

Следствие. Уравнения $K(u) = 0$ и $M(\omega) = 0$ связаны между собой преобразованием Бэклунда $\omega_x = -\omega^2 + u$, $2u\omega^2 + u_{xx} = 2u^2 + 2u_x\omega - \omega_t$ (см. [1, с. 180; 2, с. 26]). Уравнения $K(q) = 0$ и $M(\omega) = 0$ связаны между собой преобразованием Бэклунда $\omega_x = -\omega^2 + q$, $2q\omega^2 + q_{xx} = 2q^2 + 2q_x\omega - \omega_t$. Уравнения $K(q) = 0$ и $M(\mu) = 0$ связаны между собой преобразованием Бэклунда $\mu_x = -\mu^2 + q$, $2q\mu^2 + q_{xx} = 2q^2 + 2q_x\mu - \mu_t$.

Теорема 6. Справедливо равенство $K(z) + 2(M(\omega))_x = 6(uz)_x$, где $z = (q - p)/3 - \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi^k$.

Пусть $\omega = w_x/w$, где ω — решение уравнения $M(\omega) = 0$. Тогда $w_{xx} = uw$ и справедлива

Теорема 7. Имеет место равенство

$$K(u) = (L(w))_{xx} + 2 \frac{w_x}{w} (L(w))_x.$$

Пусть функция $w = w(x, t)$ такова, что $\omega = w_x/w$, $\omega_x = -\omega^2 + u$, u — решение уравнения (1). Тогда получим

$$w_{xx} = uw. \quad (6)$$

Теорема 8. Общее решение дифференциального уравнения (6), где функция u — решение уравнения $K(u) = 0$, не содержит логарифма и имеет вид

$$w = A \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi^{k+2} + B \sum_{k=0}^{\infty} b_k \phi^{k-1}, \quad A = A(t), \quad B = B(t), \quad a_k = a_k(t), \quad b_k = b_k(t),$$

коэффициенты a_k , b_k получены по рекуррентным формулам

$$(k+2)(k+5)a_{k+2} = \sum_{m=0}^k u_m a_{k-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(k-1)(k+2)b_{k+2} = \sum_{m=0}^k u_m a_{k-m}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Литература

1. Абловиц М., Сегур Х. *Солитоны и метод обратной задачи*. М.: Мир, 1987. 479 с.
2. Conte R. *Invariant Painlevé analysis of partial differential equations* // Phys. Lett. 1989. V. 140, no. 7–8. P. 383–390.

О ПОСТРОЕНИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

А.А. Григорьев

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
agrig@tut.by

Наряду с шестью уравнениями Пенлеве второго порядка, в настоящее время широкое распространение имеют уравнения высших порядков, для которых наличие свойства Пенлеве предполагается. В качестве примера приведем иерархии аналогов для первого [1] и четвертого [2] уравнений Пенлеве, полученные из редукции уравнения Кортевега — Де Фриза и из условий совместности гамильтоновой системы соответственно. Решения этих уравнений изучены существенно менее, как по причине большего количества этих уравнений так и по причине их высокого порядка и высокой степени.

В докладе будет рассмотрена программа для системы компьютерной алгебры Mathematica [3] получения приближенных решений задач Коши для таких уравнений на комплексной

плоскости. Программа написана по методике, предложенной в [4], имеет открытый код и может быть использована всеми заинтересованными лицами. Программа включает в себя:

- 1) построение аппроксимации решения рациональными функциями;
- 2) нахождение коэффициентов для аппроксимаций решения задачи Коши на комплексной плоскости, (грубая сетка [4]);
- 3) построение приближенного численного решения на мелкой сетке.

Выполнение данных вычислений не требует значительных ресурсов и возможно на компьютере пользователя за короткое время. Приведем примеры результатов.

Второй член иерархии первого уравнения Пенлеве

$$w^{(4)} - 20ww'' - 10(w')^2 + 40w^3 - z = 0,$$

рассмотрен, например в [5], где изучены локальные свойства решений. При постановке для него следующей задачи Коши: $w(0) = 0.075$, $w'(0) = -0.375$, $w''(0) = 0.0$, $w'''(0) = -0.048$ получим решение, график модуля которого, как функции комплексного переменного, изображен на рисунке 1. Данная визуализация помогает сделать выводы о расположении полюсов, а также о порядках полюсов и вычетов.

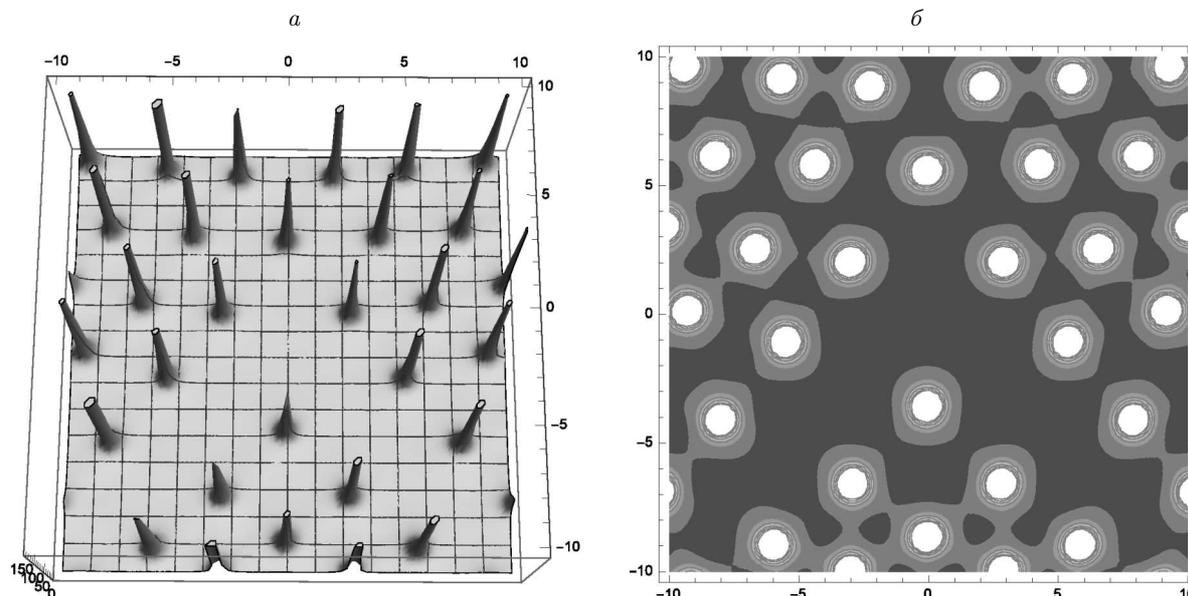


Рис. 1.

Второй член иерархии четвертого уравнения Пенлеве

$$\begin{aligned} & (w'' - 2zw - 2w^3 - \beta)w^2w^{(4)} - \frac{1}{2}w^2(w^{(3)})^2 + (2w^2 + 8w^3w' + 4zww' - w'w'' + \beta w')ww^{(3)} - \frac{4}{3}w(w'')^3 + \\ & + \left(3zw^2 + 3\beta w - \frac{3}{2}w^4 + \frac{3}{2}(w')^2 \right) (w'')^2 + (\beta w^4 - 2w'w^2 - 12(w')^2w^3 - 2\beta^2w + 10zw^5 - 3\beta(w')^2 + 10w^7 - \\ & - 4zw(w')^2 - 4\beta zw^2)w'' + 2(\beta - 4w^3)w^2w' + \left(4\beta zw + 8zw^4 + \frac{3}{2}\beta^2 + 12\beta w^3 \right) (w')^2 - \frac{10}{3}w^{10} - 8zw^8 - \\ & - 2\beta w^7 - 6z^2w^6 - 2\beta zw^5 + \left(\frac{1}{2}\beta^2 - 2 + 9\delta - \frac{4}{3}z^3 \right) w^4 + \beta zw^2 + \frac{1}{3}\beta^3w = 0, \end{aligned}$$

для которого в [6] представлены рациональные решения и преобразования Бэклунда. При постановке для него следующей задачи Коши: $w(0) = -0.1$, $w'(0) = 0.3$, $w''(0) = 0.1$,

$w'''(0) = -0.1$ получим при параметрах $\beta = 1$, $\delta = 1$ контурный график модуля решения, как функции комплексного переменного, который изображен на рисунке 2. Данная визуализация помогает сделать выводы о кривых, на которых находятся полюса, а также о группировке полюсов по четыре.

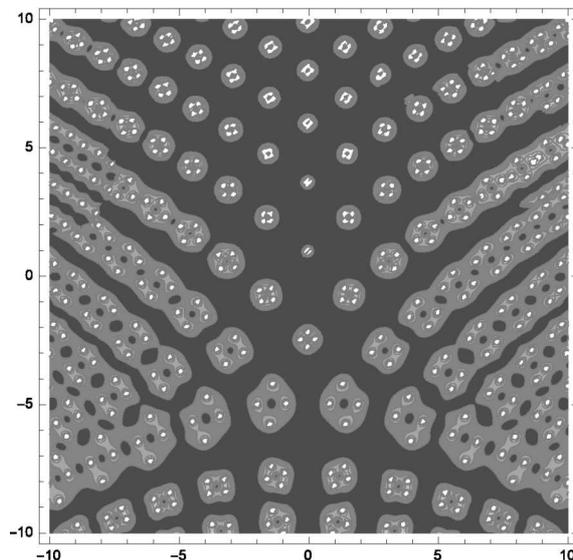


Рис. 2.

Приведем также график действительной части решения вдоль действительной оси (см. рис. 3). Он демонстрирует вычислительные трудности, связанные с интегрированием на комплексной плоскости в окрестности нескольких особых точек и погрешности, возникающие при этом. Способы уменьшения погрешностей будут рассмотрены в докладе.

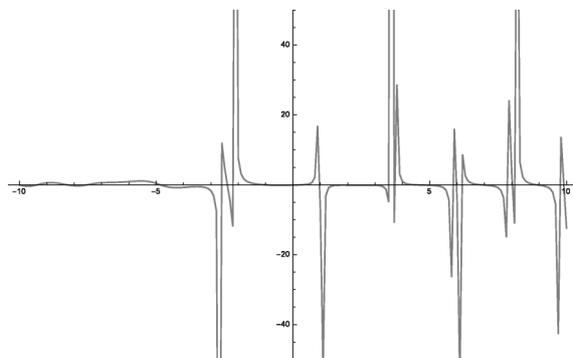


Рис. 3.

Литература

1. Kudryashov N. A. *The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them*, Phys. Lett. A224. 1997. P. 353–360.
2. Kudryashov N. A. *On the fourth Painlevé hierarchy*, TMF 134-1, 2003.
3. www.wolfram.com/mathematica/
4. Fornberg B., Weideman J. A. C. *A numerical methodology for the Painlevé equations* // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. P. 5957–5973.
5. Григорьев А. А., Громак В. И. *О степенных разложениях решений первого уравнения Пенлеве четвертого порядка* // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 4. С. 10–14.
6. Григорьев А. А. *О рациональных решениях одной иерархии четвертого уравнения Пенлеве* // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Мн., 2012.