обратного гауссовского процесса проводится на основании соответствующих выражений (1). Причем семиинварианты обратного гауссовского процесса имеют вид:

$$c_1(t)=\delta t\beta/\sqrt{\alpha^2-\beta^2};\ \ c_2(t)=\alpha^2\delta t\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-3/2};$$

$$c_3(t)=3\beta\alpha^2\delta t\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-5/2};\ \ c_4(t)=3\alpha^2\delta t\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{-7/2}.$$

Следствие 2. *Математическое ожидание, дисперсия, асимметрия и эксцесс VG-процесса* $V=\left(V_t\right)_{t\geq 0}$ *с параметрами* σ, ν, θ *имеют вид:*

$$EV_t=\theta t;$$

$$DV_t=\sigma^2 t+\nu\theta^2 t;$$

$$SV_t=\theta\nu t^{-1/2}\left(3\sigma^2+2\nu\theta^2\right)/\left(\sigma^2+2\nu\theta^2\right)^{3/2};$$

$$KV_t=3\left(1+2\nu/t-\nu\theta^4 t\left(\sigma^2+\nu\theta^2\right)^{-2}\right).$$

Доказательство следствия 2 проводится по аналогии с доказательством выражений для математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса нормального обратного гауссовского процесса. Причем семиинварианты VG-процесса имеют вид:

$$c_1(t)=\theta t;\ \ c_2(t)=\sigma^2 t+\nu\theta^2 t;$$

$$c_3(t)=\theta\nu t\left(3\sigma^2+2\nu\theta^2\right);\ \ c_4(t)=6\nu t\left(\sigma^2+\nu\theta^2\right)^2-3t^3\nu\theta^4.$$

Следствие 3. *Математическое ожидание и дисперсия гиперболического процесса* $Y=\left(Y_t\right)_{t\geq 0}$ *с параметрами* α, β, δ, μ *имеют вид* (5), (6) *при* λ = 1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ширяев А. Н. Финансовые инновации в стохастической экономике // Экономика и матем. методы. 2009. Т. 45, № 1. С. 87–94.
2. Schoutens W. Levy processes in finance. Bognor Regis, 2003.
3. Prause K. The Generalized hyperbolic model: estimation, financial derivatives and risk measures PhD. Freiburg, 1999.
4. Cont R., Tankov P. Financial modeling with jump processes. London, 2004.
5. Barndorff-Nielsen O. E., Kent J., Sorensen M. Normal variance-mean mixtures and z distributions // Intern. Statist. Rev. 1982. Vol. 50, № 2. P. 145–159.
6. Barndorff-Nielsen O. E., Halgreen C. Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions // Probability theory and related fields. 1977. Vol. 38, № 4. P. 309–311.
7. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Минск, 1999.

Поступила в редакцию 03.11.2014.

Анна Викентьевна Кузьмина – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики БГУ.

УДК 519.21

С. П. СТАШУЛЁНОК, А. А. ТОЕСТЕВ

ФОРМУЛА ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ИНТЕГРАЛЕ СТРАТОНОВИЧА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ θ-ИНТЕГРАЛОВ

Приводятся отличные от общепринятых определения стохастического интеграла Стратоновича и стохастических θ-интегралов для одномерного стандартного случайного процесса броуновского движения, когда подынтегральная функция представляет собой функцию одной переменной от броуновского движения. В этом случае доказана эквивалентность приведенных определений классическим. Введенные определения позволяют обосновать использование формулы замены переменной применительно к стохастическим интегралам Стратоновича и получить обобщения формулы замены переменной для стохастических θ-интегралов ($0<\theta\leq 1$). В случае стохастических θ-интегралов замена переменной осуществляется лишь в допредельной интегральной сумме. Сходимость интегральных сумм установлена в пространстве $L^1(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$ для дифференцируемых функций одной переменной, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих определенным условиям. Полученные результаты могут быть применены в стохастическом анализе, а также в его приложениях при вычислении стохастических интегралов.

Ключевые слова: стандартный случайный процесс броуновского движения; стохастический интеграл Ито; стохастический интеграл Стратоновича; стохастический θ-интеграл.

The article presents the definitions, different from the conventional, of the Stratonovich integrals and stochastic θ-integrals for one-dimensional standard stochastic process of Brownian motion in a case where the integrand is a function of one variable of Brownian motion. In this case, the equivalence of new definitions and classis definitions is proved. The definitions are introduced enable to justify the u-substitution applied to the Stratonovich integrals and to receive a generalization of u-substitution for stochastic θ-integrals ($0 < \theta \le 1$). In the case of stochastic θ-integrals, a variable substitution is performed only in a prelimit integral sum. The convergence of the integral sums is shown in $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ for differentiable functions of one variable with a continuous derivative, satisfying the certain conditions. The obtained results can be used in the stochastic analysis, as well as for its applications in the calculation of stochastic integrals.

Key words: standard stochastic process of Brownian motion; Itō integral; Stratonovich integral; stochastic θ-integral.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство с определенным на нем одномерным стандартным случайным процессом броуновского движения $B(t),\ t \in T = [0, b]$. Стохастический интеграл Стратоновича, который позволяет обращаться со стохастическими интегралами как с обычными интегралами от гладких функций, был введен в работе [1]. Для функции одной переменной, зависящей от случайного процесса броуновского движения, определение выглядит следующим образом. Пусть $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ – разбиение отрезка $T = [0, b]$, $|\Delta| = \max\limits_k (t_k - t_{k-1})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая условиям:

$$\int\limits_T \|f(B(t))\|_{L^2}^2 \, dt < \infty, \tag{1}$$

$$\left\| \sup_{t \in T} \left| \frac{df}{dx}(B(t)) \right| \right\|_{L^2} < \infty, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|_{L^2}$ – норма в $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Тогда

$$(S)\int\limits_T f(B(t))\, dB(t) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{j=1}^n \frac{f\left(B\left(t_{j-1}\right)\right) + f\left(B\left(t_j\right)\right)}{2} \left(B\left(t_j\right) - B\left(t_{j-1}\right)\right).$$

Здесь и далее под знаком lim будет подразумеваться предел в $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, если не оговорено противное.

В работе [2] рассмотрено понятие стохастического θ-интеграла, $\theta \in [0, 1]$, которое обобщает понятие стохастического интеграла Стратоновича (при $\theta = \frac{1}{2}$ стохастический θ-интеграл совпадает с интегралом Стратоновича):

$$(\theta)\int\limits_T f(B(t))\, dB(t) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{j=1}^n \left[(1-\theta) f\left(B\left(t_{j-1}\right)\right) + \theta f\left(B\left(t_j\right)\right)\right]\left[B\left(t_j\right) - B\left(t_{j-1}\right)\right].$$

В работе [3] исследуется предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением вида

$$\sum_{k=1}^n f_m\left(L_m\left(t_{k-1}\right)\right)\left(L_m\left(t_k\right) - L_m\left(t_{k-1}\right)\right),$$

где $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$ – разбиение отрезка [0, t], а f_m и L_m – свертки функции f и квадратично интегрируемого случайного процесса Леви L соответственно с «шапочкой», т. е., например,

$$L_m(t) = \left(L * \rho_m\right)(t) = \int\limits_0^{\frac{1}{m}} L(t+s)\rho_m(s)\, ds,$$

где $\rho_m(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$; $\rho_m(s) \ge 0$; $\operatorname{supp} \rho_m(s) \subset \left[0, \frac{1}{m}\right]$; $\int\limits_0^{\frac{1}{m}} \rho_m(s)\, ds = 1$. Исследование их предельного поведения вызвано необходимостью находить ассоциированные решения уравнений в дифференциалах. Запаса существующих стохастических интегралов для описания пределов данных сумм оказалось недостаточно. Поэтому в статье [3] был введен новый класс стохастических интегралов – стохастические μ-интегралы, которые являются обобщением и уточнением (в разрывном случае) стохастических θ-интегралов, и в терминах этих интегралов дается полное описание предельного поведения итовских конечных сумм с осреднением. Приведем это определение.

Определение 1 [3, с. 713]. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ и μ – произвольная вероятностная мера, заданная на борелевских подмножествах отрезка [0; 1]. *Стохастическим* μ*-интегралом* называется случайный процесс

$$(\mu)\int_0^{t+} f(B(s-))dB(s) = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 f\Big(B(t_{k-1}) + u\big(B(t_k) - B(t_{k-1})\big)\Big)\mu(du)\big(B(t_k) - B(t_{k-1})\big),$$

где предел берется по вероятности.

Можно рассмотреть особый случай μ-интеграла для вероятностной меры Лебега. В этом случае определение μ-интеграла примет вид

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 f\Big(B(t_{k-1}) + u\big(B(t_k) - B(t_{k-1})\big)\Big)du\big(B(t_k) - B(t_{k-1})\big),$$

и после замены $u = \dfrac{s - B(t_{k-1})}{B(t_k) - B(t_{k-1})}$ преобразуется в

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{B(t_k) - B(t_{k-1})}\int_{B(t_{k-1})}^{B(t_k)} f(s)\,ds\big(B(t_k) - B(t_{k-1})\big),$$

где предел берется по вероятности.

В настоящей статье последнее выражение предложено как другое определение стохастического интеграла Стратоновича. Такое рассмотрение позволяет ослабить условия, налагаемые на подынтегральную функцию в общем случае, а также вместо сходимости по вероятности интегральных сумм получить сходимость в $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Кроме этого, примененный в ином определении стохастического интеграла Стратоновича подход позволяет получить также другое определение стохастических θ-интегралов.

Другое определение стохастического интеграла Стратоновича. Формула замены переменной

В классическом определении *стохастического интеграла Стратоновича* [1]

$$(S)\int_T f\big(B(t)\big)dB(t) = \underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{B(t_{k-1}) + B(t_k)}{2}\right)\Delta B_k, \tag{3}$$

где $\Delta B_k = B(t_k) - B(t_{k-1})$, заменим среднее значение функции $f\left(\dfrac{B(t_{k-1}) + B(t_k)}{2}\right)$ значением интеграла, деленного на длину отрезка $\dfrac{1}{\Delta B_k}\displaystyle\int_{B(t_{k-1})}^{B(t_k)} f(x)\,dx$. По теореме о среднем последнее выражение является значением функции *f* в некоторой точке отрезка $\big[B(t_{k-1}),\, B(t_k)\big]$, но не обязательно в середине этого отрезка.

Покажем, однако, что после данной замены новое значение предела всегда будет совпадать с определением (3), т. е.

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{B(t_{k-1}) + B(t_k)}{2}\right)\Delta B_k = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Delta B_k}\int_{B(t_{k-1})}^{B(t_k)} f(x)\,dx\,\Delta B_k.$$

Для этого рассмотрим разность допредельного выражения правой части с интегральной суммой Ито [4]

$$D_\Delta = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\Delta B_k}\int_{B(t_{k-1})}^{B(t_k)} f(x)\,dx - f\big(B(t_{k-1})\big)\right]\Delta B_k$$

и покажем, что ее предел совпадает с аналогичным пределом следующей разности для определения (3):

$$D_\Delta^* = \sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{B(t_{k-1})+B(t_k)}{2}\right)-f\left(B(t_{k-1})\right)\right]\Delta B_k =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{df}{dx}\left[(1-\theta_k)B(t_{k-1})+\theta_k B(t_k)\right]\Delta B_k^2,\ \theta_k=\theta_k(\omega).$$

Обозначим $\Phi_k(u)=\int\limits_{B(t_{k-1})}^{u} f(x)\,dx.$ Тогда $\Phi_k'(u)=f(u),$ значит, $\Phi_k(u)$ является дважды дифференцируемой. Отсюда по формуле Тейлора можно записать

$$\Phi_k\left(B(t_k)\right)=\Phi_k\left(B(t_{k-1})\right)+\frac{d\Phi_k}{dx}\left(B(t_{k-1})\right)\Delta B_k +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi_k}{dx^2}\left[(1-\theta_k)B(t_{k-1})+\theta_k B(t_k)\right]\Delta B_k^2,$$

где $0\le\theta_k\le 1$. Сделав обратную подстановку, получим

$$\int\limits_{B(t_{k-1})}^{B(t_k)} f(x)\,dx = f\left(B(t_{k-1})\right)\Delta B_k+\frac{1}{2}\frac{df}{dx}\left[(1-\theta_k)B(t_{k-1})+\theta_k B(t_k)\right]\Delta B_k^2.$$

Следовательно,

$$D_\Delta=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\Delta B_k}\int\limits_{B(t_{k-1})}^{B(t_k)} f(x)dx - f\left(B(t_{k-1})\right)\right]\Delta B_k =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{df}{dx}\left[(1-\theta_k)B(t_{k-1})+\theta_k B(t_k)\right]\Delta B_k^2.$$

Покажем, что последнее выражение стремится в среднем к интегралу $\frac{1}{2}\int_T\frac{df}{dx}(B(t))\,dt.$ Для этого произведем ε-разбиение интервала и заменим $\frac{df}{dx}(B(t))$ функциями:

$$\overline{f}_\varepsilon(t)=\sup\left\{\frac{df}{dx}\left(B(t)\right),\ t\in\left[t_j^{(\varepsilon)},\ t_{j+1}^{(\varepsilon)}\right)\right\}\ \text{при}\ t\in\left[t_j^{(\varepsilon)},\ t_{j+1}^{(\varepsilon)}\right),$$

$$\underline{f}_\varepsilon(t)=\inf\left\{\frac{df}{dx}\left(B(t)\right),\ t\in\left[t_j^{(\varepsilon)},t_{j+1}^{(\varepsilon)}\right)\right\}\ \text{при}\ t\in\left[t_j^{(\varepsilon)},\ t_{j+1}^{(\varepsilon)}\right).$$

Тогда, обозначая $\overline{D}_{\Delta\varepsilon}=\frac{1}{2}\sum\overline{f}_\varepsilon(t_k)\Delta B_k^2,$ $\underline{D}_{\Delta\varepsilon}=\frac{1}{2}\sum\underline{f}_\varepsilon(t_k)\Delta B_k^2,$ получаем

$$\underline{D}_{\Delta\varepsilon}<D_\Delta<\overline{D}_{\Delta\varepsilon} \qquad (4)$$

при $\left\{t_j^{(\varepsilon)},\ j=0,1,2,\ \ldots\right\}\subset\left\{t_k^{(\Delta)},\ k=0,1,2,\ \ldots\right\}.$

Для одномерного стандартного процесса броуновского движения существует вторая вариация [5, с. 159], откуда имеем

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k:\,t_k\in\left[t_j^{(\varepsilon)},\ t_{j+1}^{(\varepsilon)}\right)}\Delta B_k^2 = t_{j+1}^{(\varepsilon)}-t_j^{(\varepsilon)},$$

где предел понимается как среднеквадратический. Применяя неравенство Коши – Буняковского, предыдущее равенство и условие (2), получаем

$$\left\| \overline{D}_{\Delta\varepsilon} - \frac{1}{2}\int_T \overline{f}_\varepsilon(t)dt \right\|_{L^1} \le \sum_j \left\| \frac{1}{2} \sum_{k:\, t_k \in \left[t_j^{(\varepsilon)},\ t_{j+1}^{(\varepsilon)}\right)} \overline{f}_\varepsilon\left(t_j^{(\varepsilon)}\right)\Delta B_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k:\, t_k \in \left[t_j^{(\varepsilon)},\ t_{j+1}^{(\varepsilon)}\right)} \overline{f}_\varepsilon\left(t_j^{(\varepsilon)}\right)\left(t_k - t_{k-1}\right) \right\|_{L^1} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_j \left\| \overline{f}_\varepsilon\left(t_j^{(\varepsilon)}\right) \right\|_{L^2} \left\| \sum_{k:\, t_k \in \left[t_j^{(\varepsilon)},\ t_{j+1}^{(\varepsilon)}\right)} \Delta B_k^2 - \left(t_{j+1}^{(\varepsilon)} - t_j^{(\varepsilon)}\right) \right\|_{L^2} \xrightarrow[|\Delta|\to 0]{} 0,$$

поэтому $\overline{D}_\varepsilon := \lim\limits_{|\Delta|\to 0} \overline{D}_{\Delta\varepsilon} = \frac{1}{2}\int\limits_T \overline{f}_\varepsilon(t)dt,\ \underline{D}_\varepsilon := \lim\limits_{|\Delta|\to 0} \underline{D}_{\Delta\varepsilon} = \frac{1}{2}\int\limits_T \underline{f}_\varepsilon(t)dt.$

Вследствие непрерывности производной $\frac{df}{dx}$ разности $\overline{f}_\varepsilon - \underline{f}_\varepsilon$ и $\overline{D}_\varepsilon - \underline{D}_\varepsilon$ могут быть сделаны сколь угодно малыми с уменьшением ε для почти всех $\omega \in \Omega$. Отсюда следует существование предела с вероятностью 1:

$$\lim_{|\Delta|\to 0} D_\Delta = \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{D}_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{D}_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_T \frac{df}{dx}\big(B(t)\big)dt.$$

Из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (мажоранта будет существовать в силу условия (2)) следует, что данное равенство имеет место и тогда, когда предел в нем понимается в смысле сходимости в $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

Сравнивая с результатами, приведенными в [1], заключаем

$$\lim_{|\Delta|\to 0} D_\Delta^* = \frac{1}{2}\int_T \frac{df}{dx}(B(t))\,dt = \lim_{|\Delta|\to 0} D_\Delta.$$

Отсюда получаем равенство двух пределов

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{B\left(t_{k-1}\right) + B\left(t_k\right)}{2}\right)\Delta B_k = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\Delta B_k} \int_{B\left(t_{k-1}\right)}^{B\left(t_k\right)} f(x)\,dx\,\Delta B_k.$$

Следовательно, справедливо другое определение интеграла Стратоновича:

$$(S)\int_T f(B(t))\,dB(t) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\Delta B_k} \int_{B\left(t_{k-1}\right)}^{B\left(t_k\right)} f(x)\,dx\,\Delta B_k = \int_{B(0)}^{B(b)} f(x)\,dx.$$

В результате вместо стохастического получен обычный интеграл Римана, где пределы интегрирования являются случайными величинами. Как легко видеть из записи, такое определение фактически представляет собой формулу замены переменных в стохастическом интеграле Стратоновича (введена замена $x = B(t)$).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– дифференцируемая функция, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая условиям* (1) *и* (2); $B(t), t \in T = [0, b]$, *– одномерный стандартный случайный процесс броуновского движения,* $\Delta = \left\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$ *– разбиение отрезка* $T = [0, b]$, $\left|\Delta\right| = \max\limits_k \left(t_k - t_{k-1}\right)$. *Тогда*

$$(S)\int_T f\big(B(t)\big)dB(t) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\Delta B_k} \int_{B\left(t_{k-1}\right)}^{B\left(t_k\right)} f(x)dx\,\Delta B_k = \int_{B(0)}^{B(b)} f(x)dx.$$

Другое определение стохастических θ-интегралов

Стохастические θ-интегралы являются обобщением стохастических интегралов Стратоновича.

Пусть на отрезке $T=\left[0,b\right]$ задана дифференцируемая функция $f(x)$, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая условиям (1) и (2). Произведем разбиение интервала $T: 0=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$, обозначим его Δ. Диаметр разбиения при этом равен $\left|\Delta\right|=\max\limits_j\left(t_{j+1}-t_j\right)$.

Определение 2 [2, с. 192]. *Стохастическим* θ-*интегралом*, где $0\le\theta\le1$, называется предел

$$(\theta)\int\limits_T f(B(t))\,dB(t)=\lim_{|\Delta|\to0}\sum_{k=1}^n\Big[(1-\theta)f\left(B\left(t_{k-1}\right)\right)+\theta f\left(B\left(t_k\right)\right)\Big]\Big[B\left(t_k\right)-B\left(t_{k-1}\right)\Big]. \tag{5}$$

Как видно из определения, при θ = 0 получается стохастический интеграл Ито. При $\theta=\dfrac{1}{2}$ получим определение стохастического интеграла Стратоновича.

Введем иное определение θ-интеграла при θ > 0:

$$(\theta)\int\limits_T f(B(t))\,dB(t)=\lim_{|\Delta|\to0}\sum_{k=1}^n\frac{1}{2\theta}\int\limits_{B\left(t_{k-1}\right)}^{B\left(t_{k-1}\right)+2\theta\left(B\left(t_k\right)-B\left(t_{k-1}\right)\right)}f(x)\,dx. \tag{6}$$

Чтобы показать эквивалентность определений (5) и (6), рассмотрим разность допредельного выражения правой части (6) с интегральной суммой Ито [4]

$$D_\Delta^\theta=\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{2\theta\,\Delta B_k}\int\limits_{B\left(t_{k-1}\right)}^{B\left(t_{k-1}\right)+2\theta\,\Delta B_k}f(x)dx-f\left(B\left(t_{k-1}\right)\right)\right]\Delta B_k \tag{7}$$

и покажем, что ее предел совпадает с аналогичным пределом следующей разности для (5)

$$D_\Delta^{\theta*}=\sum_{k=1}^n\Big[f\left((1-\theta)B\left(t_{k-1}\right)+\theta B\left(t_k\right)\right)-f\left(B\left(t_{k-1}\right)\right)\Big]\Delta B_k=$$

$$=\theta\sum_{k=1}^n\frac{df}{dx}\Big[\left(1-\lambda_k\right)B\left(t_{k-1}\right)+\lambda_k B\left(t_k\right)\Big]\Delta B_k^2,$$

где $0\le\lambda_k\le\theta$.

Обозначим $\Phi_k(u)=\int\limits_{B\left(t_{k-1}\right)}^{u}f(x)\,dx$. Тогда $\Phi_k'(u)=f(u)$, значит, $\Phi_k(u)$ является дважды дифференцируемой. Отсюда по формуле Тейлора можно записать

$$\Phi_k\left(B\left(t_{k-1}\right)+2\theta\,\Delta B_k\right)=\Phi_k\left(B\left(t_{k-1}\right)\right)+\frac{d\Phi_k}{dx}\left(B\left(t_{k-1}\right)\right)2\theta\,\Delta B_k+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi_k}{dx^2}\Big[B\left(t_{k-1}\right)+\lambda_k\cdot2\theta\,\Delta B_k\Big]\left(2\theta\,\Delta B_k\right)^2,$$

где $0\le\lambda_k\le1$. Сделав обратную подстановку, получим

$$\int\limits_{B\left(t_{k-1}\right)}^{B\left(t_{k-1}\right)+2\theta\,\Delta B_k}f(x)\,dx=f\left(B\left(t_{k-1}\right)\right)2\theta\,\Delta B_k+\frac{1}{2}\frac{df}{dx}\Big[B\left(t_{k-1}\right)+\lambda_k\cdot2\theta\,\Delta B_k\Big]\left(2\theta\,\Delta B_k\right)^2.$$

Следовательно,

$$D_\Delta^\theta=\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{2\theta\,\Delta B_k}\int\limits_{B\left(t_{k-1}\right)}^{B\left(t_{k-1}\right)+2\theta\,\Delta B_k}f(x)\,dx-f\left(B\left(t_{k-1}\right)\right)\right]\Delta B_k=$$

$$=\theta\sum_{k=1}^n\frac{df}{dx}\Big[B\left(t_{k-1}\right)+\lambda_k\cdot2\theta\,\Delta B_k\Big]\Delta B_k^2,$$

где $0\le\lambda_k\le1$.

При $\lambda_k \cdot 2\theta \le 1,$ продолжая рассуждения аналогично случаю интеграла Стратоновича, также получим равенство пределов $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} D_\Delta^{\theta*} = \theta \int\limits_T \frac{df}{dx}(B(t))\,dt = \lim\limits_{|\Delta|\to 0} D_\Delta^{\theta},$ из которого следует эквивалентность двух определений. В противном случае, т. е. при $\lambda_k \cdot 2\theta > 1,$ не выполнено условие (4), что не позволяет провести аналогичные рассуждения.

Таким образом, при $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ доказана эквивалентность определений (5) и (6).

Положим теперь $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right].$ Чтобы показать эквивалентность определений (5) и (6), возьмем разность (7) допредельного выражения правой части (6) с интегральной суммой Ито и покажем, что ее предел совпадает с аналогичным пределом разности $D_\Delta^{\theta*}$ для (5):

$$D_\Delta^{\theta*} = \sum_{k=1}^{n} \left[f\left((1-\theta)B(t_{k-1}) + \theta B(t_k)\right) - f\left(B(t_{k-1})\right)\right]\Delta B_k =$$

$$= \theta \sum_{k=1}^{n} \frac{df}{dx}\left[(1-\lambda_k)B(t_{k-1}) + \lambda_k B(t_k)\right]\Delta B_k^2,$$

где $0 \le \lambda_k \le \theta.$

Имеем

$$D_\Delta^{\theta} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2\theta\,\Delta B_k} \int\limits_{B(t_{k-1})}^{B(t_{k-1})+2\theta\,\Delta B_k} f(x)\,dx - f\left(B(t_{k-1})\right)\right]\Delta B_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2\theta\,\Delta B_k} \int\limits_{B(t_{k-1})}^{B(t_k)} f(x)dx - \frac{1}{2\theta} f\left(B(t_{k-1})\right)\right]\Delta B_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\left(1 - \frac{1}{2\theta}\right) \frac{1}{(2\theta-1)\Delta B_k} \int\limits_{B(t_k)}^{B(t_k)+(2\theta-1)\Delta B_k} f(x)\,dx - \left(1-\frac{1}{2\theta}\right) f\left(B(t_{k-1})\right)\right]\Delta B_k = \frac{1}{2\theta} D_\Delta^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{2\theta}\right) D_\Delta^{\theta - \frac{1}{2}}.$$

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \frac{1}{2\theta} D_\Delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\theta}\frac{1}{2} \int\limits_T \frac{df}{dx}(B(t))\,dt.$$

Обозначим $\Phi_{k+1}(u) = \int\limits_{B(t_k)}^{u} f(x)\,dx.$ Тогда $\Phi'_{k+1}(u) = f(u),$ поэтому $\Phi_{k+1}(u)$ является дважды дифференцируемой. Отсюда по формуле Тейлора получим

$$\Phi_{k+1}\left(B(t_k) + (2\theta-1)\Delta B_k\right) = \Phi_{k+1}\left(B(t_k)\right) + \frac{d\Phi_{k+1}}{dx}\left(B(t_k)\right)(2\theta-1)\Delta B_k +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2\Phi_{k+1}}{dx^2}\left[B(t_k) + \lambda_k(2\theta-1)\Delta B_k\right]\left((2\theta-1)\Delta B_k\right)^2, \quad 0 \le \lambda_k \le 1.$$

Сделаем обратную подстановку

$$\int\limits_{B(t_k)}^{B(t_k)+(2\theta-1)\Delta B_k} f(x)\,dx = f\left(B(t_k)\right)(2\theta-1)\Delta B_k + \frac{1}{2}\frac{df}{dx}\left[B(t_k) + \lambda_k(2\theta-1)\Delta B_k\right]\left((2\theta-1)\Delta B_k\right)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{2\theta-1}{2\theta}D_{\Delta}^{\theta-\frac{1}{2}}=\frac{2\theta-1}{2\theta}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(2\theta-1)\Delta B_k}\int\limits_{B(t_k)}^{B(t_k)+(2\theta-1)\Delta B_k}f(x)\,dx-f\left(B(t_k)\right)+f\left(B(t_k)\right)-f\left(B(t_{k-1})\right)\right]\Delta B_k=$$

$$=\frac{2\theta-1}{2\theta}\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{df}{dx}\left[B(t_k)+\lambda_k(2\theta-1)\Delta B_k\right]\Delta B_k^2+\frac{2\theta-1}{2\theta}\sum_{k=1}^{n}\Big(f\left(B(t_k)\right)-f\left(B(t_{k-1})\right)\Big)\Delta B_k=$$

$$=\frac{2\theta-1}{2\theta}D_{\Delta,1}^{\theta-\frac{1}{2}}+\frac{2\theta-1}{2\theta}D_{\Delta,2}^{\theta-\frac{1}{2}},$$

где $0\le\lambda_k\le 1.$

Поскольку $\lambda_k(2\theta-1)\le 1,$ продолжаем рассуждать так же, как в случае интеграла Стратоновича, получим равенство

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\frac{2\theta-1}{2\theta}D_{\Delta,1}^{\theta-\frac{1}{2}}=\frac{2\theta-1}{2\theta}\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\int_T\frac{df}{dx}(B(t))\,dt.$$

Известно [2, с. 207], что

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\frac{2\theta-1}{2\theta}D_{\Delta,2}^{\theta-\frac{1}{2}}=\frac{2\theta-1}{2\theta}\int_T\frac{df}{dx}(B(t))\,dt.$$

Поскольку $\frac{1}{2\theta}\frac{1}{2}\int_T\frac{df}{dx}(B(t))\,dt+\frac{2\theta-1}{2\theta}\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\int_T\frac{df}{dx}(B(t))\,dt+\frac{2\theta-1}{2\theta}\int_T\frac{df}{dx}(B(t))\,dt=\theta\int_T\frac{df}{dx}(B(t))\,dt,$ получим эквивалентность определений (5) и (6) для $\theta\in\left(\frac{1}{2},1\right].$

Сформулируем полученный результат в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *– дифференцируемая функция, имеющая непрерывную производную и удовлетворяющая условиям* (1) *и* (2); $B(t),t\in T=[0,b],$ *– одномерный стандартный случайный процесс броуновского движения,* $\Delta=\{0=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ *– разбиение отрезка* $T=[0,b],$ $|\Delta|=\max\limits_k(t_k-t_{k-1}),$ $0<\theta\le 1.$ *Тогда*

$$(\theta)\int_T f(B(t))dB(t)=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\theta}\int\limits_{B(t_{k-1})}^{B(t_{k-1})+2\theta\left(B(t_k)-B(t_{k-1})\right)}f(x)\,dx.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Стратонович Р. Л. Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1964. Т. 1. С. 3–12.
2. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. 2-е изд., доп. М., 1990.
3. Лазакович Н. В., Яблонский О. Л. Предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50, вып. 4. С. 711–732.
4. Ito K. Stochastic integral // Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1944. Vol. 20. P. 519–524.
5. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика : учебник. 2-е изд., доп. М., 1989.

Поступила в редакцию 05.06.2014.

Сергей Павлович Сташулёнок – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета БГУ.

Артем Адамович Тоестев – инженер-программист НПООО «Геосплайн».