4. Influence of different modeling strategies for the periodontal ligament on finite element simulation results / A. Hohmann [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2011. Vol. 139. P. 775–783.
5. Middleton J., Jones M., Wilson A. The role of the periodontal ligament in bone modeling: the initial development of a time-dependent finite element model // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 1996. Vol. 109. P. 155–162.
6. Dorow C., Sander F. G. Development of a model for the simulation of orthodontic load on lower first premolars using the finite element method // J. Orofacial Orthop. 2005. Vol. 66. P. 208–218.
7. Cattaneo P. M., Dalstra M., Melsen B. The finite element method: a tool to study orthodontic tooth movement // J. Dent. Res. 2005. Vol. 84. P. 428–433.
8. A validated finite element method study of orthodontic tooth movement in the human subject / M. L. Jones [et al.] // J. Orthod. 2001. Vol. 28. P. 29–38.
9. Kawarizadeh A., Bourauel C., Jäger A. Experimental and numerical determination of initial tooth mobility and material properties of the periodontal ligament in rat molar specimens // Eur. J. Orthod. 2003. Vol. 25. P. 569–578.
10. Determination of the center of resistance in an upper human canine and idealized tooth model / D. Vollmer [et al.] // Eur. J. Orthod. 1999. Vol. 21. P. 633–648.
11. Bosiakov S. M., Yurkevich K. S. Determination of stiffnesses of the bone tissue at translational displacements and rotations of the tooth root // Russ. J. Biomech. 2010. Vol. 14, № 2. P. 36–45.
12. Nikolai R. J., Schweiker J. W. Investigation of root-periodontium interface stresses and displacements for orthodontic application // Exp. Mech. 1972. Vol. 12, № 9. P. 406–413.
13. Provatidis C. G. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation // Int. J. Eng. Sci. 2001. Vol. 39. P. 1361–1381.
14. Van Schepdael A., Geris L., Van der Sloten J. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement // Med. Eng. Phys. 2013. Vol. 35. P. 403–410.
15. Bourauel C., Vollmer D., Jäger A. Application of bone remodeling theories in the simulation of orthodontic tooth movements // J. Orofacial Orthop. 2000. Vol. 61. P. 266–279.
16. Numerical simulation of tooth movement in a therapy period / Y. Qian [et al.] // Clinic. Biomech. 2008. Vol. 23. S48–S52.
17. Schneider J., Geiger M., Sander F.-G. Numerical experiments on long-time orthodontic tooth movement // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2002. Vol. 121. P. 257–265.
18. Van Schepdael A., Geris L., Van der Sloten J. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement // Med. Eng. Phys. 2013. Vol. 35. P. 403–410.
19. De Pauw G., Dermaut L., De Bruyn H. The value of the centre of rotation in initial and longitudinal tooth and bone displacement // Eur. J. Orthod. 2003. Vol. 25. P. 285–291.
20. Nonlinear stress-strain behavior of periodontal ligament under orthodontic loading / S. R. Toms [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2002. Vol. 122. P. 174–179.
21. Analytically determined mechanical properties of, and models for the periodontal ligament: Critical review of literature / T. S. Fill [et al.] // J. Biomech. 2012. Vol. 45. P. 9–16.
22. Three-dimensional mechanical environment of orthodontic tooth movement and root resorption / R. F. Viecilli [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. 2008. Vol. 133. P. 791.e711–791.e726.
23. Provatidis C. G. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament // Med. Eng. Phys. 2000. Vol. 22. P. 359–370.
24. Ren Y., Maltha J. C., Kuijpers-Jagtman A. M. Optimum force magnitude for orthodontic tooth movement: a systematic literature review // Angle Orthod. 2003. Vol. 73. P. 86–92.

Поступила в редакцию 16.09.2014.

Сергей Михайлович Босяков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета БГУ.

Абдуфтах Фрхат Мселати – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета БГУ. Научный руководитель – С. М. Босяков.

Кирилл Сергеевич Юркевич – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета БГУ.

УДК 519.24

Т. В. ЦЕХОВАЯ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНКИ СЕМИВАРИОГРАММЫ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрены задачи статистического анализа временных рядов, связанные с оцениванием семивариограммы. Семивариограмма – одна из основных характеристик стационарных случайных процессов во временной области. Эта функция является моментом второго порядка и характеризует степень линейной зависимости между составляющими рассматриваемого процесса. Исследована непараметрическая оценка семивариограммы гауссовского стационарного случайного процесса с дискретным временем. Доказана ее несмещенность, состоятельность в среднеквадратическом смысле. Изучено асимптотическое поведение семиинвариантов высших порядков. С помощью полученных предельных выражений для дисперсии, ковариации и семиинвариантов высших порядков непараметрической оценки семивариограммы найдено ее асимптотическое распределение. Учитывая нормальную аппроксимацию распределения изучаемой статистики, построен центральный доверительный интервал для семивариограммы.

Ключевые слова: случайный процесс; оценка семивариограммы; семиинвариант; асимптотическое распределение.

The paper deals with the problem of a statistical analysis of time series connected with the estimation of semivariogram. Semivariogram is a main characteristic stationary stochastic process in time area and usually this function is the variance of increments. It is used for measuring the variability in space. In this article the nonparametric semivariogram estimator of Gaussian stationary stochastic process with discrete time is considered, its unbiased and consistency in mean-square sense are proved. The asymptotic behavior of the higher orders cumulants of examined statistics is investigated. I present the limiting expressions of the variance, covariance and the higher order cumulants of the nonparametric semivariogram estimator. These expressions are then used to prove the theorem concerning the asymptotic distribution of the semivariogram estimator. The limiting distribution of the examined statistics is determined. By the assumptions of asymptotic normality of the semivariogram estimator, I present confidence intervals for semivariogram models.

Key words: stochastic process; semivariogram estimation; cumulant; asymptotic distribution.

Детерминированные модели интерполяции традиционно широко применяются в различных областях прикладных исследований [1]. Однако в последнее время заметно усилился интерес к геостатистическим моделям интерполяции, в частности к моделям из семейства кригинга. Главное преимущество кригинга перед детерминированными методами заключается в том, что он не только позволяет получить несмещенную оценку, обладающую минимальной дисперсией в классе линейных оценок, но и дает возможность вычислить оценку ошибки интерполяции. В основе кригинга лежит семивариограмма – момент второго порядка, характеризующий степень линейной зависимости между составляющими рассматриваемого процесса. В связи с этим возникают задачи построения и изучения оценок семивариограммы [2, 3]. Однако в научной литературе по вариограммному анализу временных рядов чаще всего ограничиваются исследованием первых двух моментов построенной оценки.

В настоящей работе найдены выражения для математического ожидания, дисперсии, ковариации и семиинвариантов высших порядков оценки семивариограммы гауссовского стационарного случайного процесса с дискретным временем. При дополнительных ограничениях на характеристики процесса во временной области исследовано асимптотическое поведение семиинвариантов порядка p, $p \geq 2$, найдено предельное распределение изучаемой статистики, построена интервальная оценка семивариограммы.

Пусть $X(s)$, $s \in \mathbf{Z}$, – стационарный в широком смысле гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, неизвестными ковариационной функцией $R(s)$, $s \in \mathbf{Z}$, и семивариограммой

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} D\{X(s+h) - X(s)\},\ s, h \in \mathbf{Z}.$$

Заметим, что функция $2\gamma(h)$, $h \in \mathbf{Z}$, называется вариограммой.

Предположим далее, что $X(1), \ldots, X(n)$ – n последовательных наблюдений за процессом $X(s)$, $s \in \mathbf{Z}$. В качестве оценки семивариограммы рассмотрим статистику вида

$$\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{s=1}^{n-h} \left(X(s+h) - X(s)\right)^2, \tag{1}$$

где $h = 0, 1, \ldots, n-1$. Положим $\tilde{\gamma}(-h) = \tilde{\gamma}(h)$, $h = 0, 1, \ldots, n-1$, и $\tilde{\gamma}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Исследуем статистические свойства оценки (1) с использованием единого семиинвариантного подхода.

По свойствам смешанных семиинвариантов [4]

$$\mathrm{cum}\{\tilde{\gamma}(h)\} = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{s=1}^{n-h} \left[\mathrm{cum}\left\{X^2(s+h)\right\} - 2\mathrm{cum}\left\{X(s+h)X(s)\right\} + \mathrm{cum}\left\{X^2(s)\right\}\right].$$

Согласно [5] каждому слагаемому выражения в квадратных скобках можно поставить в соответствие множество $D = \{(1, 1), (1, 2)\}$. Из определения неразложимого разбиения имеют место два неразложимых разбиения множества D:

1) $D_1 = \{(1, 1), (1, 2)\} = D$;
2) $D_1 = \{(1, 1)\}$, $D_2 = \{(1, 2)\}$, $D = D_1 \cup D_2$.

Тогда в силу [5] (теорема 2.3.2) получим

$$\mathrm{cum}\left\{\tilde{\gamma}(h)\right\} = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{s=1}^{n-h} \Big[\mathrm{cum}\{X(s+h), X(s+h)\} + (\mathrm{cum}\{X(s+h)\})^2 - 2\mathrm{cum}\{X(s+h), X(s)\} -$$

$$-2\mathrm{cum}\{X(s+h)\}\,\mathrm{cum}\{X(s)\} + \mathrm{cum}\{X(s), X(s)\} + (\mathrm{cum}\{X(s)\})^2\Big].$$

С учетом свойств смешанных семиинвариантов [4], нулевого математического ожидания $M\{X(s)\} = 0$ и стационарности рассматриваемого процесса имеем

$$\operatorname{cum}\{\tilde\gamma(h)\}=\frac{1}{2(n-h)}\sum_{s=1}^{n-h}[\operatorname{cov}\{X(s+h),X(s+h)\}-2\operatorname{cov}\{X(s+h),\ X(s)\}-\operatorname{cov}\{X(s),X(s)\}]=$$

$$=\frac{1}{(n-h)}\sum_{s=1}^{n-h}[R(0)-R(h)]=\gamma(h).$$

Последнее равенство справедливо в силу связывающего соотношения ковариационной функции и семивариограммы стационарного в широком смысле случайного процесса [2].

Согласно [5] $\operatorname{cum}\{\tilde\gamma(h)\}=M\{\tilde\gamma(h)\}$. Отсюда заключаем, что статистика (1) является несмещенной оценкой для семивариограммы $\gamma(h)$.

Далее при исследовании асимптотических свойств семиинвариантов порядка p, $p\ge 2$, оценки $\tilde\gamma(h)$ и ее предельного распределения будем предполагать, что h выбирается фиксированным, $h=0,1,\ldots,n-1$.

Теорема 1. *Если имеет место соотношение*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|\gamma(m)|<\infty, \tag{2}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\min\{h_1,h_2\}\right)\operatorname{cov}\{\tilde\gamma(h_1),\tilde\gamma(h_2)\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\{\gamma(m-h_2)+\gamma(m+h_1)-\gamma(m+h_1-h_2)-\gamma(m)\}^2, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(n-h)D\{\tilde\gamma(h)\}=2(\gamma(h))^2+\sum_{m=1}^{+\infty}\{\gamma(m-h)+\gamma(m+h)-2\gamma(m)\}^2,$$

где $\gamma(h)$, $h\in\mathbf{Z}$, *– семивариограмма процесса* $X(s)$, $s\in\mathbf{Z}$, $h,h_1,h_2=0,1,\ldots,n-1$.

Доказательство. Сначала найдем выражения для моментов второго порядка оценки $\tilde\gamma(h)$, используя смешанные семиинварианты и неразложимые разбиения [5]. Имеем

$$\operatorname{cov}\{\tilde\gamma(h_1),\tilde\gamma(h_2)\}=\operatorname{cum}\{\tilde\gamma(h_1),\tilde\gamma(h_2)\}=$$

$$=\frac{1}{4(n-h_1)(n-h_2)}\sum_{s=1}^{n-h_1}\sum_{t=1}^{n-h_2}\operatorname{cum}\left\{\left(X(s+h_1)-X(s)\right)^2,\ \left(X(t+h_2)-X(t)\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{4(n-h_1)(n-h_2)}\sum_{s=1}^{n-h_1}\sum_{t=1}^{n-h_2}\Big[\operatorname{cum}\{X^2(s+h_1),\ X^2(t+h_2)\}-2\operatorname{cum}\{X^2(s+h_1),\ X(t+h_2)X(t)\}+$$

$$+\operatorname{cum}\{X^2(s+h_1),\ X^2(t)\}-2\operatorname{cum}\{X(s+h_1)X(s),\ X^2(t+h_2)\}+$$

$$+4\operatorname{cum}\{X(s+h_1)X(s),\ X(t+h_2)X(t)\}-2\operatorname{cum}\{X(s+h_1)X(s),X^2(t)\}+$$

$$+\operatorname{cum}\{X^2(s),X^2(t+h_2)\}-2\operatorname{cum}\{X^2(s),X(t+h_2)X(t)\}+\operatorname{cum}\{X^2(s),X^2(t)\}\Big].$$

Каждому слагаемому выражения в квадратных скобках можно поставить в соответствие множество $D=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. По определению неразложимого разбиения [5] с учетом $M\{X(s)\}=0$ имеют место три неразложимых разбиения множества D:

1) $D_1=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}=D$;
2) $D_1=\{(1,1),(2,1)\}$, $D_2=\{(1,2),(2,2)\}$, $D=D_1\cup D_2$;
3) $D_1=\{(1,1),(2,2)\}$, $D_2=\{(1,2),(2,1)\}$, $D=D_1\cup D_2$.

Известно [5], что гауссовское распределение обладает тем свойством, что все его семиинварианты, начиная с третьего, равны нулю. Тогда в силу [5] (теорема 2.3.2), принимая во внимание связывающее соотношение смешанных моментов со смешанными семиинвариантами [4] и стационарность рассматриваемого процесса, запишем

$$\operatorname{cum}\{\tilde\gamma(h_1),\tilde\gamma(h_2)\}=\frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)}\sum_{s=1}^{n-h_1}\sum_{t=1}^{n-h_2}\Big[R^2(s-t+h_1-h_2)-2R(s-t+h_1-h_2)R(s-t+h_1)+$$

$$+R^2\left(s-t+h_1\right)-2R\left(s-t+h_1-h_2\right)R\left(s-t-h_2\right)+R^2(s-t)+2R\left(s-t+h_1-h_2\right)R(s-t)+$$
$$+2R\left(s-t+h_1\right)R\left(s-t-h_2\right)-2R\left(s-t+h_1\right)R(s-t)+R^2\left(s-t-h_2\right)-2R\left(s-t-h_2\right)R(s-t)\Big].$$

Воспользуемся формулой связи ковариационной функции и семивариограммы стационарного в широком смысле случайного процесса [2], тогда с помощью элементарных преобразований получим

$$\operatorname{cum}\left\{\tilde{\gamma}\left(h_1\right), \tilde{\gamma}\left(h_2\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2\left(n-h_1\right)\left(n-h_2\right)}\sum_{s=1}^{n-h_1}\sum_{t=1}^{n-h_2}\left\{\gamma\left(s+h_1-t\right)+\gamma\left(s-t-h_2\right)-\gamma\left(s+h_1-t-h_2\right)-\gamma(s-t)\right\}^2. \tag{4}$$

Соотношение для дисперсии оценки семивариограммы $\tilde{\gamma}(h)$ нетрудно получить из (4), если положить $h_1 = h_2 = h$. Таким образом,

$$D\{\tilde{\gamma}(h)\}=\frac{1}{2(n-h)^2}\sum_{s,\, t=1}^{n-h}\{\gamma(s-t+h)+\gamma(s-t-h)-2\gamma(s-t)\}^2. \tag{5}$$

Дальнейшее доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 2 [6].

Следствие. *Из теоремы* 1 *вытекает, что* $\lim\limits_{n\to\infty} D\{\tilde{\gamma}(h)\}=0,\ h = 0, 1, \ldots, n-1.$

Замечание. В силу несмещенности (1) и вышеуказанного следствия получаем, что $\tilde{\gamma}(h)$ является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для семивариограммы $\gamma(h)$, $h \in \mathbf{Z}$.

Исследуем асимптотическое поведение семиинвариантов высших порядков статистики (1).

Теорема 2. *Пусть справедливо* (2). *Тогда для оценки* $\tilde{\gamma}(h)$, $h = 0, 1, \ldots, n-1$, *задаваемой равенством* (1), *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{cum}\left\{\tilde{\gamma}\left(h_1\right),\ldots, \tilde{\gamma}\left(h_p\right)\right\}=0, \tag{6}$$

где $h_j = 0, 1, \ldots, n-1,\ j=\overline{1,p},\ p > 2,\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Используя свойства смешанных семиинвариантов из [4], имеем

$$\operatorname{cum}\left\{\tilde{\gamma}\left(h_1\right),\ldots, \tilde{\gamma}\left(h_p\right)\right\}=\left[2^p\prod_{j=1}^{p}\left(n-h_j\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\sum_{s_1=1}^{n-h_1}\cdots\sum_{s_p=1}^{n-h_p}\operatorname{cum}\left\{\left(X\left(s_1+h_1\right)-X\left(s_1\right)\right)^2, \ldots,\left(X\left(s_p+h_p\right)-X\left(s_p\right)\right)^2\right\}=$$
$$=\left[2^p\prod_{j=1}^{p}\left(n-h_j\right)\right]^{-1}\sum_{s_1=1}^{n-h_1}\cdots\sum_{s_p=1}^{n-h_p}\sum_{i_1,\ldots,i_p=0}^{2} m_{i_1}\ldots m_{i_p}\times$$
$$\times\operatorname{cum}\left\{X\left(s_1+\left[\frac{i_1}{2}\right]h_1\right)X\left(s_1+\left[\frac{i_1+1}{2}\right]h_1\right),\ldots, X\left(s_p+\left[\frac{i_p}{2}\right]h_p\right)X\left(s_p+\left[\frac{i_p+1}{2}\right]h_p\right)\right\},$$

где

$$m_{i_j}=\begin{cases}1,\ i_j=0;\ 2,\\ -2,\ i_j=1,\end{cases}$$

$j=\overline{1,p},\ \left[\dfrac{i}{2}\right]$ – целая часть числа $\dfrac{i}{2}$. Тогда на основании [5] (теорема 2.3.2) запишем

$$\operatorname{cum}\left\{\tilde{\gamma}\left(h_1\right),\ldots, \tilde{\gamma}\left(h_p\right)\right\}=\left[2^p\prod_{j=1}^{p}\left(n-h_j\right)\right]^{-1}\sum_{\bigcup_{q=1}^{M}D_q=D}\ \sum_{s_1=1}^{n-h_1}\cdots\sum_{s_p=1}^{n-h_p}\sum_{i_1,\ldots,i_p=0}^{2} m_{i_1}\ldots m_{i_p}\times$$

$$\times \prod_{q=1}^{M} \operatorname{cum}\left\{ X\left(s_t + \left[\frac{i_t - 1 + r}{2} \right] h_t \right);\ (t, r) \in D_q \right\},$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям D_q множества

$$D = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \ldots, (p, 1), (p, 2)\},$$

$\operatorname{cum}\left\{ X\left(s_t + \left[\frac{i_t - 1 + r}{2} \right] h_t \right); (t, r) \in D_q \right\}$ означает смешанный семиинвариант от $X\left(s_t + \left[\frac{i_t - 1 + r}{2} \right] h_t \right)$ с индексами $(t, r) \in D_q$, $t = \overline{1, p}$, $r = \overline{1, 2}$, $\bigcup_{q=1}^{M} D_q = D$, $M = \overline{1, 2p}$.

Поскольку гауссовское распределение обладает тем свойством, что все его семиинварианты, начиная с третьего, равны нулю [5], принимая во внимание формулу связи моментов и семиинвариантов [4], учитывая тот факт, что $M\{X(s)\} = 0$, $s \in \mathbf{Z}$, запишем

$$\operatorname{cum}\left\{ \tilde{\gamma}(h_1), \ldots, \tilde{\gamma}(h_p) \right\} = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 0}^{2} I\left(i_1, \ldots, i_p\right), \tag{7}$$

$$I\left(i_1, \ldots, i_p\right) = \left[2^p \prod_{j=1}^{p} \left(n - h_j\right) \right]^{-1} \sum_{\bigcup_{q=1}^{p} D'_q = D} \sum_{s_1=1}^{n-h_1} \cdots \sum_{s_p=1}^{n-h_p} m_{i_1} \ldots m_{i_p} \times \tag{8}$$

$$\times \prod_{q=1}^{p} \operatorname{cum}\left\{ X\left(s_t + \left[\frac{i_t - 1 + r}{2} \right] h_t \right);\ (t, r) \in D'_q \right\},$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям $D'_q = \left\{ \left(t_1, r_1\right), \left(t_2, r_2\right) \right\}$ множества D, $q = \overline{1, p}$, $t_1, t_2 = \overline{1, p}$, $r_1, r_2 = \overline{1, 2}$.

Дальнейшее доказательство теоремы разобьем на две части. Сначала покажем справедливость предельного равенства (6) для семиинварианта третьего порядка оценки $\tilde{\gamma}(h)$. Затем полученные результаты перенесем на общий случай, когда $p > 3$.

Итак, положим $p = 3$. Поскольку семиинвариант – симметричная функция своих аргументов [4], рассмотрим подробно только случай $h_1 \geq h_2 \geq h_3$. Пусть $i_1 = i_2 = i_3 = 0$. Тогда (8) можно представить в виде

$$I(0, 0, 0) = \left[2^3 \prod_{j=1}^{3} \left(n - h_j\right) \right]^{-1} \sum_{\bigcup_{q=1}^{3} D'_q = D} \sum_{s_1=1}^{n-h_1} \sum_{s_2=1}^{n-h_2} \sum_{s_3=1}^{n-h_3} \prod_{q=1}^{3} \operatorname{cum}\left\{ X\left(s_t\right);\ (t, r) \in D'_q \right\}.$$

Заметим теперь, что имеют место 8 неразложимых разбиений множества $D = \bigcup_{q=1}^{3} D'_q$:

1) $D'_1 = \{(1, 1), (2, 1)\}$, $D'_2 = \{(1, 2), (3, 1)\}$, $D'_3 = \{(2, 2), (3, 2)\}$;
2) $D'_1 = \{(1, 1), (2, 1)\}$, $D'_2 = \{(1, 2), (3, 2)\}$, $D'_3 = \{(2, 2), (3, 1)\}$;
3) $D'_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $D'_2 = \{(1, 2), (3, 1)\}$, $D'_3 = \{(2, 1), (3, 2)\}$;
4) $D'_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $D'_2 = \{(1, 2), (3, 2)\}$, $D'_3 = \{(2, 1), (3, 1)\}$;
5) $D'_1 = \{(1, 1), (3, 1)\}$, $D'_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $D'_3 = \{(2, 2), (3, 2)\}$;
6) $D'_1 = \{(1, 1), (3, 1)\}$, $D'_2 = \{(1, 2), (2, 2)\}$, $D'_3 = \{(2, 1), (3, 2)\}$;
7) $D'_1 = \{(1, 1), (3, 2)\}$, $D'_2 = \{(1, 2), (2, 2)\}$, $D'_3 = \{(2, 1), (3, 1)\}$;
8) $D'_1 = \{(1, 1), (3, 2)\}$, $D'_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $D'_3 = \{(2, 2), (3, 1)\}$.

Тогда с учетом связывающего соотношения для моментов и семиинвариантов [4] и формулы связи ковариационной функции и семивариограммы стационарного случайного процесса [2] получим

$$I(0,0,0)=\left[\prod_{j=1}^{3}\left(n-h_j\right)\right]^{-1}\sum_{s_1=1}^{n-h_1}\sum_{s_2=1}^{n-h_2}\sum_{s_3=1}^{n-h_3}\operatorname{cov}\left\{X\left(s_1\right),X\left(s_2\right)\right\}\operatorname{cov}\left\{X\left(s_1\right),X\left(s_3\right)\right\}\operatorname{cov}\left\{X\left(s_2\right),X\left(s_3\right)\right\}=$$

$$=\left[\prod_{j=1}^{3}\left(n-h_j\right)\right]^{-1}\sum_{s_1=1}^{n-h_1}\sum_{s_2=1}^{n-h_2}\sum_{s_3=1}^{n-h_3}\left(R(0)-\gamma\left(s_1-s_2\right)\right)\left(R(0)-\gamma\left(s_1-s_3\right)\right)\left(R(0)-\gamma\left(s_2-s_3\right)\right).$$

Подобным образом распишем остальные слагаемые $I\left(i_1,i_2,i_3\right)$, $i_1,i_2,i_3=\overline{0,2}$, и просуммируем их. Согласно (7) имеем

$$\operatorname{cum}\left\{\tilde{\gamma}\left(h_1\right),\tilde{\gamma}\left(h_2\right),\tilde{\gamma}\left(h_3\right)\right\} = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{2} I\left(i_1,i_2,i_3\right).$$

Далее сделаем замену переменных суммирования: $s_1=r_1$, $s_1-s_2=r_2$, $s_2-s_3=r_3$, тогда после элементарных преобразований, принимая во внимание условие (2), получим требуемый результат $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{cum}\left\{\tilde{\gamma}\left(h_1\right),\tilde{\gamma}\left(h_2\right),\tilde{\gamma}\left(h_3\right)\right\}=0.$

В случае $p>3$ выражение, стоящее под знаками сумм в (8), также представляет собой произведение ковариаций. Поэтому, рассуждая аналогично случаю $p=3$, заключаем, что предельное равенство (6) имеет место.

Найдем асимптотическое распределение оценки $\tilde{\gamma}(h)$, $h=0,1,\ldots,n-1$.

Теорема 3. *При выполнении условия* (2) *оценка* $\tilde{\gamma}(h)$, *задаваемая равенством* (1), *имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием, равным* $\gamma(h)$, *и предельной ковариационной структурой, удовлетворяющей соотношению* (3).

Доказательство. Ранее показано, что $M\left\{\tilde{\gamma}(h)\right\}=\gamma(h)$, $h=0,1,\ldots,n-1$, и ковариация построенной оценки (1) семивариограммы удовлетворяет предельному равенству (3). Поскольку справедливо соотношение (6), то окончательное доказательство теоремы следует из [4] (теорема 1.2).

Результат теоремы 3 позволяет для достаточно больших n получить центральный доверительный интервал для семивариограммы $\gamma(h)$, применив нормальную аппроксимацию распределения оценки $\tilde{\gamma}(h)$. Действительно, при $n\to\infty$

$$\mathrm{P}\left\{\frac{\tilde{\gamma}(h)-\gamma(h)}{\sqrt{D\left\{\tilde{\gamma}(h)\right\}}}<z\right\}\to\Phi(z), \tag{9}$$

где $z\in\mathbf{R}$, $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона; $D\left\{\tilde{\gamma}(h)\right\}$ определена соотношением (5); $h=0,1,\ldots,n-1$. Применим метод обратной функции [7] для построения доверительного интервала и воспользуемся асимптотикой (9). Тогда при $n\to\infty$ границы $(1-\varepsilon)100$ % центрального доверительного интервала находим из уравнений

$$\frac{\tilde{\gamma}(h)-\gamma(h)}{\sqrt{D\left\{\tilde{\gamma}(h)\right\}}}=\pm\, g_{1-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где $g_\alpha=\Phi^{-1}(\alpha)$ – квантиль нормального распределения уровня α, $0<\varepsilon<0{,}5$.

Таким образом, с доверительной вероятностью $(1-\varepsilon)$ центральный доверительный интервал для неизвестной семивариограммы $\gamma(h)$ принимает вид

$$\left(\tilde{\gamma}(h)-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{D\left\{\tilde{\gamma}(h)\right\}},\ \tilde{\gamma}(h)+\Phi^{-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{D\left\{\tilde{\gamma}(h)\right\}}\right),$$

$h=0,1,\ldots,n-1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демьянов В. В., Савельева Е. А. Геостатистика: теория и практика. М., 2010.
2. Cressie N. Fitting variogram models by weighted least squares // J. Inter. Assoc. Mathematical Geology. 1985. Vol. 17. P. 563–586.
3. Цеховая Т. В. Первые два момента оценки вариограммы гауссовского случайного процесса : материалы Междунар. матем. конф. «Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры» (Брест, 5–8 окт. 2005 г.) : в 2 ч. Брест, 2005. Ч. 2. С. 78–82.
4. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Минск, 1999.
5. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М., 1980.
6. Цеховая Т. В. Асимптотическое распределение оценки вариограммы гауссовского случайного процесса : материалы Междунар. матем. конф. «Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения» (Минск, 22–25 февр. 2010 г.). Минск, 2010. С. 378–382.
7. Харин Ю. С., Зуев Н. В., Жук Е. Е. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика. Минск, 2011.

Поступила в редакцию 17.09.2014.

Татьяна Вячеславовна Цеховая – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики БГУ.

УДК 519.213.2:519.216

А. В. КУЗЬМИНА

НАХОЖДЕНИЕ МОМЕНТОВ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕМИИНВАРИАНТНОГО ПОДХОДА

Рассмотрено применение семиинвариантного подхода для нахождения моментов обобщенных гиперболических процессов Леви: гиперболического процесса, нормального обратного гауссовского процесса, дисперсионного гамма-процесса. Эти процессы используются в моделях управления риском и моделях определения стоимостей производных финансовых инструментов. Процессы Леви класса обобщенных гиперболических процессов в наибольшей мере соответствуют природе эволюции движения цен финансовых инструментов. Обобщенные гиперболические процессы Леви учитывают такие важные характеристики финансовых данных, как асимметрия, эксцесс, тяжелые хвосты. Получены выражения для математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса гиперболического процесса, нормального обратного гауссовского процесса, дисперсионного гамма-процесса.

Ключевые слова: процессы Леви; обобщенный гиперболический процесс; гиперболический процесс; нормальный обратный гауссовский процесс; дисперсионный гамма-процесс.

Generalized hyperbolic processes moments determination using cumulant method are considered at the paper. These processes are used at stock price models and risk management models. Generalized hyperbolic processes are processes which allow an almost perfect fit to financial data. These processes take into account skewness, kurtosis and heave tails of financial data. Mean, variance, skewness and kurtosis of hyperbolic process, normal inverse Gaussian process, variance gamma process are deduced.

Key words: Levy processes; generalized hyperbolic process; hyperbolic process; normal inverse Gaussian process; variance gamma process.

Обобщенные гиперболические процессы используются в моделях Леви, которые в настоящее время наиболее адекватно отражают эволюцию финансовых характеристик. Свойствам и применению этих процессов посвящены работы [1–4].

В настоящей статье рассматривается применение семиинвариантного подхода при вычислении математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса процессов Леви из семейства обобщенных гиперболических процессов. Согласно семиинвариантному подходу математическое ожидание, дисперсия, асимметрия и эксцесс случайной величины X определяются следующими выражениями соответственно:

$$\begin{gathered} EX = c_1; \\ DX = c_2; \\ SX = c_3 / c_2^{3/2}; \\ KX = 3 + c_4 / c_2^2, \end{gathered} \tag{1}$$

где $c_n = i^{-n} \left. \dfrac{\partial^n \ln \varphi_X(u)}{\partial^n (u)} \right|_{u=0}$ – семиинвариант n-го порядка случайной величины X; $n = 1, 2, \ldots, \varphi_X(u)$ – характеристическая функция случайной величины $X, u \in \mathbb{R}$.