Литература

1. Кулеш Е. Е., Мартынов И. П., Пецевич В. М. *Об одном классе дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка третьей степени однородности* // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. 2010. № 1(2). С. 36–41.
2. Здунек А. Г., Мартынов И. П., Пронько В. А. *О рациональных решениях дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. 2000. № 3. С. 33–39.

О НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИКХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Е.С. Лысюк, И.П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
elysiuk@gmail.com, i.martynov@grsu.by

Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными пятого порядка

$$y_{xxxxt} = 2yy_{xxxt} - ay_t y_{xxx} - (20-a)y_x y_{xxt} + 20y_{xx}y_{xt}, \quad a \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Положим

$$y = u(\phi), \quad \phi = \phi(x,t), \quad \phi_x = 1. \tag{2}$$

Тогда из (1) получим

$$u_{xxxxx} = 2uu_{xxxx} - 20u_x uxxx + 20u_{xx}^2. \tag{3}$$

В [1] установлено, что уравнение (3) имеет подвижную особую линию.

Для уравнения (3) доказаны

Лемма 1. *Ряд Дирихле*

$$u = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \gamma^k e^{-k\phi} \tag{4}$$

представляет решение уравнения (3) *в области* $\operatorname{Re}\phi > \sigma$. *Здесь* γ *— произвольная постоянная,* $\alpha_1 = 1$, *остальные коэффициенты* α_k, $k = 2, 3, 4, \ldots$, *определяются единственным образом по рекуррентной формуле,* σ *— абсцисса абсолютной сходимости ряда* (4).

Лемма 2. *Уравнение* (3) *инвариантно при преобразовании переменных*

$$u(\phi) = f'(\phi)w(z) + 15\mu(\phi), \quad z = f(\phi),$$

где f *— дробно-линейная функция от* ϕ, *причем* $f'' = 2f'\mu$, $\mu' = \mu^2$.

С учетом (2) и лемм 1, 2, полагая $f(\phi) = h/\phi - \ln A$, заключаем, что справедлива

Теорема. *Ряд*

$$y = -\frac{15}{\phi} + \frac{h}{2\phi^2} - \frac{h}{\phi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-kh/\phi}, \tag{5}$$

представляет решение уравнения (1) *в области* $\operatorname{Re}(h/\phi) > \eta$. *Здесь* ϕ, h, θ *— произвольные функции от* t, $\alpha_1 = 1$, *остальные коэффициенты* α_k, $k = 2, 3, 4, \ldots$, *определяются единственным образом по рекуррентной формуле,* $\eta = \sigma + \ln|A|$. *При этом особое многообразие* $\phi = 0$ *является существенно особым для компонент ряда* (5).

Замечание 1. Уравнение (1) имеет рациональное относительно ϕ решение

$$y = -\frac{15}{\phi} - \frac{h_1}{\phi^2} - \frac{h_2}{\phi^3},$$

где h_1, h_2 — произвольные постоянные.

Замечание 2. Если $a = 4$, рациональное относительно ϕ решение уравнения (1) имеет вид

$$y = -\frac{15}{\phi} - \frac{h_1(t)}{\phi^2} - \frac{h_2}{\phi^3},$$

где $h_1(t)$ — произвольная функция, h_2 — произвольная постоянная.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф14М–148).

Литература

1. Ванькова Т. Н., Мартынов И. П. *Об одном обобщении уравнения Шази с подвижной особой линией* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1085–1094.

КЛАССЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАКСИМАЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ

В.С. Немец

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
nemets@grsu.by

Истоки структурного метода следует искать в работе [1], где указывалась структура полиномиальных решений уравнения Риккати и указывались условия, когда все полиномы указанной структуры будут решениями одного и того же уравнения. Дальнейшие исследования в этом нправлении проводились различными учеными по линии применения этого метода к более общему классу уравнений. В работах [2, 3] разработан структурный метод построения полиномиальных решений для алгебраического диференциального уравнения общего вида

$$\sum_{i=1}^{N} B_i(z) \prod_{k=1}^{s_i} \{w^{(l_{ki})}\}^{\nu_{ki}} = 0, \tag{1}$$

где l_{ki} и ν_{ki} $(k = 1, 2, \ldots, s_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, N)$ — целые неотрицательные числа, функция $B_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ является полиномом комплексного переменного z. Все это систематизировано и изложено в монографии [4].

В дальнейшем была исследована взможность применения структурного метода к нахождению рациональных решений. Для алгебраического дифференциального уравнения общего вида (1) эти исследования изложенны в [5], где при различных возможных группировках членов уравнения (1) указывались возможные структуры рациональных решений. В частности, часто в качестве структуры рационального решения получалась рациональныая функция

$$w(z) = \varepsilon_t \frac{P(z)}{Q(z)} + \frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)}, \quad t = 1, 2, \ldots, \delta, \quad \delta \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где P, Q, $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ — полиномы косплексного переменного z, $\varepsilon_t = \varepsilon^t$ — корни уравнения $\varepsilon^\delta = 1$, $\delta \in \mathbb{N}$. Следует отметить что как правило полиномы P, Q вполне конкретно определяются видом уравнения (1), а полиномы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ имеют некоторый произвол.

Найдем условия, когда все рациональные функции (2) будут решениями уравнения (1). Доказывается следующая

Теорема. *Для того, чтобы все рациональные функции из семейства* (2) *были решениями алгебраического дифференциального уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы рациональные функции* $P(z)/Q(z)$ *и* $\mathfrak{P}(z)/\mathfrak{Q}(z)$ *удовлетворяли системе тождеств*

$$\sum_{i=1}^{N} B_i(z) \sum_{\tau_1=0}^{\gamma_1(\lambda)} \sum_{\tau_2=0}^{\gamma_2(\lambda)} \cdots \sum_{\tau_{s_i}=0}^{\gamma_{s_i}(\lambda)} \prod_{k=1}^{s_i} \binom{\nu_{ki}}{\lambda\chi_{k\tau_k}} \left\{ \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{(l_{ki})} \right\}^{\nu_{ki}-\lambda\chi_{k\tau_k}} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)}\right)^{(l_{ki})} \right\}^{\lambda\chi_{k\tau_k}} \equiv 0, \tag{3}$$