Литература

1. Данилович Л. А., Лаптинский В. Н. *О периодической краевой задаче для обощенного уравнения Ляпунова с параметром* // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2013): тез. докл. Междунар. науч. конф. 2013. Ч. 1. С. 51–52.
2. Данилович Л. А. *Об одном алгоритме построения решения периодической краевой задачи для обощенного уравнения Ляпунова с параметром* // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014): тез. докл. Междунар. науч. конф. 2014. Ч. 1. С. 58.
3. Данилович Л. А., Лаптинский В. Н. *Об одном представлении периодического решения линейного матричного дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 276–278.
4. Данилович Л. А, Лаптинский В. Н. *О периодических решениях уравнения типа Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 2. С. 281–283.
5. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕЧЕТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.С. Денисов

Витебский государственный технологический университет, экономический факультет, Витебск, Беларусь
primakovasv@tut.by

В статье [1] для системы с кубической нелинейностью

$$\dot{x} = Ay^3 + By + f(x), \quad \dot{y} = g(x), \quad A > 0, \quad B > 0, \tag{1}$$

найдены достаточные условия существования предельных циклов при нарушении на некотором интервале первого неравенства обобщенных условий Гурвица

$$xf(x) < 0, \quad xg(x) < 0 \ \text{ при } \ x \neq 0, \quad f(0) = g(0) = 0. \tag{2}$$

В [2] доказана единственность устойчивого предельного цикла, охватывающего неустойчивый предельный цикл системы (1). В [3] анонсировались аналогичные результаты для систем вида

$$\dot{x} = Ay^{4n-1} + By^{2n-1} + f(x), \quad \dot{y} = g(x), \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ay^{8n-1} + By^{4n-1} + f(x), \quad \dot{y} = g(x), A > 0,\ B > 0, \tag{3}$$

$$\dot{x} = Ay^{12n-1} + By^{4n-1} + f(x), \quad \dot{y} = g(x), \quad A > 0, \quad B > 0, \tag{4}$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ нечетные, определены и непрерывны на $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям:

I) $\exists x_1, x_3$, такие, что $f(x) < 0$ на $(0; x_1)$, $f(x) > 0$ на $(x_1; x_3)$; $g(x) < 0$ на $(0; \infty)$; $f(0) = f(x_1) = g(0) = 0$;

II) $G(x) = \int_0^x -g(s)\,ds \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Введем функции $V(x, y)$ для систем (3), (4) соответственно:

$$V(x, y) = \frac{Ay^{8n}}{8n} + \frac{By^{4n}}{4n} + G(x), \quad V(x, y) = \frac{Ay^{12n}}{12n} + \frac{By^{4n}}{4n} + G(x).$$

Лемма 1. *Если выполнены условия* (2) *или условие* I) *и условие* II), *то кривые* $V(x,y)=C$ *замкнуты, окружают начало системы координат, симметричны относительно оси абсцисс и кривая* $V(x,y)=C_2$ *ограничивает область, внутри которой находится кривая* $V(x,y)=C_1$, *если* $C_2>C_1$.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (2) *и условие* II), *то системы* (3), (4) *не имеют предельных циклов.*

Пусть d — единственный действительный корень уравнения

$$Ay^{8n-1}+By^{4n-1}-\gamma M=0 \ \text{ или } \ Ay^{12n-1}+By^{4n-1}-\gamma M=0,$$

где $M=\max\limits_{[0;x_3]}|f(x)|$; $\varphi(x)=\int_0^x -g(s)f(s)\,ds$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* I), II), *а также условие*

III) $\exists\gamma>1$, $\exists x_2\in(x_1,x_3)$, *такие что справедливы неравенства*

$$\varphi(x_2)\geqslant\frac{2\varphi(x_1)}{1-\gamma},\quad G(x_3)-G(x_2)\geqslant\frac{Ad^{8n}}{8n}+\frac{Bd^{4n}}{4n}+2Md, \tag{5}$$

то система (3) имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, лежащий в полосе $-x_3\leqslant x\leqslant x_3$.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 2 *и условие*

IV) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x))>0$,

то система (3) *имеет по крайней мере два предельных цикла.*

Вместо выполнения условия III) теоремы 2 можно потребовать выполнения при $\gamma>1$ неравенства

$$\varphi(x_3)\geqslant\frac{2\varphi(x_2)}{1-\gamma}+(\gamma+1)M\left(\frac{Ad^{8n}}{8n}+\frac{Bd^{4n}}{4n}\right). \tag{6}$$

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы* 2 *и неравенство* (6), *то система* (3) *имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл.*

В этом случае предельный цикл может иметь точки вне полосы $-x_3\leqslant x\leqslant x_3$.

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* 3, *где первое из неравенств* (5) *заменено на неравенство*

$$\varphi(x_2)\geqslant-4\gamma\frac{\varphi(x_1)}{(\gamma-1)^2},$$

и $f'(x)\leqslant0$ *при* $x\geqslant x_2$, *то для системы* (3) *устойчивый предельный цикл, окружающий по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, является единственным.*

Аналогичные результаты получены для системы (4).

Литература

1. Денисов В. С., Примакова О. О. *О существовании предельных циклов одной динамической системы с кубической нелинейностью* // Дифференц. уравнения и системы компьютерной алгебры: Материалы Междунар. конф. Ч. 1. Мн.: БГПУ, 2005. С. 102–107.

2. Денисов В. С. *О единственности устойчивого предельного цикла динамических систем с нелинейностями третьей и пятой степени* // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: Тр. Третьей Междунар. научной конф. Мн.: Изд. центр БГУ, 2012. С. 108–117.

3. Денисов В. С. *Предельные циклы динамических систем с нелинейностями выше кубической по одной переменной* // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Тез. докл. Междунар. матем. конф. Мн., 2010. С. 30–31.