Литература

1. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. *Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений.* М.: Наука, 1980.
2. Кашевский В. В. *Оценка модуля непрерывности сингулярного интеграла с логарифмической особенностью* // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49. № 5. С. 8–13.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Е.Е. Кулеш

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
kulesh@grsu.by

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_{xxxxx} - 30uu_{xxx} - 30u_xu_{xx} + 180u_x^2 = u_t + F,$$

$$F = Au_{xxxx} + Bu_{xxx} + Cuu_{xx} + Du_{xx} + Eu_x^2 + Guu_x + Hu_x + Iu^3 + Ku^2 + Lu, \qquad (1)$$

где $u = u(x,t)$, $A, B, \ldots, L$ — аналитические функции от x, t. Исследуем его на наличие свойства Пенлеве [1].

Чтобы уравнение (1) имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы упрощенное для него уравнение

$$u_{xxxxx} - 30uu_{xxx} - 30u_xu_{xx} + 180u_x^2 = u_t \qquad (2)$$

обладало указанным свойством. Будем искать решение уравнения (2) в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\varphi^{k-2}, \qquad (3)$$

где $\varphi = \varphi(x,t)$, $\varphi_x = 1$, $u_k = u_k(t)$. Определим резонансную структуру уравнения (2): $u_0 = 1$, $r = -1, 2, 3, 6, 10$; $u_0 = 2$, $r = -1, -2, 5, 6, 12$. Подставляя ряд (3) при $u_0 = 1$ в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ, найдем

$$u_1 = 0, \quad u_4 = -\frac{\varphi_t}{60} + 3u_2^2, \quad u_5 = 2u_2u_3, \quad u_7 = -\frac{u_3\varphi_t}{80} + 3u_2^2u_3 - \frac{u_{2t}}{480},$$

$$u_8 = u_2u_3^2 + 3u_2^4 - \frac{u_{3t}}{1080} + \frac{\varphi_t^2}{10800} - \frac{u_2^2\varphi_t}{30}, \quad u_9 = -\frac{3u_2u_3\varphi_t}{140} + \frac{24u_2^3u_3}{7} - \frac{u_2u_{2t}}{280} + \frac{u_3^3}{7} + \frac{\varphi_{tt}}{75600}. \qquad (4)$$

Остальные коэффициенты определяются реруррентными формулами

$$(k-3)(k+1)(k+4)(k+5)(k+8)u_{k+7} = 360(k+1)u_0u_1u_{k+6} - (30k^3+240k^2+630k-420)u_1u_{k+6} +$$
$$+180((k+1)u_1^2 + (2k+5)u_0u_2)u_{k+5} + 180(2k+3)(u_0u_3 + u_1u_2)u_{k+4} - 180(u_0u_4 + u_1u_3)u_{k+3} -$$
$$-(k+1)u_{k+3}\varphi_t - (u_{k+2})_t - \sum_{s=0}^{k}\Big(30(s+1)(k-s+1)(k-s+2)u_{s+3}u_{k-s+4} + 30(k-s+1)(k-s+2)\times$$
$$\times(k-s+3)u_{s+2}u_{k-s+5} + 360u_0u_{s+2}u_{k-s+5} + 180u_1u_{s+2}u_{k-s+4} - 360(s+1)u_0u_{s+3}u_{k-s+4} -$$
$$-360(s+1)u_1u_{s+3}u_{k-s+3} - \sum_{l=0}^{s}180(k-s+1)u_{l+2}u_{s-l+2}u_{k-s+3}\Big), \quad k = 4, 5, \ldots \qquad (5)$$

Можно показать, резонансные условия с учетом (4) выполняются, значит коэффициенты u_2, u_3, u_6, u_{10} и функция φ_t действительно являются произвольными независимыми функциями от t. При $u_0 = 2$ произвольность резонансных коэффициентов u_5, u_6, u_{12} проверяется аналогично.

Далее будем искать решение уравнения (2) в виде ряда (3), где $\varphi = \varphi(x,t)$, $\varphi_x \neq 1$, $u_k = u_k(x,t)$. Первый коэффициент принимает значения $u_0 = \varphi_x^2$ или $u_0 = 2\varphi_x^2$. При $u_0 = \varphi_x^2$ найдем коэффициенты ряда:

$$u_1 = -\varphi_{xx}, \quad u_4 = -\frac{1}{60\varphi_x^4}(6\varphi_x\varphi_{xxxxx} - 15\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} + 10\varphi_{xxx}^2 - \varphi_x\varphi_t - 120\varphi_x\varphi_{xxx}u_2 + 90\varphi_{xx}^2u_2 + 180\varphi_x^2u_2^2 - 30\varphi_x^2(u_2)_{xx} - 30\varphi_x^2\varphi_{xx}u_3 - 60\varphi_x^3(u_3)_x), \ldots$$

Можно показать, что все резонансные условия выполнены и резонансные коэффициенты произвольны.

Теорема 1. *Для уравнения* (2) *выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве.*

Введем теперь ограничения на коэффициенты ряда (3) и функцию φ . Пусть $u_2 = u_3 = u_6 = u_{10} = 0$. Функцию φ выберем таким образом, чтобы коэффициенты u_4, u_5, u_7, u_8, u_9 были равны нулю. Тогда все остальные коэфициенты таже будут равны нулю, и ряд (3) примет вид $u = \varphi_x^2/\varphi^2 - \varphi_{xx}/\varphi$.

Теорема 2. *Если функция* φ *удовлетворяет условиям* $\varphi_{xxxxx}\varphi_x - 3\varphi_{xxxx}\varphi_{xx} + 2\varphi_{xxx}^2 = 0$, $\varphi_{xxxxx} = \varphi_t$, *то функция* $u = \varphi_x^2/\varphi^2 - \varphi_{xx}/\varphi$ *является решением уравнения* (2).

Далее применим метод резонансов к уравнению (1). Подберем коэффициенты так, чтобы для уравнения (1) было выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве.

Теорема 3. *Для того, чтобы для уравнения* (1) *было выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве, необходимо, чтобы оно имело вид*

$$u_{xxxxx} - 30u_xu_{xx} - 30uu_{xxx} + 180u_x^2 = u_t - (\alpha x + \beta)u_x - 2\alpha u, \tag{6}$$

где $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$.

Найдем рациональные решения уравнения (6), отвечающие отрицательному резонансу $r = -2$ согласно методике, описанной в [2].

Теорема 4. *Уравнение* (6) *имеет решение* $u = 2/\varphi^4$, *где* $\varphi = x + \gamma(t)$, $\alpha\gamma - \gamma_t - \beta = 0$.

Теорема 5. *Уравнение* (6) *при* $\alpha = 0$ *имеет решение* $u = 2(\varphi^2 + h)/(\varphi^2 - h)^2$, *где* $h = h(t)$, $\varphi = x + \gamma(t)$, $\gamma_t = -\beta$.

Отметим, что ряд (3) с коэффициентами (4), (5) представляет лишь формальное решение уравнения (2). Докажем его сходимость. Пусть T_1 — область голоморфности коэффициентов u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Выберем δ так, чтобы выполнялись условия

$$\gamma < \frac{1}{4\delta}, \quad |u_k| \leqslant \frac{\delta^k}{4}, \quad k = 2, 3, 6, 10, \tag{7}$$

при всех $t \in T \subset T_1$, где T — замкнутый круг радиуса ρ, причем $\rho \geqslant 1/\delta^5$. Учитывая, что при этом $|\varphi_t| \leqslant \delta^4/4$, из (4) получим $|u_k| \leqslant \delta^k/4$, $k = \overline{2, 10}$.

Методом математической индукции, используя (5), можно показать, что тогда $|u_k| \leqslant \delta^k/4$, $\forall k = 2, 3, \ldots$ Пусть

$$|\varphi| = |x + \gamma| \leqslant |x| + |\gamma| < \sigma + \frac{1}{4\delta} < M.$$

Тогда для ряда $\sum_{k=0}^{\infty} u_{k+2}\varphi^k$ можно построить мажорантный ряд $(\delta^2/4)\sum_{k=0}^{\infty}(\delta M)^k$ который сходится при $M < \delta^{-1}$.

Теорема 6. *Ряд* (3) *с коэффициентами* (4), (5) *сходится при* $0 \neq |\varphi| < M < \delta^{-1}$, *где* δ *определяется условиями* (7), $|x| < \sigma$, $\sigma + 1/(4\delta) < M$, *а значит является решением уравнения* (2) *в указанной области.*

Литература

1. Кулеш Е. Е., Мартынов И. П., Пецевич В. М. *Об одном классе дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка третьей степени однородности* // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. 2010. № 1(2). С. 36–41.

2. Здунек А. Г., Мартынов И. П., Пронько В. А. *О рациональных решениях дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. 2000. № 3. С. 33–39.

О НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИКХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Е.С. Лысюк, И.П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
elysiuk@gmail.com, i.martynov@grsu.by

Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными пятого порядка

$$y_{xxxxt} = 2yy_{xxxt} - ay_t y_{xxx} - (20-a)y_x y_{xxt} + 20y_{xx}y_{xt}, \quad a \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Положим

$$y = u(\phi), \quad \phi = \phi(x,t), \quad \phi_x = 1. \tag{2}$$

Тогда из (1) получим

$$u_{xxxxx} = 2uu_{xxxx} - 20u_x uxxx + 20u_{xx}^2. \tag{3}$$

В [1] установлено, что уравнение (3) имеет подвижную особую линию.

Для уравнения (3) доказаны

Лемма 1. *Ряд Дирихле*

$$u = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \gamma^k e^{-k\phi} \tag{4}$$

представляет решение уравнения (3) *в области* $\operatorname{Re}\phi > \sigma$. *Здесь* γ *— произвольная постоянная,* $\alpha_1 = 1$, *остальные коэффициенты* α_k, $k = 2, 3, 4, \ldots$, *определяются единственным образом по рекуррентной формуле,* σ *— абсцисса абсолютной сходимости ряда* (4).

Лемма 2. *Уравнение* (3) *инвариантно при преобразовании переменных*

$$u(\phi) = f'(\phi)w(z) + 15\mu(\phi), \quad z = f(\phi),$$

где f *— дробно-линейная функция от* ϕ, *причем* $f'' = 2f'\mu$, $\mu' = \mu^2$.

С учетом (2) и лемм 1, 2, полагая $f(\phi) = h/\phi - \ln A$, заключаем, что справедлива

Теорема. *Ряд*

$$y = -\frac{15}{\phi} + \frac{h}{2\phi^2} - \frac{h}{\phi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-kh/\phi}, \tag{5}$$

представляет решение уравнения (1) *в области* $\operatorname{Re}(h/\phi) > \eta$. *Здесь* ϕ, h, θ *— произвольные функции от* t, $\alpha_1 = 1$, *остальные коэффициенты* α_k, $k = 2, 3, 4, \ldots$, *определяются единственным образом по рекуррентной формуле,* $\eta = \sigma + \ln|A|$. *При этом особое многообразие* $\phi = 0$ *является существенно особым для компонент ряда* (5).

Замечание 1. Уравнение (1) имеет рациональное относительно ϕ решение

$$y = -\frac{15}{\phi} - \frac{h_1}{\phi^2} - \frac{h_2}{\phi^3},$$

где h_1, h_2 — произвольные постоянные.