Определение 2. Функция $L:\mathbb{Z}\to M_n(\mathbb{R})$ называется матрицей Ляпунова, если для каждого $k\in\mathbb{Z}$ матрица $L(k)$ обратима и

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\bigl(\|L(k)\|+\|L^{-1}(k)\|\bigr)<\infty.$$

Если $L(k)$, $k\in\mathbb{Z}$ — матрица Ляпунова, то линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ вида

$$y(k)=L(k)x(k),\quad k\in\mathbb{Z},\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad y\in\mathbb{R}^n,$$

называется преобразованием Ляпунова. Две линейные однородные системы с дискретным временем называются асимптотически эквивалентными (по Богданову), если существует связывающее их преобразование Ляпунова.

Если две системы асимптотически эквивалентны, то поведение их решений при $k\to+\infty$ оказывается в некотором смысле «одинаковым», например, асимптотически эквивалентные системы одновременно устойчивы, асимптотически устойчивы или неустойчивы. Сохраняются также и числовые характеристики, описывающие поведение решений этих систем на бесконечности (например, показатели Ляпунова).

Определение 3. Будем говорить, что замкнутая система (2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости, если для произвольной функции $C:\mathbb{Z}\to M_n(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\sup_{k\in\mathbb{Z}}\{\|C(k)\|+\|C^{-1}(k)\|\}<\infty$, существует допустимое матричное управление $U:\ \mathbb{Z}\to M_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (2) с управлением $U=U(k)$ асимптотически эквивалентна системе

$$y(k+1)=C(k)y(k),\quad k\in\mathbb{Z},\quad y\in\mathbb{R}^n.$$

Определение 4 (Р. Калман [1], Е. Л. Тонков [2]). Система (1) называется равномерно вполне управляемой, если существуют такие $\alpha>0$ и $K\in\mathbb{N}$, что для каждых $x^1\in\mathbb{R}^n$ и $k_0\in\mathbb{N}$ существует управление $u(k)$, $k=k_0,k_0+1,\dots,k_0+K-1$, такое, что решение $x(k)$ системы (1) с выбранным управлением u и начальным условием $x(k_0)=0$ удовлетворяет равенству $x(k_0+K)=x^1$, при этом $\|u(k)\|\leqslant\alpha\|x^1\|$ при всех $k=k_0,k_0+1,\dots,k_0+K-1$.

Теорема. *Пусть* (1) *— периодическая равномерно вполне управляемая система. Тогда соответствующая замкнутая система* (2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Литература

1. Kalman R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.

2. Тонков Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

НЕУПОРЯДОЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ, БЛУЖДАЕМОСТИ И ВРАЩАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

И.Н. Сергеев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
igniserg@gmail.com

Для натурального $n>1$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}^+,$$

задаваемых непрерывными функциями $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (отождествляемыми с самими системами), а через $\mathcal{M}^n$ — его подмножество, состоящее из ограниченных систем. Пусть $\mathcal{S}^n(A)$ и $\mathcal{S}^n$ — множества ненулевых решений конкретной системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и соответственно ненулевых решений всех таких систем.

Основные определения. Для описанных решений рассмотрим показатели *ляпуновского типа*, которые призваны отвечать не за рост их нормы, но за их колеблемость, блуждаемость и вращаемость. В определениях 1 и 2 ниже именно такие показатели и введены (см. работы [1–6], где использованы несколько иные обозначения и названия).

Определение 1. Пусть заданы индекс $k \in \{1, \ldots, n\}$ и функционал $\mathrm{K} : \mathcal{S}^k \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Тогда:

1) определим *слабый* и *сильный нижние показатели* решения $x \in \mathcal{S}(A)$ соответственно формулами

$$\check{\varkappa}^\circ(x) = \inf_{L\in \operatorname{End}_k \mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{K}(Lx,t), \quad \check{\varkappa}^\bullet(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in \operatorname{End}_k \mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\,\mathrm{K}(Lx,t),$$

где $\operatorname{End}_k \mathbb{R}^n$ — множество линейных операторов $L \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ ранга k;

2) теми же формулами, но с заменой в них нижних пределов верхними, определим одноименные *верхние* показатели $\hat{\varkappa}^\circ(x)$ и $\hat{\varkappa}^\bullet(x)$, причем в случае совпадения верхних показателей с нижними будем называть их *точными*, опуская в их обозначениях галочки и крышечки, а в случае совпадения сильных со слабыми — называть их *абсолютными*, опуская пустые и полные кружочки;

3) если в каком-либо контексте конкретные знаки галочек и крышечек не имеют значения, то позволим себе заменять их *тильдами*, и аналогично, пустые и полные кружочки — *звездочками*, понимая под ними любой из замененных знаков, но только один и тот же в каждом соотношении.

Определение 2. Следуя определению 1, при $k = 1, n$ и соответственно $\mathrm{K} = \mathrm{N}, \mathrm{P}$ построим показатели $\varkappa = \nu, \rho$ *колеблемости* и *блуждаемости*, а при $k = 2$ и $\mathrm{K} = \Gamma, \Theta, \Omega$ — показатели $\varkappa = \gamma, \theta, \omega$ *частотной*, *ориентированной* и *неориентированной вращаемости*, использовав следующие конкретные функционалы от непрерывно дифференцируемой функции $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^k$ и числа $t > 0$:

а) $\mathrm{N}(u,t)$ — умноженное на π *число нулей* функции u на промежутке $(0;t]$, причем если хотя бы один нуль функции u на отрезке $[0;t]$ *кратен*, то считаем $\mathrm{N}(u,t) = \infty$;

б) $\mathrm{P}(u,t) \equiv \int_0^t |d(u(\tau)/|u(\tau)|)/d\tau|\, d\tau$ — *вариация следа* функции u за время от 0 до t, причем если функция u имеет на отрезке $[0;t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\mathrm{P}(x,t) = \infty$;

в) $\Gamma(u,t) \equiv \int_0^t |d(u(\tau)/|u(\tau)|)/d\tau|\, d\tau + \mathrm{N}(u,t)$ — *частотная вариация следа* функции u за время от 0 до t;

г) $\Theta(u,t) \equiv |\varphi(u,t)|$ — модуль непрерывного *ориентированного угла* $\varphi(u,t)$ между подвижным вектором $u(t)$ и начальным вектором $u(0)$ при условии $\varphi(u,0) = 0$, причем если функция u имеет на отрезке $[0;t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\Theta(u,t) = \infty = \varphi(u,t)$;

д) $\Omega(u,t) \equiv \int_0^t |\partial\varphi(u,\tau)/\partial\tau|\, d\tau$ — *вариация угла* функции u за время от 0 до t, причем если функция u имеет на отрезке $[0;t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\Omega(u,t) = \infty$.

Исчерпывающий набор соотношений. В следующих двух теоремах перечислены свойства введенных показателей и достаточно *полный* (как будет видно из теорем 3 и 4 ниже) набор соотношений между ними.

Теорема 1. *Каждый из показателей $\varkappa = \nu, \rho, \gamma, \theta, \omega$ любого решения $x \in \mathcal{S}(A)$ любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ не зависит от выбора базиса в $\mathbb{R}^n$, неотрицателен и удовлетворяет неравенствам*

$$\check{\varkappa}^*(x) \leqslant \hat{\varkappa}^*(x), \quad \tilde{\varkappa}^\circ(x) \leqslant \tilde{\varkappa}^\bullet(x), \tag{1}$$

а показатель блуждаемости — еще и оценке

$$\hat{\rho}^{\bullet}(x) \leqslant \|A\| \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \sup_{|u|=1} |A(\tau)u|\, d\tau. \tag{2}$$

Величина $\|A\|$ в формуле (2) может принимать и бесконечные значения, но в случае $A \in \mathcal{M}^n$ она может быть только конечной.

Теорема 2. *Для любой функции* $x \in \mathcal{S}^n$ *справедливы соотношения*

$$\tilde{\theta}^{\circ}(x) \leqslant \tilde{\nu}^{\circ}(x) = \tilde{\gamma}^{\circ}(x) = \tilde{\omega}^{\circ}(x) = \tilde{\rho}^{\circ}(x), \tag{3}$$

$$\check{\theta}^{\bullet}(x) \leqslant \check{\nu}^{\bullet}(x) \leqslant \check{\gamma}^{\bullet}(x) \leqslant \check{\omega}^{\bullet}(x) \leqslant \check{\rho}^{\bullet}(x), \tag{4}$$

$$\hat{\theta}^{\bullet}(x) \leqslant \hat{\nu}^{\bullet}(x), \quad \hat{\theta}^{\bullet}(x) \leqslant \hat{\omega}^{\bullet}(x), \quad \hat{\gamma}^{\bullet}(x) \leqslant \hat{\omega}^{\bullet}(x), \tag{5}$$

а при $n = 2$ *— еще и соотношения*

$$\tilde{\theta}(x) \leqslant \tilde{\gamma}^{\bullet}(x) = \tilde{\omega}^{\bullet}(x) = \tilde{\rho}^{\bullet}(x). \tag{6}$$

Случаи строгих неравенств. Ни одно из нестрогих неравенств (для показателей из определений 1 и 2), содержащихся в формулировках теорем 1 и 2, *не обращается*, вообще говоря, в равенство, что и утверждает

Теорема 3. *Для каждого нестрогого неравенства, фигурирующего среди соотношений* (1) – (6), *при наименьшем значении* $n > 1$, *для которого соответствующее строгое неравенство не противоречит теореме* 2, *существует система* $A \in \mathcal{M}^n$, *имеющая решение* $x \in \mathcal{S}(A)$ *с показателями, удовлетворяющими именно этому строгому неравенству, причем меньшее значение показателя в нем является точным абсолютным и равно 0, а большее значение* (*сильного показателя — везде, кроме неравенства* (2)) *является точным и равно* 1.

Если в теореме 3 множество возможных систем расширить за счет неограниченных систем, то есть разрешить брать $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, то большее значение показателя в описанном в формулировке строгом неравенстве можно сделать равным бесконечности (вместо прежней единицы).

Неупорядоченность сильных верхних показателей. Строка (5) в теореме 2, даже вместе с добавкой (6) в двумерном случае, выглядит заметно беднее строки (4), а тем более — строки (3). И не случайно: дело в том, что список соотношений в ней *невозможно пополнить* ни одним новым (логически не вытекающим из уже имеющихся) неравенством между сильными верхними показателями из определений 1 и 2.

Любое мыслимое строгое неравенство между сильными верхними показателями, не противоречащее теоремам 1 и 2, *реализуется* на некотором решении некоторой ограниченной системы, причем уже для наименьшего допустимого этими теоремами значения n и так, что меньшее значение показателя в неравенстве является точным абсолютным и равно 0, а большее значение сильного верхнего показателя равно ∞, как показывает

Теорема 4. *Для каждой из следующих цепочек соотношений между показателями существует такая система* $A \in \mathcal{M}^n$, *удовлетворяющая условию* $\|A\| = 0$, *что хотя бы одно ее решение* $x \in \mathcal{S}(A)$ *имеет соответствующие показатели:*

1) *при* $n = 2$ *— для цепочки*

$$0 = \theta(x) = \gamma(x) = \omega(x) = \rho(x) < \hat{\nu}^{\bullet}(x) = \infty;$$

2) *при* $n = 3$ *— для цепочек*

$$0 = \rho(x) < \hat{\theta}^{\bullet}(x) = \hat{\nu}^{\bullet}(x) = \hat{\gamma}^{\bullet}(x) = \hat{\omega}(x)^{\bullet} = \infty,$$

$$0=\theta(x)=\rho(x)<\hat{\nu}^\bullet(x)=\hat{\gamma}^\bullet(x)=\hat{\omega}(x)^\bullet=\infty,$$

$$0=\gamma(x)=\rho(x)<\hat{\theta}^\bullet(x)=\hat{\nu}^\bullet(x)=\hat{\omega}(x)^\bullet=\infty,$$

$$0=\theta(x)=\nu(x)=\rho(x)<\hat{\gamma}^\bullet(x)=\hat{\omega}(x)^\bullet=\infty,$$

$$0=\theta(x)=\gamma(x)=\rho(x)<\hat{\nu}^\bullet(x)=\hat{\omega}(x)^\bullet=\infty,$$

$$0=\theta(x)=\nu(x)=\gamma(x)=\rho(x)<\hat{\omega}(x)^\bullet=\infty.$$

Особенности уравнения второго порядка. Во множествах $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\mathcal{M}^n$ можно выделить подмножества $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ и $\mathcal{E}^n$ неограниченных и соответственно ограниченных систем, отвечающих каждое одному линейному *уравнению* n-го порядка.

Теорема 5. *Для любого решения $x\in\mathcal{S}(A)$ любой системы $A\in\widetilde{\mathcal{E}}^2$ верны соотношения*

$$\tilde{\theta}(x)=\tilde{\nu}(x)=\tilde{\gamma}^\circ(x)=\tilde{\omega}^\circ(x)=\tilde{\rho}^\circ(x)\leqslant\tilde{\gamma}^\bullet(x)=\tilde{\omega}^\bullet(x)=\tilde{\rho}^\bullet(x),$$

а в случае $A\in\mathcal{E}^2$ — даже равенства

$$\tilde{\theta}(x)=\tilde{\nu}(x)=\tilde{\gamma}(x)=\tilde{\omega}(x)=\tilde{\rho}(x).$$

Единственное неравенство теоремы 5, которое обращается в равенство для ограниченного уравнения второго порядка, в случае произвольного неограниченного уравнения второго порядка уже *нельзя заменить* равенством, что и подтверждает

Теорема 6. *Существует система $A\in\widetilde{\mathcal{E}}^2$, имеющая решение $x\in\mathcal{S}(A)$ с точными показателями*

$$0=\theta(x)=\nu(x)<\gamma^\bullet(x)=\omega^\bullet(x)=\rho^\bullet(x)=\infty.$$

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

2. Сергеев И. Н. *Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. №6. С. 21–26.

3. Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы* // Изв. РАН. Сер. математическая. 2012. Т. 76, №1. С. 149–172.

4. Сергеев И. Н. *Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем* // Матем. сб. 2013. Т. 204, №1. С. 119–138.

5. Сергеев И. Н. *Свойства характеристических частот линейного уравнения произвольного порядка* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442.

6. Сергеев И. Н. *Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. №10. С. 1353–1361.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ И ПЯТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Л.А. Хвощинская

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
ludmila.ark@gmail.com

Рассматривается проблема Римана определения системы двух функций $Y(z)=(y_1,y_2)$, которая при обходе вокруг особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1}=\infty$ $(n=3$ или $n=4)$ испытывает линейные преобразования $Y\to V_kY$ с помощью постоянных невырожденных матриц