**Литература**

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон А. А. Майер А. Г. *Теория бифуркации динамических систем на плоскости.* М.: Наука, 1967.

2. Cherkas L. A., Grin A. A., Schneider K. *Dulac — Cherkas functions for generalized Lienard systems* // Electronic journal of qualitative theory and differential equations. 2011. No. 35. P. 1–23.

3. Черкас Л. А., Гринь А. А. *О функции Дюлака для системы Куклеса* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 6. С. 811–819.

4. Grin A. A., Schneider K. *On some classes of limit cycles of planar dynamical systems* // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems Series A: Mathematical Analysis. 2007. Vol. 14. No 5. P. 641–656.

5. Черкас Л. А. *Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.

6. Grin A. A., Schneider K. *On the construction of a class of generalized Kukles systems having at most one limit cycle* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 408. No 2. P. 484–497.

7. Кузьмич А. В. *Выделение класса обобщенных систем Куклеса с единственным предельным циклом* // Вестн. Гродненского гос. ун-та им. Я. Купалы. Сер. 2. 2015. № 3(199). С. 18–26.

8. Черкас Л. А., Гринь А. А., Булгаков В. И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход).* Гродно: ГрГУ, 2013.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕГУЛЯРНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ТОРЕ

**А.Н. Кулик, Н.В. Степаненко**

[1] Национальный Технический Университет Украины «КПИ», Киев, Украина
ganna_1953@ukr.net, nataliya.stepanenko@lll.kpi.ua

В теории нелинейных многочастотных колебаний возникают системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \tag{1}$$

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $x \in \mathbb{R}^n$, действительная вектор-функция $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$, $P(\varphi)$ — квадратная матрица, элементы которой действительные, непрерывные $2\pi$-периодические функции $P(\varphi) \in C(T_m)$. Один из важных вопросов: при каких условиях на функции $a(\varphi), P(\varphi)$ система (1) будет иметь функцию Грина — Самойленко $G_0(\tau, \varphi)$?

Функцией Грина — Самойленко [1] называют функцию вида

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leqslant 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)\{C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n\}, & \tau > 0, \end{cases}$$

где $\varphi_t(\varphi)$ — решение задачи Коши $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $\varphi|_{t=0} = \varphi$, $\Omega_\tau^t(\varphi)$ — фундаментальная матрица решений линейной системы $dx/dt = P(\varphi_t(\varphi))x$, $\Omega_\tau^t(\varphi)|_{t=\tau} = I_n$, $C(\varphi) : \|G_0(\tau, \varphi)\| \leqslant K \exp\{-\gamma|\tau|\}$, $K, \gamma = \mathrm{const} > 0$.

В одних случаях эта матрица $C(\varphi)$ существует единственная, тогда она обязательно удовлетворяет тождеству $C^2(\varphi) \equiv C(\varphi)$, в других случаях таких матриц существует бесконечное множество и в третьих случаях таких матриц не существует.

В случае, когда система (1) имеет единственную функцию Грина — Самойленко ее называют регулярной, а в случае, когда таких функций существует много различных, систему (1) называют слабо регулярной.

Известно [2], что вопрос регулярности системы (1) можно исследовать с помощью квадратичной формы $V = \langle S(\varphi)y, y \rangle$, производная которой в силу сопряженной системы $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $dy/dt = -P^T(\varphi)y$ будет знакоопределенной.

Доказано [2] что, если система (1) есть слабо регулярной, то следующая система:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad \frac{dy}{dt} = x - P^T(\varphi)y \tag{2}$$

будет регулярной. Причем производная невырожденной квадратичной формы $V_p(\varphi, x, y) = = p\langle x, y\rangle + \langle S(\varphi)y, y\rangle$ в силу системы (2) при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет положительно определенной.

Одно из направлений обобщения метода расширения (2) привело к следующим утверждениям:

**Теорема 1.** *Пусть существуют $(n \times n)$-мерные симметричные матрицы $S_i(\varphi) \in \in C'(T_m; a)$, $i = \overline{1, k}$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\langle[\dot{S}_i(\varphi) + S_i(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S_i(\varphi)]M_i(\varphi)x, M_i(\varphi)x\rangle \geqslant \|(M_i(\varphi) - M_{i+1}(\varphi))x\|^2, \quad i = \overline{1, (k-1)},$$

$$\langle[\dot{S}_k(\varphi) + S_k(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S_k(\varphi)]M_k(\varphi)y, M_k(\varphi)y\rangle \geqslant \|M_k(\varphi)x\|^2$$

*с некоторыми матрицами $M_i(\varphi) \in C^0(T_m)$, $i = \overline{1, k}$ и пусть матрицы $S_1(\varphi) \in C'(T_m; a)$, $M_1(\varphi) \in C^0(T_m)$ — невырожденные. Тогда система (1) будет регулярной. Причем производная пучка квадратичных форм $V_p = \lambda_1\langle S_1(\varphi)x, x\rangle + \ldots + \lambda_{k-1}\langle S_{k-1}(\varphi)x, x\rangle + \langle S_k(\varphi)x, x\rangle$ вдоль решений системы (1) будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметров $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, (k-1)}$.*

**Теорема 2.** *Пусть две системы уравнений $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $dx/dt = P_i(\varphi)x$, $i = 1, 2$, являются слабо регулярными, тогда следующая система уравнений:*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy_1}{dt} = \left[P_2(\varphi) + \frac{1}{2}(P_1(\varphi) + P_1^T(\varphi)) - I_n\right]y_1 + [P_2^T(\varphi) + P_1(\varphi)]y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \left[-P_2(\varphi) + \frac{1}{2}(P_1(\varphi) - P_1^T(\varphi)) + I_n\right]y_1 - P_2^T(\varphi)y_2,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = \left[P_2(\varphi) + \frac{1}{2}(P_1(\varphi) - P_1^T(\varphi)) + I_n\right]y_1 - [P_2^T(\varphi) + P_1(\varphi)]y_2 - P_1^T(\varphi)y_3, \tag{3}$$

*где $y_i \in \mathbb{R}^n$, будет регулярной. Причем производная невырожденной квадратичной формы $V_p = p^2(\langle y_1, y_2\rangle + \langle y_1, y_3\rangle + \langle y_2, y_3\rangle) + p\langle S_2(\varphi)y_2, y_2\rangle + \langle S_1(\varphi)y_3, y_3\rangle$ в силу системы (3) при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет положительно определенной.*

**Литература**

1. Самойленко А. М. *Элементы математической теории многочастотных колебаний.* М.: Наука, 1987. 302 с.

2. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. *Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.* Киев: Наук. думка, 1990. 270 с.

3. Кулик В. Л., Кулик А. Н., Степаненко Н. В. *Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных* // Математический журнал. Алматы. 2011. Т. 11, № 1. С. 74–86.

## УСЛОВИЯ ЦЕНТРА ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

**А.А. Кушнер**

Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
vesna85@tut.by

Рассмотрим систему типа систем Льенара

$$yP_0(x)y' = -x + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3, \tag{1}$$

где $P_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{6} c_k x^k, P_2(x) = \sum_{j=0}^{5} a_j x^j, P_3(x) = \sum_{i=0}^{7} b_i x^i$.