О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Е.Р. Бабич, И.П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
elena.bibilo@mail.ru

Рассмотрим уравнения в частных производных

$$F(\phi) \equiv \frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} - \frac{3}{2}\frac{\phi_{xx}^2}{\phi_x^2} + \frac{\phi_t}{\phi_x} = 0, \quad K(u) \equiv u_{xxx} + u_t - 6uu_x = 0,$$

$$M(\omega) \equiv \omega_{xxx} + \omega_t - 6\omega^2\omega_x = 0, \quad L(\mathrm{w}) \equiv \frac{\mathrm{w}_{xxx}}{\mathrm{w}} + \frac{\mathrm{w}_t}{\mathrm{w}} - 3\frac{\mathrm{w}_x\mathrm{w}_{xx}}{\mathrm{w}^2}. \tag{1}$$

Уравнения $K(u) = 0$, $M(u) = 0$ в литературе называют уравнением Кортевега — де Фриза (КДФ) и модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза (МКдФ) соответственно.

Обозначим

$$p = \frac{1}{2}\frac{\phi_t}{\phi_x}, \tag{2}$$

$$q = -\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} - \frac{3}{2}\frac{\phi_{xx}^2}{\phi_x^2}\right), \tag{3}$$

$$\mu = -\frac{1}{2}\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}, \tag{4}$$

$$\omega = \frac{\phi_x}{\phi} - \frac{1}{2}\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}, \tag{5}$$

Лемма 1. *Для* p, μ *и* ω *из* (3) – (5) *соответственно имеют место равенства*

$$\omega_x = -\omega^2 + q, \quad \mu_x = -\mu^2 + q.$$

Замечание. Будем считать выполненным условие совместности: $\mathrm{w}_x t = \mathrm{w}_t x$. Тогда легко видеть, что $(\mathrm{w}_t/\mathrm{w})_x = (\mathrm{w}_x/\mathrm{w})_t$. Условие совместности считаем выполненным и для других функций, встречающихся в тексте.

Лемма 2. *Для* p, q *и* μ *из* (2) – (4) *соответственно имеют место равенства*

$$p_{xx} + \mu_t = 2p_x\mu + 2p\mu_x, \quad p_{xxx} + q_t = 4p_xq + 2pq_x.$$

Теорема 1. [1, с. 180] *Справедливо равенство* $K(u) = (M(\omega))_x + 2\omega M(\omega)$, *если* ω *и* u *связаны соотношением* $u = \omega_x + \omega^2$.

Теорема 2. *Справедливо равенство* $p_{xx} + 2p\omega^2 + \omega_t - 2p^2 - 2p_x\omega = -pF(\phi)$, *где* p, ω *взяты из* (2), (5) *соответственно.*

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$K(q) = (M(\omega))_x + 2\omega M(\omega), \quad K(q) = (M(\mu))_x + 2\mu M(\mu),$$

где q, μ *и* ω *взяты из* (3) – (5) *соответственно.*

Теорема 4. *Справедливо равенство* $K(p) = (F(\phi))_t/2 - p(F(\phi))_x - 2p_xF(\phi)$, *где* p, *взято из* (2).

Теорема 5. *Если функция* $\phi(x,t)$ *— решение уравнения* $F(\phi) = 0$, *то* $p = q$, $K(p) = 0$, $K(q) = 0$, $M(\omega) = 0$, *где* p, q, ω *взяты из* (2), (3), (5).

Следствие. *Уравнения* $K(u) = 0$ *и* $M(\omega) = 0$ *связаны между собой преобразованием Бэклунда* $\omega_x = -\omega^2 + u$, $2u\omega^2 + u_{xx} = 2u^2 + 2u_x\omega - \omega_t$ (см. [1, с. 180; 2, с. 26]). *Уравнения* $K(q) = 0$ *и* $M(\omega) = 0$ *связаны между собой преобразованием Бэклунда* $\omega_x = -\omega^2 + q$, $2q\omega^2 + q_{xx} = 2q^2 + 2q_x\omega - \omega_t$. *Уравнения* $K(q) = 0$ *и* $M(\mu) = 0$ *связаны между собой преобразованием Бэклунда* $\mu_x = -\mu^2 + q$, $2q\mu^2 + q_{xx} = 2q^2 + 2q_x\mu - \mu_t$.

Теорема 6. *Справедливо равенство* $K(z) + 2(M(\omega))_x = 6(uz)_x$, *где* $z = (q-p)/3 - \sum_{k=1}^{\infty} u_k\phi^k$.

Пусть $\omega = \mathrm{w}_x/\mathrm{w}$, где ω — решение уравнения $M(\omega) = 0$. Тогда $\mathrm{w}_{xx} = u\mathrm{w}$ и справедлива

Теорема 7. *Имеет место равенство*

$$K(u) = (L(\mathrm{w}))_{xx} + 2\frac{\mathrm{w}_x}{\mathrm{w}}(L(\mathrm{w}))_x.$$

Пусть функция $\mathrm{w} = \mathrm{w}(x,t)$ такова, что $\omega = \mathrm{w}_x/\mathrm{w}$, $\omega_x = -\omega^2 + u$, u — решение уравнения (1). Тогда получим

$$\mathrm{w}_{xx} = u\mathrm{w}. \tag{6}$$

Теорема 8. *Общее решение дифференциального уравнения* (6), *где функция* u — *решение уравнения* $K(u) = 0$, *не содержит логарифма и имеет вид*

$$\mathrm{w} = A\sum_{k=0}^{\infty} a_k\phi^{k+2} + B\sum_{k=0}^{\infty} b_k\phi^{k-1}, \quad A = A(t), \quad B = B(t), \quad a_k = a_k(t), \quad b_k = b_k(t),$$

коэффициенты a_k, b_k *получены по рекуррентным формулам*

$$(k+2)(k+5)a_{k+2} = \sum_{m=0}^{k} u_m a_{k-m}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(k-1)(k+2)b_{k+2} = \sum_{m=0}^{k} u_m a_{k-m}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Литература

1. Абловиц М., Сегур Х. *Солитоны и метод обратной задачи.* М.: Мир, 1987. 479 с.

2. Conte R. *Invariant Painlevé analysis of partial differential equations* // Phys. Lett. 1989. V. 140, no. 7–8. P. 383–390.

О ПОСТРОЕНИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

А.А. Григорьев

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
agrig@tut.by

Наряду с шестью уравнениями Пенлеве второго порядка, в настоящее время широкое распространение имеют уравнения высших порядков, для которых наличие свойства Пенлеве предполагается. В качестве примера приведем иерархии аналогов для первого [1] и четвертого [2] уравнений Пенлеве, полученные из редукции уравнения Кортевега — Де Фриза и из условий совместности гамильтоновой системы соответственно. Решения этих уравнений изучены существенно менее, как по причине большего количества этих уравнений так и по причине их высокого порядка и высокой степени.

В докладе будет рассмотрена программа для системы компьютерной алгебры Mathematica [3] получения приближенных решений задач Коши для таких уравнений на комплексной