К РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

Д.В. Роголев

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
d-rogolev@tut.by

Рассмотрим периодическую краевую задачу для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати типа [1–3]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{C}_0(t) + \lambda\mathbf{C}_1(t)) + \mathbf{X}\left(\mathbf{S}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{S}_2(t)\mathbf{Y}\right) + \mathbf{F}_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}(\mathbf{D}_0(t) + \lambda\mathbf{D}_1(t)) + \mathbf{Y}\left(\mathbf{P}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{P}_2(t)\mathbf{Y}\right) + \mathbf{F}_2(t), \tag{2}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(\omega), \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(\omega), \tag{3}$$

где $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{F}_i$ $(i = 1, 2)$, $\mathbf{C}_j, \mathbf{D}_j$ $(j = 0, 1) \in \mathbb{C}([0, \omega], \mathbb{R}^{n\times n})$; $\omega > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Данная работа является продолжением и развитием [1–3]. На основе метода [4, гл. III] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3).

Примем следующие обозначения:

$$D = \{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) : 0 \leqslant t \leqslant \omega,\ \|\mathbf{X}\| \leqslant \rho_1,\ \|\mathbf{Y}\| \leqslant \rho_2\}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_i(\omega) = \int\limits_0^\omega \mathbf{A}_i(\tau)\,d\tau,$$

$$\tilde{\gamma}_i = \|\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha_i = \max_t \|\mathbf{A}_i(t)\|, \quad c_j = \max_t \|\mathbf{C}_j(t)\|, \quad d_j = \max_t \|\mathbf{D}_j(t)\|,$$

$$\delta_i = \max_t \|\mathbf{S}_i(t)\|, \quad \mu_i = \max_t \|\mathbf{P}_i(t)\|, \quad f_i = \max_t \|\mathbf{F}_i(t)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$h_{11} = \alpha_1 + c_0 + \varepsilon c_1, \quad h_{12} = c_0 + \varepsilon c_1, \quad h_{21} = \alpha_2 + d_0 + \varepsilon d_1, \quad h_{22} = d_0 + \varepsilon d_1,$$

$$q_{11} = \gamma_1[0.5\,\alpha_1(h_{11} + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega^2 + (h_{12} + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega], \quad q_{12} = \gamma_1\delta_2\rho_1\omega(0.5\,\alpha_1\omega + 1),$$

$$q_{21} = \gamma_2\mu_1\rho_2\omega(0.5\,\alpha_2\omega + 1), \quad q_{22} = \gamma_2[0.5\,\alpha_2(h_{21} + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega^2 + (h_{22} + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega],$$

где $t \in [0, \omega]$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det \tilde{\mathbf{A}}_i(\omega) \neq 0$ $(i = 1, 2)$;

2) $\gamma_1\{0.5\,\alpha_1[h_{11}\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + f_1]\omega^2 + [h_{12}\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + f_1]\omega\} \leqslant \rho_1$,
$\gamma_2\{0.5\,\alpha_2[h_{21}\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + f_2]\omega^2 + [h_{22}\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + f_2]\omega\} \leqslant \rho_2$;

3) $q_{11} < 1$, $\det(\mathbf{E} - \mathbf{Q}) > 0$, где $\mathbf{E} = \mathrm{diag}\,(1, 1)$, $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.

Тогда задача (1) — (3) *однозначно разрешима в области* D.

Литература

1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивный метод анализа периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Тр. ИСА РАН, 2008. Т. 39(1). С. 138–147.

2. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1412–1420.

3. Роголев Д. В. *О периодической краевой задаче для системы матричных уравнений типа Риккати с параметром* // Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения»: материалы конф., Актобе, 26 января 2013 г. Актобе: Актюбинский гос. ун-т им. К. Жубанова, 2013. С. 79–83.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.