НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ЦЕНТРЫ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Ф. Андреев[1], **И.А. Андреева**[1], **А.П. Садовский**[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
irandr124@gmail.com
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
sadovskii@bsu.by

Сначала рассматривается система

$$\dot{x} = y(1+Hx) + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3, \quad \dot{y} = -x^3 + Kx^2y + Mxy^2 + Ny^3. \tag{1}$$

Из первых трех фокусных величин необходимые условия центра системы (1) находим в виде:

$$3A+K=0, \quad C+3N-2A(B+M)+AH^2=0,$$
$$30(B+M)(2A^3+AM-N) - H^2(57A^3-9AB+17AM-21N)=0.$$

При $H=0$ имеем систему, для которой впервые проблема центра и фокуса была решена в 1953 г. в [1].

Решение проблемы центра и фокуса для системы (1) дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* V *— многообразие центра системы* (1). *Тогда*

$$V = \bigcup_{k=1}^{4} \mathbb{V}(J_k),$$

где

$$J_1 = \langle A, N, C, K\rangle, \quad J_2 = \langle H, B+M, C+3N, 3A+K\rangle,$$
$$J_3 = \langle H, A(2A^2+M)-N, C+A(6A^2-2B+M), 3A+K\rangle,$$
$$J_4 = \langle 4(B+M)^2 - H^2(3A^2+B+2M), 3D+A^2(15A^2-11B+3H^2-5M),$$
$$A(6A^2-2B+M)-3N, C+A(6A^2-4B+H^2-M), 3A+K\rangle.$$

При $p \in \mathbb{V}(J_4)$, где $p=(H,A,B,C,D,K,M,N)$, система (1) имеет интеграл Дарбу

$$U = f_1^{2(B+M)/(3A^2-B)} f_2,$$

где

$$f_1 = 1 - \frac{(3A^2-B)H(x+Ay)}{2(B+M)},$$

$$f_2 = \frac{(3A^2-B)(x+Ay)^4}{6A^2-B+M} + \frac{2Ay^3(-H(3A^2+B+2M)+2(3A^2-B)(B+M)(x+Ay))}{3(3A^2+B+2M)} +$$
$$+y^2(1+H(x+Ay)-(3A^2-B)(x+Ay)^2) -$$
$$-\frac{(3A^2+B+2M)(3+3H(x+Ay)+3(B+M)(x+Ay)^2+H(3A^2+M)(x+Ay)^3)}{(3A^2+M)(6A^2-B+M)(9A^2-B+2M)}.$$

При $p \in \mathbb{V}(J_k)$, $k=2,3$, имеем центры из [1].

Рассмотрим далее систему

$$\dot{x} = y + Px^2 + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3, \quad \dot{y} = -x^3 + Mxy^2 + Ny^3, \tag{2}$$

где $P^2 < 2$.

Из первых трех фокусных величин необходимые условия центра системы (2) находим в виде:

$$A = 0,7(C + 3N) + (15C + 7N)P^2 - 10NP^4 = 0,$$

$$(3B(63 + 570P^2 + 523P^4 + 210P^6) + M(189 + 696P^2 - 158P^4 - 734P^6 - 105P^8))N = 0.$$

Теорема 2. *Пусть* V *— многообразие центра системы* (2). *Тогда*

$$V = \mathbb{V}(W_1) \bigcup \mathbb{V}(W_2),$$

где $W_1 = \langle A, P, B + M, C + 3N\rangle$, $W_2 = \langle A, C, N\rangle$.

При $P = 0$ (2) становится частным случаем системы из [1].

В заключении рассмотрим систему

$$\dot{x} = y + Ax^2 + Bxy + Cy^2, \quad \dot{y} = -x^3 + Kx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \tag{3}$$

где $A^2 < 2$.

Теорема 3. *Пусть* V *— многообразие центра системы* (3). *Тогда*

$$V = \bigcup_{k=1}^{3} \mathbb{V}(I_k),$$

где $I_1 = \langle K, M, B\rangle$, $I_2 = \langle A, K, BC - 3N, B^2 - 2M\rangle$, $I_3 = \langle C, N, K, A\rangle$.

Фокусные величины систем (1)–(3) находятся приведением их аналитическим преобразованием

$$u = x(1 + f_1(x, y)), \quad v = y + xf_2(x, y),$$

где $f_i(0, 0) = 0$, $i = 1, 2$, к нормальной форме

$$\dot{u} = v + u^2\varphi_1(u), \quad \dot{v} = -u^3\varphi_2(u),$$

где φ_i — аналитические функции [2].

При исследовании условий центра систем (1)–(3) использовались методы компьютерной алгебры, изложенные в [3].

Литература

1. Андреев А. Ф. *Решение проблемы центра и фокуса в одном случае* // Прикладная математика и механика. 1953. Т. 17. Вып. 3. С. 333–338.

2. Strozyna E.,Żołądek H. *The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity* // J. Dif. Eq. 2002. V. 179, № 2. P. 479–537.

3. Садовский А. П. *Полиномиальные идеалы и многообразия: пособие для студентов*. Мн.: Изд-во БГУ, 2008.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е.А. Баркова[1], **П.П. Забрейко**[2]

[1] Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
elenab@mail.bn.by
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
zabreiko@mail.ru

В докладе обсуждаются вопросы разрешимости задачи Коши

$$D^\alpha x(t) = f(t, x), \tag{1}$$

$$x^{(k)}(0) = \xi_k, \quad k = 0, \dots, m - 1, \tag{2}$$