где D^α — дробная производная порядка α в смысле Капуто (если $x(t)$ — гладкая функция, то

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} x^{(m)}(s)\, ds,$$

где $\alpha > 0$ и m — целое, удовлетворяющее условию $m-1 < \alpha \leqslant m$) в пространствах весовых функций $C_\gamma[0,T]$ $(\gamma \in C)$, определяемых как пространства функций $g(t)$, заданных на $[0,T]$ таких, что $t^\gamma g(t) \in C[0,T]$:

$$C_\gamma[0,T] = \{g(t): \ \|g\|_{C_\gamma} = \|t^\gamma g(t)\|_C < \infty\}, \quad C_0[0,T] = C[0,T].$$

При этом устанавливается нелокальная теорема о единственной разрешимости задачи Коши с $0 < \alpha < 1$.

Предполагается, что функция $f(t,x)$ определена на $[0,T] \times \mathbb{X}$ ($\mathbb{X}$ — банахово пространство); для каждого x функция $f(t,x)$ — функция одной переменной t, $f(t,x) \in C_\gamma[0,T]$ (т. е. справедливо $\|f\|_{C_\gamma} = \|t^\gamma f(t,x)\|_C < \infty$) и удовлетворяет условию Липшица по второй переменной

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|_X \leqslant k\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{X}}, \tag{3}$$

где k — некоторая константа.

Теорема 1. *Если $f(t,x)$ для каждого x принадлежит пространству функций $C_\gamma[0,T]$ и удовлетворяет условию* (3), *то задача Коши* (1), (2) *имеет в $C_\gamma[0,T]$ единственное определенное на $[0,T]$ решение для всех $\gamma < \alpha$.*

Литература

1. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solutions and Some of Their Applications* / Mathematics in Sciences and Engineering. Vol. 198. San-Diego, 1999.

2. Баркова Е. А., Забрейко П. П. *Нелокальные теоремы о задаче Коши для дифференциальных уравнений дробных порядков* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 46, вып. 2. С. 1–6.

3. Килбас А. А., Бонилла Б., Трухилло Х. *Дробные интегралы и производные, дифференциальные уравнения дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций* // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, вып. 6. С. 18–22.

ЛИНЕЙНЫЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

М.С. Белокурский

Гомель, Беларусь

Теорема. *Для того чтобы линейная неоднородная дифференциальная система*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A(t)$ — непрерывная $(n \times n)$-матрица, $f(t)$ — непрерывная вектор-функция, была эквивалентна в смысле совпадения отражающих функций [1] *системе*

$$\dot{x} = f(t),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) *функция $A(t)$ являлась нечетной;*

2) *для любого* $t \in \mathbb{R}$ *было справедливо равенство* $A(t)\int_t^{-t} f(s)\,ds = 0$.
При этом отражающей функцией этих систем является функция

$$F(t,x) = x + \int\limits_t^{-t} f(s)\,ds. \qquad (2)$$

Следствие. *Пусть функция* $A(t)$ *имеет период* ω_1, *а функция* $f(t)$ *— период* ω_2, *причем числа* ω_1 *и* ω_2 *— несоизмеримы. Для того чтобы система* (1) *имела* ω_2 *-периодическую по* t *отражающую функцию* (2) *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*
1) *функция* $A(t)$ *была нечетной;*
2) $A(t)\int_t^{-t} f(s)\,ds \equiv 0$;
3) $\int_0^{\omega_2} f(s)\,ds = 0$.

В качестве примера рассмотрим квазипериодическую систему с двухчастотным базисом

$$\dot{x} = 3x\sin t - y\sin t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t, \quad \dot{y} = 9x\sin t - 3y\sin t + 3\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t.$$

Эта система эквивалентна $2\pi/\sqrt{3}$-периодической системе

$$\dot{x} = \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t, \quad \dot{y} = 3\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t.$$

Отражающая функция этих систем имеет вид

$$F(t,x,y) = (x - 2\sin\sqrt{3}t,\ y - 6\sin\sqrt{3}t)^\top$$

и является $2\pi/\sqrt{3}$-периодической по t.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. 196 с.

2. Mironenko V. I., Mironenko V. V. *How to construct equivalent differential systems* // Applied Mathematic Letters. 2009. Vol. 22. P. 1356–1359.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

В.А. Бельский

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель, Беларусь
vadzimbelsky@rambler.ru

В работе В. И. Мироненко [1], значительная часть которой посвящена теории отражающей функции, содержится ряд результатов, позволяющих в некоторых случаях давать ответ на вопрос о существовании периодических решений у изучаемой дифференциальной системы. Один из таких результатов [1, с. 130] мы применяем [2] для исследования уравнения Абеля. Другие результаты автора, относящиеся к уравнению Абеля и полученные с применением теории отражающей функции см. в [3, с. 44–79; 4].

Теорема. *Пусть для уравнения Абеля*

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 \qquad (1)$$

с непрерывно дифференцируемыми 2ω *-периодическими коэффициентами выполянется неравенство* $a_{3e}(t) < 0$ *при* $t \in [0,\omega]$, *где* $a_{3e}(t) \equiv (a_3(t) + a_3(-t))/2$ *— четная часть функции* $a_3(t)$. *Тогда уравнение* (1) *имеет хотя бы одно* 2ω *-периодическое решение.*