ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В.В. Мироненко[1], **С.В. Майоровская**[2]

[1] Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
vladimir.v.mironenko@gmail.com
[2] Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
svmayor@gmail.com

Теорема. *Пусть вектор-функция* $q(t)$ *представляет собой решение дифференциальной системы* $\dot{x} = P(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, *с непрерывной матрицей* $P(t)$. *Тогда для любой нечетной непрерывной скалярной функции* $\alpha(t)$ *решение дифференциальной системы* $\dot{x} = P(t)x+\alpha(t)q(t)$ *с начальным условием* $x(-\omega) = 0$ *обладает свойством* $x(\omega) = x(-\omega) = 0$, *каково бы ни было число* ω. *Если к тому же эта система* 2ω*-периодична, то всякое ее решение* $x(t)$ *с начальным условием* $x(k\omega) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, *будет* $2k$*-периодическим.*

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ, 2004.

ПРИВЕДЕНИЕ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН СИСТЕМЫ

Н.П. Морозов

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь
morozovnp@tut.by

Основной результат доклада содержится в следующей теореме.

Расматривается система
$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$
где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемые функции на всей плоскости.

Теорема. *Пусть* $O(0,0)$ *является состоянием равновесия системы. Тогда система* (1) *представима единственным образом в виде*
$$\dot{x} = \frac{\delta H}{\delta y}(x,y) + x\overline{\sigma}(x,y), \quad \dot{y} = -\frac{\delta H}{\delta x}(x,y) + y\overline{\sigma}(x,y), \tag{2}$$
где
$$H = \sin\varphi \int\limits_0^\rho P(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)\,d\varphi - \cos\varphi \int\limits_0^\rho Q(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)\,d\varphi,$$
$$\rho^2\overline{\sigma}(x,y) = \int\limits_0^\rho \tau\sigma(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)\,d\tau, \quad \sigma(x,y) = \operatorname{div}(P;Q), \quad \overline{\sigma}(0,0) = \frac{\sigma(0,0)}{2}. \tag{3}$$

Случай полиномиальной системы рассмотрен автором ранее (см [4]) с использованием иного подхода. Подмеченные там закономерности и позволили перенести полученный там результат на общий случай.

Пусть в системе (1) $P(x,y)$ $Q(x,y)$ многочлены наибольшей степени n и $M_0(x_0,y_0)$ произвольная точка. Представим $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в виде многочлена Тейлора по степеням $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$:

$$P(x,y)=P(x_0,y_0)+\Sigma_{k=1}^{n}P_k(x,y),\quad Q(x,y)=Q(x_0,y_0)+\Sigma_{k=1}^{n}Q_k(x,y),\quad n\geqslant 1,$$

$$P_k(x,y)=\frac{1}{k!}\Sigma_{m=0}^{k}C_k^m a_{k-m\ m}(x-x_0)^{k-m}(y-y_0)^m,$$

$$Q_k(x,y)=\frac{1}{k!}\Sigma_{m=0}^{k}C_k^m b_{k-m\ m}(x-x_0)^{k-m}(y-y_0)^m,$$

где

$$a_{k-m\ m}=\frac{\delta^k P(x_0,y_0))}{\delta x^{k-m}\delta y^m},\quad b_{k-m\ m}=\frac{\delta^k Q(x_0,y_0))}{\delta x^{k-m}\delta y^m}.$$

Полагая $u=x-x_0$, $v=y-y_0$, система примет вид

$$\dot u=P(x_0,y_0)+\Sigma_{k=1}^{n}P_k(u,v),\quad P_k(u,v)=\frac{1}{k!}\Sigma_{m=0}^{k}C_k^m a_{k-m\ m}u^{k-m}v^m,$$

$$\dot v=Q(x_0,y_0)+\Sigma_{k=1}^{n}Q_k(u,v),\quad Q_k(u,v)=\frac{1}{k!}\Sigma_{m=0}^{k}C_k^m b_{k-m\ m}u^{k-m}v^m.$$

Используя равенства (3) находим

$$H(u,v)=vP(x_0,y_0)-uQ(x_0,y_0)+\Sigma_{k=1}^{n}H_{k+1}(u,v),$$

$$H_{k+1}(u,v)=\frac{1}{(k+1)!}(a_{0k}v^{k+1}-b_{k0}u^{k+1}+\Sigma_{m=1}^{k}C_k^{m-1}\frac{\mu_{k-m\ m-1}}{m}u^{k-m+1}v^m),$$

$$\sigma_{k-1}(u,v)=(\frac{\delta Pk(u,v)}{\delta u}+\frac{\delta Qk(u,v)}{\delta v})=\frac{1}{(k-1)!}\Sigma_{m=1}^{k}\sigma_{k-m\ m-1}u^{k-m}v^{m-1},$$

$$\overline{\sigma}_{k-1}(u,v)=\frac{1}{k+1}\sigma_{k-1}(u,v),\quad \mu_{k-m\ m-1}=ma_{k-m+1\ m-1}-(k-m+1)b_{k-m\ m},$$

$$\sigma_{k-m\ m-1}=a_{k-m+1\ m-1}+b_{k-m\ m},\quad k=\overline{1,n},\quad m=\overline{1,k}.$$

Если $M_0(x_0,y_0)$ состояние равновесия, то линейные слагаемые в гамильтониане отсутствуют.

Учитывая, что гамильтониан определяется по правым частям однозначно (с точностью до постоянного слагаемого), назовем его естественным гамильтонианом для системы (1).

Доказано, что вид системы (2) инвариантен относительно линейных преобразований.

В областях $\delta H/\delta\rho\neq 0$ система (2) приводится к уравнению $\delta H/\delta\varphi=-\rho^2\overline{\sigma}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, где ρ и H связаны соотношением $H(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=H$, причем это равенство однозначно разрешимо в этих облостях относительно rho, $\rho=f(H,\cos\varphi,\sin\varphi)$.

Литература

1. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* М.: Наука, 1978.

2. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш. Н. *Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости.* М.: МЦНМО, 2005.

3. Гринь А. А., Черкас Л. А. *Конструкивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход).* Гродно: ГрГУ, 2013.

4. Морозов Н. П. *О приведении систем к специальному виду* // Весн. Магілёўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. 2011. № 2(38). С. 43–49.