АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
{tatsyana.andreeva,v.a.pronko}@gmail.com, berezkanata@mail.ru, i.martynov@grsu.by

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$(w' - w^2)w''' = (1 - 1/\nu)w''^2 + b_1 ww'w'' + b_2 w'^3 + b_3 w^3 w'' + b_4 w^2 w'^2, \tag{1}$$

где $\nu \in \mathbb{N}$, w — комплекснозначная функция. Уравнением (1) может быть определена одна из компонент квадратичной системы третьего порядка.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$w' = uw^2, \quad (u - 1)u'' = (1 - 1/\nu)u'^2 - p(u)u'w - q(u)w^2,$$

где $p(u) = (2 + 4/\nu)u^2 - (b_1 + 6)u - b_3$, $q(u) = (2 + 4/\nu)u^4 - (2b_1 + b_2 + 6)u^3 - (2b_3 + b_4)u^2$.

При $p(1) = q(1) = 0$ Пенлеве-анализ уравнения (1) проводился в [1, 2]; при $\nu = \infty$, $p(1) \neq 0$ — в [3, 4]; в [5] получены некоторые необходимые условия наличия свойства Пенлеве у уравнения (1).

Решается задача нахождения необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у уравнения (1). Приведем результаты, полученные в случае $p(1) \neq 0$.

Справедлива

Лемма. *Уравнение* (1) *при каждом наборе коэффициентов*

$$\nu = 3, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 30, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -54; \tag{2}$$

$$\nu = 4, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 12, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -24; \tag{3}$$

$$\nu \in \mathbb{N} \setminus \{2\}, \quad b_1 = -2(1 + b_3/\nu), \quad b_2 = -b_3, \quad b_4 = -b_3(1 + b_3/\nu), \quad b_3 \neq -2 \tag{4}$$

удовлетворяет необходимым условиям наличия свойства Пенлеве.

В уравнении (1) с коэффициентами (2), (3) положим соответственно

$$y = \frac{w'' - 21ww' + 27w^3}{3(w^2 - w')}, \quad y = \frac{w'' - 12ww' + 16w^3}{4(w' - w^2)}. \tag{5}$$

Если w решение уравнения (1) с коэффициентами (2), (3), то, используя (5), соответственно получим

$$w = \frac{y'' - 3yy' + y^3}{9(y^2 - y')}, \quad w = \frac{y^2 - y'}{4y}, \tag{6}$$

где y удовлетворяет уравнению $y''' = 6y'^2$, которое обладает свойством Пенлеве. Из соотношений (6) следует, что уравнение (1) с коэффициентами (2), (3) обладает этим же свойством.

Уравнение (1) с коэффициентами (4) представимо в виде

$$\left(\frac{w'' + b_3 ww'}{w' - w^2}\right)' + \frac{1}{\nu}\left(\frac{w'' + b_3 ww'}{w' - w^2}\right)^2 = 0,$$

где $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, $b_3 \neq -2$. Отсюда его первый интеграл имеет вид

$$w'' = -b_3 ww' + \frac{\nu}{t - t_0}(w' - w^2), \tag{7}$$

где $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, $b_3 \neq -2$, t_0 — произвольная постоянная. Согласно [6], решения уравнения (7) не имеют подвижных критических особых точек, отличных от t_0, только при $b_3 = 2\nu$.

Для установления характера особой точки t_0 выполним замену

$$w = \frac{1}{\nu}\frac{u'}{u} + \frac{\nu + 1}{2\nu}\frac{1}{t - t_0}.$$

Интегрируя полученное уравнение, имеем линейное уравнение

$$u'' - \left(\frac{s(s+1)}{(t - t_o)^2} + \frac{K}{t - t_0}\right)u = 0,$$

где $s = (\nu + 1)/2$, $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, K — произвольная постоянная. Его линейно независимые решения в окрестности особой точки t_0 представляются в виде

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^{n+s+1},$$

где c_0 — произвольная постоянная, $c_n = Kn^{-1}(n + 2s + 1)^{-1}c_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$;

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^{n-s} + \gamma u_1 \ln(t - t_0),$$

где b_0, b_{2s+1} — произвольные постоянные,

$$b_n = \frac{K}{n(n - 2s - 1)} b_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, 2s,$$

$$b_{2s+n} = \frac{Kb_{2s+n-1} - \gamma c_{n-1}(2n + 2s - 1)}{(n + 2s)(n - 1)}, \quad n = 2, 3, \ldots, \quad \gamma = \frac{Kb_{2s}}{c_0(2s + 1)}.$$

Таким образом, уравнение (1) с коэффициентами (4) не обладает свойством Пенлеве.

Следовательно, имеет место

Теорема. *Уравнение* (1) *с коэффициентами* (2), (3) *обладает свойством Пенлеве.*

Литература

1. Мартынов И. П. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 764–771.

2. Мартынов И. П. *Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 6. С. 937–946.

3. Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 9. С. 1640–1641.

4. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Аналитические свойства решений одного класса уравнений третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1219–1224.

5. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных многозначных особых точек* // В сб. матер. Респ. науч.-практ. конф., посвящ. 450-летию со дня рождения Г. Галилея. 17-–18 апреля 2014 г., Брест, Беларусь. (Под общ. ред. Н. Н. Сендера) Брест: БрГУ, 2014. С. 11–13.

6. Bureau F. *Differential equations with fixed critical points* // Ann. di Math. 1964. Vol. 64. P. 229–364.