6. Карпук М. В. *Точная бэровская характеристика показателей Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57. № 2. С. 11–16.
7. Карпук М. В. *Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1332–1338.
8. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.–Л.: ОНТИ, 1937. 304 с.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ГЕНЕРАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.Ф. Касабуцкий, Н.Г. Серебрякова

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
an_kasabutski@tut.by, serebryakova@tut.by

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

размерности $n \geqslant 2$ с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной $(\sup\limits_{t\geqslant 0} \|A(t)\| < +\infty)$ на временно́й полуоси $t \geqslant 0$ матрицей коэффициентов. Класс всех таких систем обозначается через $\mathcal{M}_n$. Считаем, что на классе $\mathcal{M}_n$ задана метрика равномерной сходимости на полуоси коэффициентов. Через $X_A(\cdot,\cdot)$ обозначим матрицу Коши системы (1).

Верхний $\Omega^0(A)$ и нижний $\omega_0(A)$ генеральные (особые) показатели системы (1) задаются равенствами [1, с. 172; 2, с. 110]

$$\Omega^0(A) = \varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A(t,\tau)\| \quad \text{и} \quad \omega_0(A) = \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X^{-1}(t,\tau)\|^{-1}. \tag{2}$$

Иногда, как, например, в [1, с. 172] или [3, с. 89], при вычислении пределов в соотношениях (2) к условию $t-\tau \to +\infty$ добавляют еще дополнительное условие $\tau \to +\infty$. Доказательство того, что это дополнительное условие не изменяет (по меньшей мере для систем из класса $\mathcal{M}_n$) величин (2), приведено в доказательстве теоремы 1 работы [4].

Показатели (2) (точнее, первый из них) введены П. Г. Болем [5] и независимо из других соображений К. П. Персидским [6] (см. также [1, с. 172; 2, с. 109–111]). Для (нелинейной) системы отрицательность верхнего генерального показателя ее системы первого приближения, если последняя принадлежит классу $\mathcal{M}_n$, является [5] необходимым и достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях, а также [6] необходимым и достаточным условием равномерной устойчивости по первому приближению. Отрицательность верхнего генерального показателя системы — достаточное условие ее равномерной устойчивости и необходимое и достаточное условие равномерной устойчивости всех систем из некоторой ее окрестности. Важная характеризация показателей (2) получена в работе [7]: верхний (нижний) генеральный показатель $\Omega^0(A)$ $(\omega_0(A))$ системы (1) есть точная верхняя (нижняя) грань верхних (нижних) показателей Боля ненулевых решений системы (1) при малых возмущениях ее коэффициентов. Эти и другие свойства величин (2) делают их одними из основных асимптотических характеристик линейных дифференциальных систем.

Наряду с показателями (2) рассмотрим введенные в работе [8] показатели

$$\Omega_0(A) = \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A(t,\tau)\| \quad \text{и} \quad \omega^0(A) = \varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X^{-1}(t,\tau)\|^{-1}. \tag{3}$$

Хотя для величин (3) к настоящему времени не известно каких-либо столь же важных свойств, как свойства, приведенные выше для величин (2), тем не менее, с формально-логической точки зрения, определение величин (2) не обладает никакими преимуществами перед определением величин (3). Более того, совместное рассмотрение величин (2) и (3), поскольку они взаимно дополняют друг друга, устанавливая точные двусторонние оценки изменения в логарифмической шкале норм $\|X_A(t,\tau)\|$ и $\|X_A^{-1}(t,\tau)\|$ при $t-\tau\to+\infty$, представляется естественным и необходимым. Показатели $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$ называются [8] соответственно старшим нижним и младшим верхним генеральными (особыми) показателями; по этой же терминологии показатели $\Omega^0(A)$ и $\omega_0(A)$ — это старший верхний и младший нижний генеральные (особые) показатели. Отметим, что аналогами некоторых свойств показателей (2) обладают введенные в работе [9] показатели $\Omega_0^*(A)$ и $\omega_*^0(A)$ системы (1). В этой же работе изучена устойчивость вверх и вниз этих и показателей (2) и (3) системы (1) при малых возмущениях ее коэффициентов. В частности, доказано, что в отличие от показателей (2), каждый из показателей (3) не устойчив ни вверх, ни вниз.

Из определений (2) и (3) очевидно вытекает, что генеральные показатели $\Omega^0(A)$, $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$, $\omega_0(A)$, удовлетворяют следующим неравенствам

$$\max\{\omega^0(A),\Omega_0(A)\}\leqslant\Omega^0(A)\quad\text{и}\quad\omega_0(A)\leqslant\min\{\omega^0(A),\Omega_0(A)\}.\tag{4}$$

Естественно возникает вопрос, дают ли неравенства (4) все возможные соотношения между генеральными показателями систем из класса $\mathcal{M}_n$. В частности, имеются ли какие-либо соотношения между показателями $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$? Ответ на сформулированные вопросы дает следующая теорема, которая показывает, что никаких других, кроме неравенств (4), соотношений между генеральными показателями на классе $\mathcal{M}_n$ систем не существует и что показатели $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$ вообще не связаны между собою никакими соотношениями.

Теорема. *Для каждого натурального $n\geqslant 2$ и четверки вещественных чисел $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ тогда и только тогда найдется система $A\in\mathcal{M}_n$, для которой выполнены равенства $\omega_0(A)=\alpha$, $\omega^0(A)=\beta$, $\Omega_0(A)=\gamma$ и $\Omega^0(A)=\delta$, когда для этих чисел выполняются неравенства $\max\{\beta,\gamma\}\leqslant\delta$ и $\alpha\leqslant\min\{\beta,\gamma\}$.*

Из этой теоремы вытекает, в частности, что старший нижний $\Omega_0(A)$ и младший верхний $\omega^0(A)$ генеральные показатели систем $A\in\mathcal{M}_n$ не связаны, вообще говоря, между собой никакими неравенствами. В самом деле, выбирая постоянные α, β, γ, δ удовлетворяющими соотношениям $\alpha\leqslant\beta<\gamma\leqslant\delta$, получим неравенство $\Omega_0(A)<\omega^0(A)$. Выбирая же их такими, чтобы $\alpha\leqslant\gamma<\beta\leqslant\delta$, получим обратное неравенство $\omega^0(A)<\Omega_0(A)$. В случае же, если $\alpha\leqslant\beta=\gamma\leqslant\delta$, имеем равенство этих показателей $\omega^0(A)=\Omega_0(A)$.

Литература

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970. 536 с.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966. 576 с.

3. Розенвассер Е. Н. *Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления.* М.: Наука, 1977. 344 с.

4. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1665–1676.

5. Bohl P. *Über Differentialungleichungen* // J. reine und angew. Math. 1913. Bd 144. Hf 4. S. 284–318.

6. Персидский К. П. *К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений. Часть первая* // Изв. физ.-мат. об-ва при Казанск. ун-те. 3-я серия. 1936–1937. Т. VIII. С. 47–85.

7. Vinograd R. E. *Simultaneous attainability of central Lyapunov and Bohl exponents for ODE linear systems* // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 88. № 4. P. 595–601.

8. Barabanov E. A., Konyukh A. V. *Bohl exponents of linear differential systems* // Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phys. 2001. V. 24. P. 151–158.

9. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Точные крайние границы показателей Боля решений линейной дифференциальной системы с малыми возмущениями* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 3. С. 36–51.