Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. 196 с.
2. Бельский В. А. *Полиномиальные дифференциальные уравнения с одинаковыми отражающими функциями* // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2015. № 3 (90). С. 93–98.
3. Бельский В. А. *Полиномиальные дифференциальные уравнения и системы с одинаковыми отражающими функциями.* Гомель : ГГТУ им П.О. Сухого, 2014. 176 с.
4. Бельский В. А., Мироненко В. И. *О полиномиальных возмущениях уравнения Абеля, не изменяющих отражающей функции* // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 4(9). С. 79–85.

ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

Н.Д. Василевич

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
vasilevichnd@gmail.com

Пусть K_m — множество всех однородных полиномов степени m от n переменных над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $n \geqslant 3$, $\overline{\Omega}_m(\mathbb{C}^n)$ — множество всех невырожденных дифференциальных 1-форм ω на $\mathbb{C}^n$ вида

$$\omega(x) = \omega_1(x)\,dx_1 + \ldots + \omega_n(x)\,dx_n, \tag{1}$$

где $\omega_j(x) \in K_m$, $j = \overline{1,n}$.

Форма (1) называется невырожденной, если полиномы $\omega_j(x)$ не имеют общего множителя $p(x) \in K_l$ при $0 < l \leqslant m$.

Точка $x \in \mathbb{C}^n$ называется неособой, если $\omega_j(x) \neq 0$ хотя бы для одного индекса $j = \overline{1,n}$.

По теореме Фробениуса дифференциальная 1-форма (1) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда

$$\omega \wedge d\omega = 0, \tag{2}$$

где $\wedge$ — оператор внешнего дифференцирования.

Множество всех вполне интегрируемых дифференциальных 1-форм из $\overline{\Omega}_m(\mathbb{C}^n)$ обозначим $\Omega_m(\mathbb{C}^n)$. Дифференциальной форме $\omega \in \Omega_m(\mathbb{C}^n)$ соответствует вполне интегрируемое дифференциальное уравнение Пфаффа

$$\omega(x) = 0, \tag{3}$$

и векторное поле V_ω на $\mathbb{C}^n$, которое задается формулой $V_\omega(x) = (\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x))$.

Заметим, что условие полной интегрируемости (2) геометрически означает следующее: через каждую неособую точку формы ω проходит комплексно-аналитическое многообразие коразмерности 1, которое всюду ортогонально к комплексным интегральным кривым обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = V_\omega(x)$$

и которое называется интегральной поверхностью уравнения.

Теорема [1, с. 41; 2]. *Для того чтобы уравнение* (3) *с* 1*-формой* $\omega \in \overline{\Omega}_m(\mathbb{C}^n)$ *было в полных дифференциалах, необходимо и достаточно выполнение условия* $d\omega = 0$.

Литература

1. Амелькин В. В. *Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения.* М.: Едиториал УРСС, 2010.

2. Василевич Н. Д. *Об уравнениях Пфаффа с алгебраическими особенностями* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 5. С. 28–32.

ПЕРИОДИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

П.П. Вересович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
Petr.Veresovich@mail.ru

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)y, \quad \dot{y} = b_0(t)+b_1(t)x+b_2(t)x^2+b_3(t)x^3+b_4(t)y+b_5(t)xy. \tag{1}$$

в которой функции $a_i(t)$ $(i = 0,1,2,3)$, $b_j(t)$ $(j = 0,1,2,3,4,5)$ являются непрерывными, что обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши.

Выясним условия, при выполнении которых отражающая функция этой системы [1, 2] будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} F_1(t,x,y) \\ F_2(t,x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+m_0(t)+m_1(t)x+m_2(t)x^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В дальнейшем для любой функции $f(t)$ введем обозначения $f \equiv f(t)$, $\bar{f} \equiv f(-t)$. Справедлива

Лемма 1. *Функция* (2) *будет отражающей функцией системы* (1) *тогда и только тогда, когда выполняются две группы тождеств*

$$a_3+\overline{a_3} = 0, \quad a_1+\overline{a_1}+\overline{a_3}m_1 = 0, \quad a_2+\overline{a_2}+\overline{a_3}m_2 = 0, \quad a_0+\overline{a_0}+\overline{a_3}m_0 = 0, \tag{3}$$

и

$$b_4+m_1a_3+\bar{b}_4 = 0, \quad \dot{m}_1+b_1+m_1a_1+2m_2a_0+\bar{b}_1+\overline{b_4}m_1+\overline{b_5}m_0 = 0, \quad b_5+2m_2a_3+\bar{b}_5 = 0,$$
$$\dot{m}_2+b_2+m_1a_2+2m_2a_1+\overline{b_2}+\overline{b_4}m_2+\overline{b_5}m_1 = 0, \quad b_3+\bar{b}_3+2m_2a_2+\overline{b_5}m_2 = 0,$$
$$\dot{m}_0+b_0+m_1a_0+\bar{b}_0+\bar{b}_4m_0 = 0. \tag{4}$$

Для обоснования леммы достаточно применить основное соотношение

$$F_t+F_xX(t,x)+X(-t,F) = 0, \quad F(0,x) = x$$

для отражающей функции $F(t,x)$ системы $\dot{x} = X(t,x)$ [1, 2].

Упростим условия (3), (4). Справедлива

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда коэффициенты* m_i $(i = 0,1,2)$ *отражающей функции определяются вторым, третьим и четвертым равенствами* (3), *а коэффициенты системы связаны условиями:*

а) a_3 *— функция нечетная;*

б) $(a_1+\bar{a}_1)+(b_4+\bar{b}_4) = 0$, $2(a_2+\bar{a}_2)+(b_5+\bar{b}_5) = 0$.

Выполнение условия *а*) следует из первого равенства (3), а следующими тремя равенствами (3) определяются коэффициенты отражающей функции. С учетом условия *а*) второе