij}=\frac{p_{ij}}{p_{iv_i}}x_{iv_i},\ j\in I_i^+(U)\setminus v_i, i\in I, \left|I_i^+(U)\right|\geq 2. \qquad (2)$$

Соотношения (2) выполняются для каждого узла $i\in I$, если $\left|I_i^+(U)\right|\geq 2$. Выберем некоторую дугу (i,v_i), исходящую из узла i, $\left|I_i^+(U)\right|\geq 2$, если для нее дуговой поток x_{iv_i} известен, т. е. выполняются соотношения: $\left|I_i^+(U)\right|\geq 2$, $x_{iv_i}=f_{iv_i}$. Для узлов $i\in I$, для которых $\left|I_i^+(U)\right|\geq 2$ и известен некоторый дуговой поток $x_{iv_i}=f_{iv_i}$ дуги (i,v_i), выразим значения дуговых потоков для дуг, исходящих из узла i (за исключением дуги (i,v_i)), через известный дуговой поток $x_{iv_i}=f_{iv_i}$ следующим образом:

$$x_{ij}=\frac{p_{ij}}{p_{iv_i}}f_{iv_i},\ j\in I_i^+(U)\setminus v_i,\ i\in I. \qquad (3)$$

Подставим известные значения дуговых потоков $x_{ij}=f_{ij},\ j\in I_i^+(U),\ x_{ji}=f_{ji},\ j\in I_i^-(U)$, для каждого обозреваемого узла $i\in M$ в систему (1). Для каждого обозреваемого узла i, который входит в состав множества $i\in M\bigcap I^*$, подставим в систему (1) известные значения их переменных интенсивностей: $x_i=f_i,\ i\in M\bigcap I^*$. Кроме этого, выполним подстановку в систему (1) известных значений дуговых потоков (3).

Удалим из графа $G=(I,U)$ те дуги, для которых известны значения дуговых потоков. Также удалим из графа G множество M обозреваемых узлов. Таким образом, получим новый граф $\overline{G}=\left(\overline{I},\overline{U}\right)$ с множеством узлов $\overline{I}$ и множеством дуг $\overline{U}$. Обозначим через $\overline{I}^*$ новое множество узлов с переменной интенсивностью в графе $\overline{G}=\left(\overline{I},\overline{U}\right)$, где $\overline{I}^*=I^*\setminus\left(M\bigcap I^*\right)$. Новый граф $\overline{G}=\left(\overline{I},\overline{U}\right)$ может быть несвязным. Некоторые компоненты связности нового графа $\overline{G}=\left(\overline{I},\overline{U}\right)$ могут не содержать узлов из множества $\overline{I}^*$. Сформируем соотношения вида (2) для тех узлов $i\in\overline{I}$ графа $\overline{G}=\left(\overline{I},\overline{U}\right)$, для которых дуговой поток x_{iv_i} дуги (i,v_i) неизвестен и для узла i выполняется соотношение $\left|I_i^+\left(\overline{U}\right)\right|\geq 2$. В результате имеем систему соотношений вида (4), каждое из которых выражает для некоторого узла i, $\left|I_i^+\left(\overline{U}\right)\right|\geq 2$, неизвестные дуговые потоки x_{ij} и x_{iv_i}:

$$x_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{iv_i}} x_{iv_i}, \;\; j \in I_i^+\left(\overline{U}\right) \setminus v_i, \;\; i \in \overline{I}, \;\; \left|I_i^+\left(\overline{U}\right)\right| \geq 2. \tag{4}$$

Пронумеруем произвольным образом соотношения (4). Пусть s – номер соотношения (4), $s = \overline{1, q}$. Имеем систему q дополнительных уравнений:

$$\sum_{(i,\, j) \in \overline{U}} \lambda_{ij}^s x_{ij} = 0, s = \overline{1, q},$$

где коэффициенты каждого уравнения с номером s при выполнении условия $\left|I_i^+\left(\overline{U}\right)\right| \geq 2$ для соответствующих узлов $i \in \overline{I}$ равны

$$\lambda_{ij}^s = 1, \; \lambda_{iv_i}^s = -\frac{p_{ij}}{p_{iv_i}}, \; \lambda_{mn}^s = 0, \; (m, n) \in \overline{U} \setminus \left\{(i, j), \left(i, v_i\right)\right\}, \; s = \overline{1, q}, \; i \in \overline{I}.$$

Итак, система (1) для нового графа $\overline{G} = \left(\overline{I}, \overline{U}\right)$, в котором учтена априорная информация, полученная в результате установки сенсоров в обозреваемые узлы графа $G = (I, U)$ и равенств (3), а также с учетом дополнительных уравнений (4), примет следующий вид:

$$\sum_{j \in I_i^+\left(\overline{U}\right)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-\left(\overline{U}\right)} \mu_{ji} x_{ji} = \begin{cases} x_i + b_i, \; i \in \overline{I}^*, \\ a_i, \; i \in \overline{I} \setminus \overline{I}^*, \end{cases} \tag{5}$$

$$\sum_{(i,\, j) \in \overline{U}} \lambda_{ij}^s x_{ij} = 0, \; s = \overline{1, q}, \tag{6}$$

где $x = \left(x_{ij}, (i, j) \in \overline{U}; x_i, i \in \overline{I}\right)$ – вектор неизвестных системы (5), (6); q – число дополнительных уравнений (6), a_i, b_i, λ_{ij}^s – константы; $\overline{I}^*$ – множество узлов графа $\overline{G}$ с переменной интенсивностью x_i, $i \in \overline{I}$. Таким образом, задачу установки минимального числа датчиков в узлах графа $G = (I, U)$ можно сформулировать следующим образом: *какое минимальное количество $|M|$ обозреваемых узлов графа $G = (I, U)$ необходимо включить в состав множества M, $M \subseteq I$, чтобы система* (5)*,* (6) *имела единственное решение?*

Система (5), (6) – это разреженная система линейных алгебраических уравнений. Для того чтобы установить, имеет ли система единственное решение, необходимо определить число неизвестных системы (5), (6) и ее ранг. Если ранг матрицы системы (5), (6) равен числу неизвестных, то система (5), (6) имеет единственное решение. Неизвестными системы (5), (6) являются:

- дуговые потоки для дуг, исходящих из узлов множества $I \setminus M^*$, где $M^* = I\left(CC(M)\right) \bigcup M$; $CC(M)$ – дуги разреза графа $G = (I, U)$, построенного относительно множества обозреваемых узлов M [2]; $I\left(CC(M)\right)$ – множество узлов, инцидентных дугам разреза $CC(M)$;
- переменные интенсивности x_i узлов $i \in \overline{I}^*$ для нового графа $\overline{G} = \left(\overline{I}, \overline{U}\right)$.

Заметим, что вид разреженности системы (5) для некоторых компонент связности графа $\overline{G}$ остается таким же, как и для системы (1). Однако вид разреженности системы (5) для некоторых компонент связности графа $\overline{G}$ может не совпадать с типом разреженности системы (1), поскольку некоторые компоненты связности графа $\overline{G}$ могут не содержать узлов из множества $\overline{I}^*$ и (или) дуговой поток на дугах некоторой компоненты связности не преобразуется. Для вычисления ранга матрицы системы (5), (6) необходимо применить теорию декомпозиции к системе (5), (6) с целью сохранения вида разреженности системы (5) и, следовательно, ее ранга. Ранги матриц систем вида (5) для указанных типов разреженности исследованы в [1, 2]. Кроме этого, методы декомпозиции разреженной системы (5), (6), основанные на сохранении разреженности системы (5) и, следовательно, ее теоретико-графовых свойств, позволяют применить концепции теории графов, результаты, полученные в теории потоков, и современные технологии построения численных решений исследуемых систем.

Таким образом, если для заданного множества обозреваемых узлов M графа $\overline{G}$ ранг матрицы системы (5), (6) равен числу ее неизвестных, то система (5), (6) имеет единственное решение. Для определения минимального количества $|M|$ сенсоров в узлах графа G поступаем следующим образом. Если при последовательной установке одного сенсора $(|M|=1)$ в каждый узел графа G система (5), (6) каждый раз является недоопределенной системой линейных алгебраических уравнений, то последовательно устанавливаем два сенсора $(|M|=2)$ в каждую пару узлов графа G и продолжаем процесс до тех пор, пока система остается недоопределенной (ранг матрицы системы (5), (6) меньше числа ее неизвестных). В результате описанного процесса будет установлено, что для некоторого (минимального) числа $|M|$ сенсоров ранг матрицы системы (5), (6) равен числу ее неизвестных. Следовательно, система (5), (6) имеет единственное решение, что позволяет оценить дуговые потоки и переменные интенсивности узлов на ненаблюдаемой части обобщенного графа, а также оптимальное расположение сенсоров в узлах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H. Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problem // IJPAM. 2009. Vol. 54, № 2. P. 193–205.

2. Пилипчук Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Минск, 2012.

3. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S., Pesheva Y. H. Graph algorithms in sparse linear systems with rectangular matrices: AIP Conf. Proc. E – ISSN 1570 / American Institute of Physics. 2013. P. 485–490.

4. Bianco L., Confessore G., Gentili M. Combinatorial Aspects of the Sensor Location Problem // Annals of Operation Research. 2006. Vol. 144 (1). P. 201–234.

Поступила в редакцию 22.11.2014.

Андрей Степанович Пилипчук – соискатель кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики БГУ. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики БГУ А. И. Калинин.