О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В.И. Громак

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
vgromak@gmail.com

В настоящее время существуют различные подходы к построению дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве. Это прежде всего метод изомонодромной деформации линейных систем, метод аффинных симметрий, непосредственное построение аналогов уравнений Пенлеве из гамильтоновых систем. Однако, по-видимому, первым был метод построения высших аналогов уравнений Пенлеве на основе симметрийных редукций из иерархии уравнений Кортевега — де Фриза (KdV) (см., например, [1–4]).

В настоящей работе рассматривается свойства решений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве

$$ {}_{2n}\widetilde{P}_2 \equiv (D_z + 2w)\widetilde{L}_n[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \tag{1}$$

где оператор $\widetilde{L}$ определяется рекуррентным соотношением

$$\widetilde{L}_{n+1} = D_z^{-1}((D_z^3 + (4u + \beta_n)D_z + 2u_z)\widetilde{L}_n), \quad \widetilde{L}_1[u] = u, \quad D_z = \frac{d}{dz},$$

а α и β_n — параметры. Первый и второй члены обобщенной иерархии, т. е. уравнения ${}_2\widetilde{P}_2$, ${}_4\widetilde{P}_2$ есть соответственно второе уравнение Пенлеве

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha,$$

и второе уравнение Пенлеве четвертого порядка

$$w^{(4)} = 10w^2w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - \beta_1(w'' - 2w^3) + zw + \alpha.$$

При $n > 1$ в (1) имеем обобщение известной иерархии $({}_{2n}P_2)$, которая является симметрийной редукций из иерархии уравнений Кортевега — де Фриза (KdV) и получается из (1) при $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-1} = 0$, т. е. $({}_{2n}\widetilde{P}_2) \supseteq ({}_{2n}P_2)$. Аналогично, уравнение

$${}_{2n}\widetilde{P}_1 \equiv \widetilde{L}_{n+1}[y] - \frac{z}{2} = 0$$

относительно $y(z)$ определяет обобщение иерархии первого уравнения Пенлеве $({}_{2n}P_1)$ и $({}_{2n}\widetilde{P}_1) \supseteq ({}_{2n}P_1)$.

Известно, что рациональные решения второго уравнения Пенлеве выражаются через логарифмическую производную некоторых полиномов, называемых полиномами Воробьева — Яблонского, которые достаточно хорошо изучены [4]. В настоящей работе рассмотрим некоторые свойства решений уравнений $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ и $({}_{2n}\widetilde{P}_1)$. Заметим, что уравнение $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ имеет дискретную симметрию $S : (w, \alpha) \to (-w, -\alpha)$. Преобразования Беклунда для обобщенной иерархии определяется следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть* $w = w(z, \alpha, \beta)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})$, *есть решение уравнения* $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$. *Тогда преобразования*

$$T : w \to \widetilde{w} = -w + (2\alpha + 1)/(2\widetilde{L}_n[-w' - w^2] - z),$$

$$T^{-1} : \widetilde{w} \to w = -\widetilde{w} + (2\widetilde{\alpha} - 1)/(2\widetilde{L}_n[\widetilde{w}' - \widetilde{w}^2] - z)$$

определяют решения уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ *при* $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = (\alpha + 1, \beta)$.

Уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_1)$, $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ имеют такие же доминантные члены, что и соответственно уравнения $({}_{2n}P_1)$, $({}_{2n}P_2)$. В силу этого порядок подвижных полюсов уравнений $({}_{2n}\widetilde{P}_1)$ и $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ равен соответственно 2 и 1. Уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_1)$ и $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ имеют гамильтонову структуру с полиномиальным гамильтонианом. Для уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ могут быть построены автопреобразования Беклунда вида $T^{\alpha}ST^{-\alpha}:\ w(z,\alpha,\beta,\gamma))\to\tilde{w}(z,\alpha,\beta,\gamma)$ для целых α. При этом возникает вопрос о характере решений $w(z,\alpha,\beta)$ и $\tilde{w}(z,\alpha,\beta,)$. Например, $w(z,\alpha,\beta)\equiv$ $\equiv\tilde{w}(z,\alpha,\beta)$, $\alpha\in\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $w(z,\alpha,\beta)$ — рациональное решение. Относительно рациональных решений уравнения $({}_{2n}P_2)$ доказана

Теорема 2. [5] *Для существования рациональных решений уравнения $({}_{2n}P_2)$ необходимо и достаточно, чтобы $\alpha\in\mathbb{Z}$. При выполнении условия $\alpha\in\mathbb{Z}$ рациональное решение единственное и имеет вид*

$$w(z)=\frac{P_{m-1}(z)}{Q_m(z)},$$

где $P_{m-1}(z)$ и $Q_m(z)$ — полиномы степени $m-1$ и m соответственно.

В настоящей работе мы доказываем справедливость аналогичного результата для уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$. Заметим, что рациональные решения уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ могут быть получены из тривиального решения $w(z)=0$ при помощи кратного применения преобразований Беклунда и дискретной симметрии. Рациональные решения могут быть представлены в виде

$$w(z;\alpha,\beta)=\frac{d}{dz}\left\{\ln\left[\frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)}\right]\right\},$$

где $Q_n(z)$ — полиномы, обобщающие полиномы Яблонского для второго уравнения Пенлеве. В частности, для второго уравнения Пенлеве при $\alpha=n$

$$Q_{n+1}Q_{n-1}=zQ_n^2-4[Q_nQ_n''-(Q_n'),\quad Q_0(z)=1,\quad Q_1(z)=z.$$

Для полиномов Q_n, определяющих рациональные решения уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$, получены аналогичные рекуррентные соотношения, выраженные через операторы Хироты. Также мы изучаем характер полюсов рациональных решений уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$. В частности, найдены аналитические формулы для определения числа полюсов $m=m(\alpha,\beta)$ с различными возможными вычетами, выраженные через параметры исходных уравнений обобщенной иерархии $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$.

Работа выполнена при частичной поддержке 7 Европейской рамочной программы по развитию научных исследований и технологий «Динамические системы и их приложения», грант FP7–PEOPLE–2012–IRSES–316338.

Литература

1. Airault H. *Rational Solutions of Painlevé equations* // Stud. Appl. Math. 1979. Vol. 61. P. 31–53.

2. Kudrushov V. *The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them*//Physics Letters, 1997. Vol. A 224. P. 353–360.

3. Gromak V., Laine I. and Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane*, Berlin; New York: Wolter De Gruyter. V. 28, 2002.

4. Clarkson P. A.,Mansfield E. L. *The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials* // Nonlinearity, 2003. Vol.16, P. R1–R26.

5. Gromak V. I. *The Backlund transformations of the higher order Painleve Equations* // Backlund and Darboux transformations. The geometry of solitons, CRM Proc.(Lecture Notes, Series vol. 29) ed A. Coley et al (Providence, RI: American Mathematical Society), 2001. P. 3–28.