**Литература**

1. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *О задаче Валле — Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. Ч. 2. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. С. 32.

2. Кашпар А. И. *О задаче Валле — Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2013) : тез. докл. Междунар. науч. конф. Гродно, 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2013. С. 57.

3. Кашпар А. И. *О разрешимости задачи Валле — Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2014) : тез. докл. Междунар. науч. конф. Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2014. С. 63–64.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

5. Лаптинский В. Н., Кашпар, А. И. *Конструктивный анализ краевой задачи Валле — Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка. Ч. I.* Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2015. 48 с. (Препринт/Ин-т прикладной оптики НАН Беларуси; № 35).

## О МЕТОДЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВКЛЮЧЕНИЙ С КАУЗАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

**С.В. Корнев**

Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
kornev_vrn@rambler.ru

Одним из наиболее эффективных и геометрически наглядных способов решения периодической задачи для дифференциальных уравнений является метод направляющих функций, общие принципы которого сформулировали еще в середине XX в. М. А. Красносельский и А. И. Перов (см. [1]).

В восьмидесятые годы XX в. классический метод направляющих функций был распространен на случай дифференциальных включений и использован для исследования их периодических решений (см., например, [2]).

В настоящей работе применяется метод интегральных направляющих функций к задаче о существовании периодических решений включений с каузальными мультиоператорами. Заметим, что класс каузальных мультиоператоров достаточно широк. В него входит, например, мультиоператор суперпозиции выпуклозначного мультиотображения, удовлетворяющего верхним условиям Каратеодори и условию локальной интегральной ограниченности, а также мультиоператор суперпозиции мультиотображения, не обладающего свойством выпуклости значений, но удовлетворяющего условию почти полунепрерывности снизу и условию локальной интегральной ограниченности (см. [3]).

Пусть $T > 0$ и $\sigma$ — произвольные числа. Символами $C([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n)$ и $L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n)$, где $k \in \mathbb{Z}$, обозначим соответственно пространство непрервных и пространство суммируемых функций.

Для произвольного подмножества $\mathcal{N} \subset L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n)$ и $\tau \in (kT,(k+1)T)$ определим сужение $\mathcal{N}$ на $(kT,\tau)$ как

$$\mathcal{N}|_{(kT,\tau)} = \{f|_{(kT,\tau)} : f \in \mathcal{N}\}.$$

**Определение 1.** Если для каждого $k \in \mathbb{Z}$ мультиоператор

$$\mathcal{Q} : C([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n)$$

обладает тем свойством, что для каждого $\tau \in (kT, (k+1)T)$ и для всех

$$u(\cdot), v(\cdot) \in C([kT-\sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n)$$

из условия $u|_{[kT-\sigma,\tau]} = v|_{[kT-\sigma,\tau]}$ следует, что $\mathcal{Q}(u)|_{(kT,\tau)} = \mathcal{Q}(v)|_{(kT,\tau)}$, то мультиоператор $\mathcal{Q}$ будем называть каузальным.

Обозначим символом $C_T$ пространство непрерывных $T$-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$. Символом $\|x\|_2$ будем обозначать норму функции $x$ в пространстве $L^2$.

Для определения понятия периодического каузального мультиоператора рассмотрим для $k \in \mathbb{Z}$ оператор $j_k : L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n) \to L^1((0,T); \mathbb{R}^n)$ :

$$j_k(f)(t) = f(t + kT).$$

**Определение 2.** Каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}$ называется $T$-периодическим, если для каждого $x \in C_T$ и $k \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$j_k(\mathcal{Q}(x\,|_{[kT-\tau,(k+1)T]})) = \mathcal{Q}(x\,|_{[-\tau,T]}).$$

Для определенного выше $T$-периодического каузального мультиоператора $\mathcal{Q}$ будем рассматривать задачу существования решения следующего операторного включения:

$$x' \in \mathcal{Q}(x), \tag{1}$$

где $x \in C_T$ — абсолютно непрерывная функция.

Обозначим символом $L^1_T$ пространство суммируемых $T$-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Для $\tau > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in[-\tau,0]} \|x(t)\|$. Для функции $x(\cdot) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Будем предполагать, что $T$-периодический каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}$ имеет выпуклые значения и удовлетворяет следующим условиям:

($\mathcal{Q}1$) для любого непрерывного линейного оператора $A : L^1_T \to E$, где $E$ — банахово пространство, композиция $A \circ \mathcal{Q} : C_T \to Cv(E)$ является замкнутым мультиотображением;

($\mathcal{Q}2$) существует положительная суммируемая $T$-периодическая функция $\alpha(t)$ такая, что

$$\|\mathcal{Q}(x)(t)\| \leqslant \alpha(t)(1 + \|x_t\|_{\mathcal{C}}) \text{ п.в. } t \in \mathbb{R},$$

для каждого $x \in C_T$.

Развивая понятие, введенное в [4, 5], дадим следующее определение.

**Определение 3.** Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *строгой интегральной направляющей функцией* для включения (1), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int\limits_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s)\rangle\, ds \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{Q}(x),$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geqslant N$ и $\|x'(t)\| \leqslant \|\mathcal{Q}(x)(t)\|$ п. в. $t \in [0,T]$.

Из определения вытекает, что на любом замкнутом шаре $B_{\widetilde{K}} \subset \mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $\widetilde{K} \geqslant K$ определена топологическая степень $\deg(\nabla V; B_{\widetilde{K}})$ его градиента $\nabla V$ и, кроме того, она не зависит от радиуса $\widetilde{K}$ (см., например, [1]). Это общее значение степени назовем индексом $\operatorname{ind} V$ невырожденного потенциала $V$.

**Теорема**. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— строгая интегральная направляющая функция для включения* (1) *такая, что* $\operatorname{ind} V \neq 0$. *Тогда включение* (1) *имеет решение.*

Заметим, что условия теоремы выполнены, если, например, функция $V$ четна или

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = \pm\infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00468), РФФИ — Тайвань (проект № 14-01-92004) и РНФ (проект № 14-21-00066).

**Литература**

1. Красносельский М. А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1966.

2. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.* М.: Либроком, 2011.

3. Obukhovskii V., Zecca P. *On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces* // Nonlinear Analysis. 2011. V. 74. № 8. P. 2765–2777.

4. Fonda A. *Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations* // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 99. № 1. P. 79–85.

5. Kornev S., Obukhovskii V. *On some developments of the method of integral guiding functions* // Functional Differential Equations. 2005. V. 12. № 3–4. P. 303–310.

## ПРИЗНАК ДЮЛАКА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ

**А.В. Кузьмич, А.А. Гринь**

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
andrei-ivn@mail.ru, grin@grsu.by

Рассмотрим автономную дифференциальную систему на плоскости вида

$$\dot{x} = y^{p-1} \equiv P(x,y), \quad \dot{y} = -x^{2q-1} + \mu y^{p+1}(1-x^{2q})f(x) \equiv Q(x,y), \quad X = (P,Q), \tag{1}$$

зависящую от действительного параметра $\mu \in I \subseteq \mathbb{R}, 0 \in I$, где $p$ — натуральное четное число, $q \in N$ и $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Система (1), представляющая собой обобщение системы Ван Дер Поля, при $\mu = 0$ является консервативной системой с первым интегралом вида $x^{2q}/(2q) + y^p/p = c$, где $c$ — некоторое положительное действительное число. При значениях параметра $\mu$ достаточно близких к нулю, из некоторых замкнутых траекторий $x^{2q}/(2q) + y^p/p = c_i$, $c_i > 0$ могут рождаться предельные циклы [1].

Для оценки числа и локализации предельных циклов в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ структурно устойчивых систем на плоскости в работах [2–4] эффективно применялся обобщенный подход Л. А. Черкаса [5] к признаку Дюлака, который основан на нахождении функции Дюлака — Черкаса $\Psi(x,y,\mu)$, удовлетворяющей неравенству

$$\Phi(x,y,\mu) = k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial \Psi}{\partial x}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q \geqslant 0 \ (\leqslant 0), \quad \forall (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \forall \mu \in I \subseteq \mathbb{R}, \tag{2}$$

где промежуток $I$ не содержит бифуркационных значений параметра $\mu$. При этом функция $\Psi(x,y,\mu)$ предполагается непрерывной по всем аргументам и непрерывно дифференцируемой по фазовым переменным $x, y$. В работах [6, 7] была получена глобальная оценка числа предельных циклов для некоторых случаев обобщенных систем Куклеса с помощью построения функции Дюлака — Черкаса. Аналогичный подход теперь используем для исследования предельных циклов системы (1).