*их характеристические показатели составляют множество* $\Lambda(A,f)=\beta$, *принимающее в точках* $p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$ *с целочисленными координатами свои предельные значения*

$$\Lambda_p(A,f)=\begin{cases}\beta, & \textit{если}\ \ p_1\in Z\ \ \textit{и}\ \ p_2=0,\\ \beta\cap[\lambda_2,+\infty), & \textit{если}\ \ p_1\in Z\ \ \textit{и}\ \ p_2\in Z\setminus\{0\}.\end{cases}$$

Приведенные результаты получены при финансовой поддержке Белорусского республиканского (проект Ф14Р–011) и Российского (проект 14–01–90010 Бел-а) фондов фундаментальных исследований.

**Литература**

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitsch. 1930. Bd 32. Hf 5. S. 702–728.
2. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М.; Ижевск, 2006.
3. Izobov N. A. *Lyapunov Exponents and Stability.* Cambridge, 2012.
4. Ильин А. В., Изобов Н. А. *Бесконечномерный эффект Перрона смены всех значений характеристических показателей дифференциальных систем* // Докл. РАН. 2014. Т. 457. № 2. С. 147–151.
5. Ильин А. В., Изобов Н. А. *Счетный аналог эффекта Перрона смены значений характеристических показателей в любой окрестности начала координат* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1115–1117.

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА НЕПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА

**Н.А. Изобов[1], С.А. Мазаник[2]**

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
izobov@im.bas-net.by
[2] Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
smazanik@bsu.by

Рассматриваем исходные линейные дифференциальные системы

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad \|A(t)\|\leqslant a<+\infty,\quad t\geqslant 0, \tag{$1_A$}$$

с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами. Наряду с системами $(1_A)$ рассмотрим и возмущенные системы $(1_{A+Q})$ также с кусочно-непрерывными на полуоси $[0,+\infty)$ возмущениями $Q$, удовлетворяющими либо условию

$$\|Q(t)\|\leqslant C_Q e^{-\sigma t},\quad \sigma>0,\quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

либо более общему условию

$$\lambda[Q]\equiv\varlimsup_{t\to+\infty}t^{-1}\ln\|Q(t)\|\leqslant-\sigma<0. \tag{3}$$

Эти возмущения для $\sigma=0$ как в случае (2), так и в случае (3) дополнительно считаем исчезающими на бесконечности:

$$Q(t)\to 0\quad \text{при}\quad t\to+\infty. \tag{4}$$

В нашей работе [1] введены непустые так называемые множества неприводимости $N_2(a,\sigma)$ и $N_3(a,\sigma)$, $\sigma\in(0,2a]$, всех тех систем $(1_A)$ с матрицами коэффициентов $A$, имеющими на промежутке $[0,+\infty)$ величину нормы, не превосходящую $a$, для каждой из которых существует неприводимая к ней система $(1_{A+Q})$ с матрицей $Q$, удовлетворяющей соответственно либо условию (2), либо более общему условию (3). Эти множества связаны очевидным включением $N_2(a,\sigma) \subset N_3(a,\sigma)$ при $\sigma \in (0,2a]$ и из результатов работы [2] следует, что эти множества являются непустыми при $\sigma \in (0,2a]$ и пустыми при $\sigma > 2a$. Кроме того в работе [3] для этих множеств $N_i(a,\sigma)$, $i=2,3$, также связанных очевидным в силу их определения включениями $N_i(a,\sigma_1) \supseteq N_i(a,\sigma_2)$, $0<\sigma_1<\sigma_2 \leqslant 2a$, $i=2,3$, доказано строгое их сужение с возрастанием параметра $\sigma \in (0,2a]$, т.е. $N_i(a,\sigma_2) \subset N_i(a,\sigma_1)$ $\forall\ 0<\sigma_1< <\sigma_2 \leqslant 2a$, $i=2,3$.

В работе [1] также определены множества $R_2(A)$ (множества $R_3(A)$) всех тех значений параметра $\sigma>0$, для которых возмущенная система $(1_{A+Q})$ с любым возмущением $Q$, удовлетворяющим условию (2) (условию (3)), приводима к исходной системе $(1_A)$.

Непосредственно из определения множеств $R_2(A)$, $R_3(A)$ и множеств неприводимости следуют

**Теорема 1.** *Для того, чтобы система $(1_A)$ принадлежала множеству $N_i(a,\sigma)$, $a \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$, необходимо и достаточно выполнение условий $\sup\limits_{t\geqslant 0}\|A(t)\| \leqslant a$ и $\sigma \notin R_i(A)$, $i=2,3$.*

**Теорема 2.** *Множества $R_i(\cdot)$, $i=2,3$, инвариантны относительно преобразований Ляпунова, т.е. $R_i(A)=R_i(B)$ для любых двух систем $(1_A)$ и $(1_B)$ приводимых друг к другу некоторым преобразованием Ляпунова.*

Поскольку при $\sigma=0$ возмущения $Q(t)$, удовлетворяющие (2) и (3), удовлетворяют, как ранее было оговорено, также и (4), то множество возмущений, удовлетворяющих (2), совпадает с множеством возмущений, удовлетворяющих (3). Следовательно, множества неприводимости $N_2(a,0)$ и $N_3(a,0)$ совпадают при всех $a \geqslant 0$. Кроме того имеет место

**Теорема 3.** *Множества неприводимости $N_2(a,0)$, $N_3(a,0)$ совпадают со множеством всех систем $(1_A)$ с кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов $A(t)$, $\sup\limits_{t\geqslant 0}\|A(t)\| \leqslant a$ при всех $a \geqslant 0$.*

Аналогично тому, как это было сделано в [3] для множеств неприводимости как функций параметра $\sigma$, доказывается строгое сужение этих множеств при уменьшении параметра $a$.

**Теорема 4.** *Для множеств неприводимости $N_2(a,\sigma)$ и $N_3(a,\sigma)$ линейных дифференциальных $n$-мерных систем $(1_A)$ выполнены строгие включения*

$$N_i(a_1,\sigma) \subset N_i(a_2,\sigma) \quad \forall\ 0 \leqslant a_1 < a_2, \quad \forall\ \sigma \in [0,2a_2], \quad i=2,3.$$

В работе [3] определены предельные множества неприводимости

$$N_i(\sigma) \equiv \operatorname*{Lim}_{a\to+\infty} N_i(a,\sigma), \quad i=2,3.$$

Их свойства как функций параметра $\sigma$ аналогичны свойствам множеств неприводимости $N_i(a,\sigma)$, $i=2,3$. В силу теоремы 4 предельные множества неприводимости определены как объединение множеств неприводимости: $\operatorname*{Lim}\limits_{a\to+\infty} N_i(a,\sigma) = \bigcup_{a\geqslant 0} N_i(a,\sigma)$, и в силу их определения связаны включениями $N_2(\sigma) \subseteq N_3(\sigma)$ при всех $\sigma \geqslant 0$.

Имеют место следующие утверждения [4].

**Теорема 5.** *Предельные множества неприводимости $N_2(\sigma)$ и $N_3(\sigma)$ совпадают при $\sigma=0$ и не совпадают при всяком $\sigma>0$, т.е. $N_3(\sigma)\setminus N_2(\sigma) \neq \varnothing$ при всех $\sigma>0$.*

**Теорема 6.** *Для предельных множеств неприводимости $N_2(\sigma)$ и $N_3(\sigma)$ линейных дифференциальных $n$-мерных систем $(1_A)$ выполнены строгие включения*

$$N_i(\sigma_2) \subset N_i(\sigma_1) \quad \forall\ 0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2, \quad i=2,3.$$

**Теорема 7.** *Для предельных множеств неприводимости выполнены соотношения*

$$\operatorname*{Lim}_{\sigma\to\sigma_0+0} N_i(\sigma) \subset N_i(\sigma_0) \quad \forall\ \sigma_0 \geqslant 0, \quad i=2,3,$$

$$\underset{\sigma\to\sigma_0-0}{\mathrm{Lim}} N_2(\sigma) \supset N_2(\sigma_0) \quad \forall\ \sigma_0 > 0,$$

$$\underset{\sigma\to\sigma_0-0}{\mathrm{Lim}} N_3(a,\sigma) = N_3(a,\sigma_0) \quad \forall\ \sigma_0 > 0.$$

В заключение отметим, что предельные множества $N_i(\sigma)$, в отличие от множеств неприводимости $N_i(a,\sigma)$, являются инвариантными относительно преобразований Ляпунова.

**Литература**

1. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *Общий признак приводимости линейных дифференциальных систем и свойства коэффициентов приводимости* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 2. С. 191–202.

2. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях* // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 168–174.

3. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *О множествах линейных дифференциальных систем, к которым неприводимы возмущенные линейные системы* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1545–1550.

4. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *Параметрические свойства множеств неприводимости линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 979–989.*

## СТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ СНИЗУ И ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ СВЕРХУ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА СЕМЕЙСТВА МОРФИЗМОВ РАССЛОЕНИЙ МИЛЛИОНЩИКОВА

**М.В. Карпук**

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
m.vasilitch@gmail.com

В работе [1] В. М. Миллионщиков доказал, что для показателя Ляпунова $\lambda_i : B \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, семейства морфизмов $n$-мерного расслоения Миллионщикова $(E, p, B)$ типично по Бэру свойство полунепрерывности сверху, т. е., другими словами, множество точек полного метрического пространства $B$, в которых показатель $\lambda_i$ полунепрерывен сверху, содержит плотное в $B$ множество типа $G_\delta$. В частности, это означает [2], что для семейства

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

линейных дифференциальных систем с непрерывной зависимостью решений от параметра $\mu$, принадлежащего полному метрическому пространству $B$, матрица $A(\cdot,\cdot)$ коэффициентов которого при каждом фиксированном $\mu \in B$ кусочно-непрерывна и ограничена на временно́й полуоси $t \geqslant 0$, показатель Ляпунова $\lambda_i(\cdot)$, $i = \overline{1,n}$, его систем, рассматриваемый как функция параметра, в типичной точке полунепрерывен сверху.

Напомним (см., например, [3, с. 104]), что точка $x_0$ метрического пространства $\mathcal{M}$ называется точкой полунепрерывности сверху (полунепрерывности снизу) функции $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, если для любой последовательности $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек пространства $\mathcal{M}$, сходящейся к точке $x_0$, справедливо неравенство $f(x_0) \geqslant \overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} f(x_k)$ (неравенство $f(x_0) \leqslant \underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} f(x_k)$).

Естественно возникает вопрос, что́ представляют собой множество точек полунепрерывности сверху, а также множество точек полунепрерывности снизу показателя Ляпунова $\lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, семейства морфизмов $n$-мерного расслоения Миллионщикова и, в частности, семейства (1). В докладе получен полный ответ на поставленный вопрос. Известно, что в отличие