

БАЗИС ГРЕБНЕРА ИДЕАЛА ЛЯПУНОВСКИХ ВЕЛИЧИН СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

А.Е. Руденок¹, А.С. Шуба²

¹ Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
roudenok@bsu.by

² Институт математики и информатики, Кишинев, Молдова
alexandru.suba@math.md

Рассматриваем систему Куклеса (см. [1, 2]):

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - Ax - Kx^2) - 3xy(B + Lx) + (A - U - Mx)y^2 - Ny^3. \quad (1)$$

Для нее долгое время не удавалось решить проблему различения центра и фокуса. Для доказательства достаточности условий центра системы (1) обычно использовался метод Л. А. Черкаса [4]. Для нахождения необходимых условий центра нужно рассматривать идеал I , образованный первыми ляпуновскими величинами системы (1) и находить многообразие идеала I . Многообразие идеала I можно найти или с помощью базиса Гребнера, или, вычисляя результаты из образующих идеала I и исключая переменные. Многообразие идеала I удалось найти А. П. Садовскому [2] с помощью результатов первых пяти ляпуновских величин системы (1). В этой работе он первым сформулировал теорему о необходимых и достаточных условиях центра системы (1). Возможным недостатком статьи [2] можно считать громоздкость вычисленных результатов, что не позволило привести их в явном виде. В работе [3, с. 124–145] А. П. Садовский нашел многообразие центра системы (1) с помощью базиса Гребнера идеала I , но опять же, громоздкость этого базиса не позволила указать его явно. В работе [2] им использовалась идея, что преобразованием $x \rightarrow kx, y \rightarrow ky$ можно добиться, чтобы выполнялось условие $N = B$. Тогда замена $B \rightarrow \sqrt{b}$ упрощала идеал I и вычисление его базиса Гребнера. Авторы настоящей работы пошли другим путем, что позволило найти такой простой базис Гребнера идеала I , что мы можем привести его в явном виде даже в этой короткой публикации.

С учетом первой ляпуновской величины $L = -(N + BU)$ и замены $N + BU \rightarrow N$ система (1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - Ax - Kx^2) - 3xy(B - Nx) + (A - U - Mx)y^2 - (N - BU)y^3. \quad (2)$$

В случае $U = 0$ не представляет труда найти базис Гребнера идеала I , образованного первыми ляпуновскими величинами системы (2) и многообразие этого идеала. Рассмотрим случай $U \neq 0$. Мы, как и А. П. Садовский, используем преобразованием гомотетии $x \rightarrow kx, y \rightarrow ky$. Им можно добиться, чтобы выполнялось условие $U = 1$. Случай $B = 0$ не представляет труда. Рассмотрим случай $B \neq 0$. Сделаем замену

$$B \rightarrow \sqrt{b}, \quad N \rightarrow N\sqrt{b}. \quad (3)$$

Теорема. *Базисом Гребнера идеала I системы, полученной из системы (2) в результате замены (3) и при условии $U = 1$, вычисленный в лексикографическом порядке $\{b, M, K, A, N\}$, является базис*

$$G = \{(K + AN - N^2)(A^2 - 4AN - 2A^2N + 4N^2 + 5AN^2 + A^2N^2), (K + AN - N^2)(-K - AN + KN + N^2 + AN^2), (A^2 + 4K + AK)(K + AN - N^2), A^2 - K - AK + AM - 4AN - 3A^2N - 3KN - 2MN + 3N^2 + 3AN^2, 2AK + KM + A^2N - 2KN - 2AKN - AN^2 + 3KN^2 + MN^2, (-1 + N)(A + A^2 + 2b + 2K + M - N - AN), -A - A^2 + A^3 - 2b + 2Ab - K + 2AK + A^2K + 2bK + 2K^2 - M + N + 4AN + A^2N + 4KN + AKN + 2MN - 3N^2 - 2AN^2 - 3KN^2 - MN^2\}.$$

Работа поддержана проектом FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338.