СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В КЛАССАХ $H(\omega)$

В.В. Кашевский

Белгосуниверситет, физический факультет, Минск, Беларусь
kashev@bsu.by

Нам понадобятся следующие определения [1].

Определение 1. Функция $\omega(\sigma)$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant \alpha)$ называется модулем непрерывности, если:
1) $\omega(0) = 0$;
2) $\omega(\sigma)$ является неубывающей функцией;
3) $\omega(\sigma_1 + \sigma_2) \leqslant \omega(\sigma_1) + \omega(\sigma_2)$.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leqslant \sigma \\ a \leqslant x_1, x_2 \leqslant b}} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega(f, \sigma)$$

называется модулем непрерывности функции $f(x)$.

Определение 3. Будем писать $\omega(\sigma) \in \Phi$, если:
1) $\omega(\sigma)$ является модулем непрерывности;
2) $\sigma \int_0^\alpha t^{-1}(t + \sigma)^{-1}\omega(t)\, dt \leqslant C\omega(\sigma)$;
3) $\omega'(\sigma) \sim \omega(\sigma)/\sigma$.

Пусть задана функция $K : D \to \mathbb{R}$, где $D = \{(x, t) : a < x < b, \ \ a < t < b\}$. Для этой функции определим следующие частные модули непрерывности:

$$\omega(K, \delta, 0) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leqslant \delta \\ a \leqslant x_1, x_2 \leqslant b \\ t \in [a,b]}} |K(x_1, t) - K(x_2, t)|, \quad \omega(K, 0, \delta) = \sup_{\substack{|t_1 - t_2| \leqslant \delta \\ a \leqslant t_1, t_2 \leqslant b \\ x \in [a,b]}} |K(x, t_1) - K(x, t_2)|.$$

Определение 4. Будем писать $f(x) \in H(\omega)$, если

$$\sup_{0 \leqslant \sigma \leqslant b - a} \frac{\omega(f, \sigma)}{\omega(\sigma)} = H_\omega(f) < \infty.$$

Отметим, что $H(\omega)$ будет банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H(\omega)} = \|f\|_{C[a,b]} + H_\omega(f).$$

Рассмотрим сингулярный оператор

$$Su = \int_0^1 K(x, t) \frac{\ln|t - x|}{t - x} u(t)\, dt.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Если $\omega(\sigma)$, $\omega(\sigma)\ln(e/t) \in \Phi$ и выполняются условия:*

$$\sup_{\delta \in [0, 1/2]} \frac{\omega(K, \delta, 0) \ln^2(1/\delta)}{\omega(\delta)} = a_1, \quad \sup_{\delta \in [0, 1/2]} \frac{1}{\omega(\delta)} \int_0^\delta \frac{\omega(K, 0, \delta)}{t} \ln\frac{e}{t}\, dt = a_2,$$

$$\sup_{\delta \in [0, 1/2]} \frac{\delta}{\omega(\delta)} \int_0^{1/2} \frac{\omega(K, 0, t)}{t^2} \ln\frac{e}{t}\, dt = a_3, \quad K(0, 0) = K(1, 1) = 0,$$

то оператор S действует из пространства $H(\omega)$ в пространство $H(\omega)$ ограниченно.

Доказательство теоремы основано на идеях и результатах из [1, 2].

Литература

1. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. *Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений.* М.: Наука, 1980.
2. Кашевский В. В. *Оценка модуля непрерывности сингулярного интеграла с логарифмической особенностью* // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49. № 5. С. 8–13.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Е.Е. Кулеш

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
kulesh@grsu.by

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_{xxxxx}-30uu_{xxx}-30u_xu_{xx}+180u_x^2=u_t+F,$$

$$F=Au_{xxxx}+Bu_{xxx}+Cuu_{xx}+Du_{xx}+Eu_x^2+Guu_x+Hu_x+Iu^3+Ku^2+Lu, \qquad (1)$$

где $u=u(x,t)$, $A,B,\ldots,L$ — аналитические функции от x,t. Исследуем его на наличие свойства Пенлеве [1].

Чтобы уравнение (1) имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы упрощенное для него уравнение

$$u_{xxxxx}-30uu_{xxx}-30u_xu_{xx}+180u_x^2=u_t \qquad (2)$$

обладало указанным свойством. Будем искать решение уравнения (2) в виде ряда

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\varphi^{k-2}, \qquad (3)$$

где $\varphi=\varphi(x,t)$, $\varphi_x=1$, $u_k=u_k(t)$. Определим резонансную структуру уравнения (2): $u_0=1$, $r=-1,2,3,6,10$; $u_0=2$, $r=-1,-2,5,6,12$. Подставляя ряд (3) при $u_0=1$ в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ, найдем

$$u_1=0,\quad u_4=-\frac{\varphi_t}{60}+3u_2^2,\quad u_5=2u_2u_3,\quad u_7=-\frac{u_3\varphi_t}{80}+3u_2^2u_3-\frac{u_{2t}}{480},$$

$$u_8=u_2u_3^2+3u_2^4-\frac{u_{3t}}{1080}+\frac{\varphi_t^2}{10800}-\frac{u_2^2\varphi_t}{30},\quad u_9=-\frac{3u_2u_3\varphi_t}{140}+\frac{24u_2^3u_3}{7}-\frac{u_2u_{2t}}{280}+\frac{u_3^3}{7}+\frac{\varphi_{tt}}{75600}. \qquad (4)$$

Остальные коэффициенты определяются реруррентными формулами

$$(k-3)(k+1)(k+4)(k+5)(k+8)u_{k+7}=360(k+1)u_0u_1u_{k+6}-(30k^3+240k^2+630k-420)u_1u_{k+6}+$$
$$+180((k+1)u_1^2+(2k+5)u_0u_2)u_{k+5}+180(2k+3)(u_0u_3+u_1u_2)u_{k+4}-180(u_0u_4+u_1u_3)u_{k+3}-$$
$$-(k+1)u_{k+3}\varphi_t-(u_{k+2})_t-\sum_{s=0}^{k}\Bigl(30(s+1)(k-s+1)(k-s+2)u_{s+3}u_{k-s+4}+30(k-s+1)(k-s+2)\times$$
$$\times(k-s+3)u_{s+2}u_{k-s+5}+360u_0u_{s+2}u_{k-s+5}+180u_1u_{s+2}u_{k-s+4}-360(s+1)u_0u_{s+3}u_{k-s+4}-$$
$$-360(s+1)u_1u_{s+3}u_{k-s+3}-\sum_{l=0}^{s}180(k-s+1)u_{l+2}u_{s-l+2}u_{k-s+3}\Bigr),\quad k=4,5,\ldots \qquad (5)$$