ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И.В. Качан

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
ilyakachan@gmail.com

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + f(y(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $A(t)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — кусочно непрерывная функция, а $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — измеримая по Борелю функция, имеющая линейный порядок роста (т. е. существует $C > 0$ такое, что $\|f(y)\| \leqslant C(1 + \|y\|)$ для любых $y \in \mathbb{R}^d$), $f(0) = 0$. Определим многозначное отображение $F\colon \mathbb{R}^d \to 2^{\mathbb{R}^d}$ следующим образом:

$$F(y) = \bigcap_{\delta>0} \overline{\mathrm{co}}\,[f([y]_\delta)]_\delta.$$

Определение 1. Непрерывная функция $y(t), t \geqslant 0$ называется *решением системы* (1), если существует измеримая по Борелю функция $v\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ такая, что:

1) $v(t) \in F(y(t))$ для почти всех $t \geqslant 0$ и $\int_0^T |v(t)|\,dt < \infty$ для всех $T \in \mathbb{R}^+$;

2) для любых $t \in \mathbb{R}^+$ выполняется равенство

$$y(t) = K(t,0)y(0) + \int\limits_0^t K(t,s)v(s)\,ds,$$

где $K(t,s)$ — матрица Коши однородный системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t). \tag{2}$$

При сделанных предположениях относительно $A(t)$ и $f(y)$ решение системы (1) существует ([1, с. 117, 122]).

Определение 2. Нулевое решение системы (1) *экспоненциально устойчиво*, если для каждого решения $y(t)$ этой системы с достаточно малым значением $\|y(0)\|$ справедливо неравенство

$$\|y(t)\| \leqslant N\|y(0)\|e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0,$$

где N и α — положительные постоянные, не зависящие от выбора решения $y(t)$.

Теорема. *Предположим, что существуют постоянные* $C > 0$, $m > 1$ *такие, что*:

1) $\|f(y)\| \leqslant C\|y\|^m$ *в некоторой окрестности нуля* $U_R = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leqslant R\}$;

2) $(m-1)\lambda_d + \sigma_\Gamma < 0$, *где* λ_d *— старший (наибольший) характеристический показатель системы* (2), σ_Γ *— показатель неправильности Гробмана (см.* [2]).

Тогда нулевое решение системы (1) *является экспоненциально устойчивым.*

Литература

1. Леваков А. А. *Стохастические дифференциальные уравнения.* Мн.: БГУ, 2009.
2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.