

Пусть $A_2 = a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20}$. Используя метод малого параметра [2, 3], также было показано, что необходимо требовать $a_{24} = a_{23} = 0$.

В работах [1, 4] была изучена система (1) на предмет отсутствия подвижных многозначных особенностей для случаев $a_{22} = a_{21} = 0$, $a_{20} \neq 0$, и $a_{22} = 0$, $a_{21} \neq 0$.

Сейчас исследуется система (1) для случая

$$a_{22} \neq 0. \quad (2)$$

Лемма 2. Для того, чтобы система (1) при дополнительных условиях (2) обладала свойством Пенлеве, необходимо, чтобы она дробно-линейным преобразованием x , y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из видов:

$$x'^2 = (y + a_{13}x + a_{12})^2(x^2 + a_{21}x + a_{20}), \quad y'^2 = (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00},$$

или

$$x'^2 = (xy + a_{13}x^2 + a_{21}y + a_{12}x + a_{11})^2, \quad y'^2 = (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00}.$$

Литература

1. Пецевич В. М., Шевченя Д. Н. Аналитические свойства решений системы двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной // Весн. Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. 2015. № 1(186). С. 35–40.
2. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИ, 1939. 719 с.
3. Cosgrove C., Scoufis G. Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree // Stud. Appl. Math. 1993. V. 88. P. 25–87.
4. Пецевич В. М., Шевченя Д. Н. Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у одной системы дифференциальных уравнений специального вида // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. междунар. научн. семинара. 14–19 сентября 2015 г. Минск, Беларусь: Институт математики НАН Беларуси, 2015. С. 67.

О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

А.Ф. Проневич, П.Б. Павлючик

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
{pranevich, p.pavlyuchik}@grsu.by

Рассмотрена линейная неавтономная система уравнений в полных дифференциалах

$$dw = \sum_{j=1}^m (U_j(z)w + g_j(z)) dz_j, \quad (1)$$

где точки w и z из пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ соответственно, вектор $dw = \text{colon}(dw_1, \dots, dw_n)$, а элементы квадратных матриц $U_j: z \rightarrow U_j(z) \quad \forall z \in G$ порядка n и векторных функций $g_j: G \rightarrow \mathbb{C}^n$, $j = \overline{1, m}$, голоморфны на односвязной области $G \subset \mathbb{C}^m$.

В работе дано решение [1] задачи Дарбу о построении первых интегралов [2, 3] для трех классов линейных систем уравнений в полных дифференциалах вида (1): треугольных, диагонализующихся и систем Лапласа — Данилевского. Задача решена при условии, что дифференциальная система (1) является вполне разрешимой на области $G \times \mathbb{C}^n$, т. е. для системы (1) выполняются условия Фробениуса [4, с. 41; 5, с. 43–44].

Треугольные системы. Любая линейная вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах (1) с помощью унитарного преобразования может быть приведена [6, с. 103] к линейной верхней треугольной дифференциальной системе

$$dw_i = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\xi=i}^n u_{i\xi}^j(z) w_\xi + g_{ji}(z) \right) dz_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Построение интегрального базиса системы (2) основано на следующем утверждении.

Теорема 1. *Первыми интегралами линейной треугольной вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (2) на области $G \times \mathbb{C}^n$ будут скалярные функции*

$$W_\tau: (z, w) \rightarrow w_{n+1-\tau} \varphi_{n+1-\tau}(z) - \sum_{\xi=1}^{\tau-1} A_{\tau\xi}(z) W_\xi(z, w) - B_\tau(z), \quad \tau = \overline{1, n},$$

где функции

$$A_{\tau\xi}: z \rightarrow \int \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\tau-\xi} u_{n+1-\tau, n+1-\tau+k}^j(z) \psi_{n+1-\tau+k}(z) A_{\tau-k, \xi}(z) \right) \varphi_{n+1-\tau}(z) dz_j,$$

$$\xi = \overline{1, \tau-1}, \quad \tau = \overline{1, n},$$

$$A_{\zeta\zeta}: z \rightarrow 1, \quad \zeta = \overline{1, n-1}, \quad A_{10}: z \rightarrow 0 \quad \forall z \in G,$$

$$B_\tau: z \rightarrow \int \sum_{j=1}^m \left(g_{j, n+1-\tau}(z) + \sum_{\xi=1}^{\tau-1} u_{n+1-\tau, n+1-\tau+\xi}^j(z) \psi_{n+1-\tau+\xi}(z) B_{\tau-\xi}(z) \right) \varphi_{n+1-\tau}(z) dz_j,$$

$$\varphi_\tau: z \rightarrow \exp \left(- \int \sum_{j=1}^m u_{\tau\tau}^j(z) dz_j \right), \quad \psi_\tau: z \rightarrow \exp \int \sum_{j=1}^m u_{\tau\tau}^j(z) dz_j \quad \forall z \in G, \quad \tau = \overline{1, n}.$$

Диагонализуемые системы. Пусть у системы (1) матрицы U_j , $j = \overline{1, m}$, одновременно диагонализуемы с помощью постоянной трансформирующей матрицы [6, с. 61]. Тогда для построения базиса первых интегралов диагонализуемой системы (1) используется

Теорема 2. *Пусть $\nu \in \mathbb{C}^n$ есть общий собственный вектор матриц $V_j: z \rightarrow V_j(z)$ $\forall z \in G$, транспонированных к матрицам $U_j: z \rightarrow U_j(z)$ $\forall z \in G$ соответственно, которому соответствуют собственные функции $\lambda_j: z \rightarrow \lambda_j(z)$ $\forall z \in G$, $j = \overline{1, m}$. Тогда первым интегралом на $G \times \mathbb{C}^n$ вполне разрешимой диагонализуемой системы (1) будет функция*

$$W: (z, w) \rightarrow \nu w \exp \left(- \int \sum_{j=1}^m \lambda_j(z) dz_j \right) - \int \sum_{j=1}^m \nu g_j(z) \exp \left(- \int \sum_{j=1}^m \lambda_j(z) dz_j \right) dz_j.$$

Система Лаппо — Данилевского. Пусть у системы (1) матрицы коэффициентов

$$U_j: z \rightarrow \sum_{k=1}^{s_j} \alpha_{jk}(z) U_{jk} \quad \forall z \in G, \quad s_j \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где голоморфные функции $\alpha_{jk}: G \rightarrow \mathbb{C}$, $k = \overline{1, s_j}$, линейно независимы на области G при каждом индексе $j = \overline{1, m}$, постоянные матрицы n -го порядка U_{jk} , $k = \overline{1, s_j}$, $j = \overline{1, m}$, попарно перестановочны (случай Лаппо — Данилевского [5, с. 63]). Тогда, например, для линейной однородной ($g_j(z) \equiv 0$, $j = \overline{1, m}$) системы Лаппо — Данилевского (1) имеет место

Теорема 3. Пусть выполняются условия:

- 1) ν^0 — общий собственный вектор матриц V_{jk} , транспонированных к матрицам U_{jk} , которому соответствуют собственные числа λ_{jk} , $k = \overline{1, s_j}$, $j = \overline{1, m}$;
- 2) ν^l , $l = \overline{1, \kappa - 1}$, — присоединенные векторы матрицы $V_{\xi\zeta}$, соответствующие собственному числу $\lambda_{\xi\zeta}$, $\zeta \in \{1, \dots, s_\xi\}$, $\xi \in \{1, \dots, m\}$, геометрической кратности $\kappa \geq 2$;
- 3) обыкновенная дифференциальная система $dw/dz = U_{\xi\zeta}w$ не имеет первых интегралов

$$W_{jkl}: w \rightarrow \mathfrak{x}_{jk}\Psi_l(w) \quad \forall w \in \Omega, \quad l = \overline{1, \kappa - 1}, \quad k = \overline{1, s_j}, \quad j = \overline{1, m} \quad (k \neq \zeta \text{ при } j = \xi).$$

Тогда первыми интегралами вполне разрешимой линейной однородной дифференциальной системы (1) при условии (3) будут функции

$$W_l: (z, w) \rightarrow \Psi_l(w) - \int \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{s_j} \mu_{jkl} \alpha_{jk}(z) dz_j \quad \forall (z, w) \in G \times \Omega, \quad l = \overline{1, \kappa - 1},$$

где операторы $\mathfrak{x}_{jk}(w) = U_{jk}w \partial_w \quad \forall w \in \mathbb{C}^n$, числа $\mu_{jkl} = \mathfrak{x}_{jk}\Psi_l(w)$, $k = \overline{1, s_j}$, $j = \overline{1, m}$, а функции $\Psi_l: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ находятся из функциональной системы

$$\nu^l w = \sum_{\delta=1}^l \binom{l-1}{\delta-1} \Psi_\delta(w) \nu^{l-\delta} w \quad \forall w \in \Omega, \quad l = \overline{1, \kappa - 1}, \quad \Omega \subset \{w: \nu^0 w \neq 0\}.$$

Работа поддержана БРФФИ, грант Ф11М-206.

Литература

1. Проневич А. Ф., Павлючик П. Б. Об интегралах линейных неавтономных многомерных дифференциальных систем, интегрируемых в замкнутой форме // Проблемы физики, математики и техники. 2015. № 2 (23). С. 65–71.
2. Darboux G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1878. Vol. 2. P. 60–96, 123–144, 151–200.
3. Горбузов В. Н. Интегралы дифференциальных систем. Гродно: ГрГУ, 2006.
4. Амелькин В. В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2003.
5. Гайшун, И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. Хорн Р. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

О МЕТОДЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Н.Я. Радыно

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Предлагается подход к решению уравнения Риккати в терминах непрерывных дробей. Рассматриваемый подход основан на идеях Л. Эйлера [1] и А. А. Маркова [2].

Задача, о которой идет речь, состоит в следующем. Некоторая непрерывная дробь, представляет решение задачи Коши

$$z' = \frac{az - z^2 + x^2}{ax}, \quad z(0) = a,$$

где a — вещественное число. Требуется указать простой алгоритм вычисления элементов этой непрерывной дроби.