где $x^{[d]} = \operatorname{col}(x_1, \dots, x_d) = Q_1 v$, $x_{[r]} = \operatorname{col}(x_{d+1}, \dots, x_n) = Q_2 w$, $x = \operatorname{col}(x^{[d]}, x_{[r]})$, $\hat{C}^{(11)} = Q_1^{-1}\hat{A}_{d,d}^{(11)}Q_1$, $\hat{C}^{(21)} = Q_2^{-1}(\hat{A}_{r,d}^{(21)} + B_{r,n}\hat{U}_{n,d})Q_1$, $\hat{C}^{(22)} = Q_2^{-1}(\hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r})Q_2$, $\hat{U} = \{\hat{U}_{n,d}, \hat{U}_{n,r}\}$.

Имеет место

Теорема. *Если матрица* $\hat{C}^{(11)}$ *не имеет чисто мнимых собственных чисел* $\pm i\lambda_j$ $\lambda_j \in$ $\in L$ *и для мощности целевого множества имеет место оценка*

$$|L| > [(r - r_2)/2],$$

то задача управления асинхронным спектром для системы (1) *не имеет решений.*

Литература

1. Папалекси Н. Д. *Об одном случае параметрически связанных систем* // Journ. of Phys. Acad. Sc. USSR. 1939. Т. 1. С. 373–379.

2. Massera J. L. *Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales* // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4, № 1. P. 37–45.

3. Demenchuk A. K. *Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems* // Math. Bohemica. 2001. V. 126, № 1. P. 221–228.

4. Minorsky N. *On asynchronous actions* // Journ. of the Franclin Institute. 1955. V. 259, № 3. P. 209–219.

5. Пеннер Д. И., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И. и др. *Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний* // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109, вып. 1. С. 402–406.

6. Деменчук А. К. *Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.

БЕСКОНЕЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ЭФФЕКТА ПЕРРОНА СМЕНЫ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н.А. Изобов[1], **А.В. Ильин**[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
izobov@im.bas-net.by
[2] Московский государственный университет, Москва, Россия
iline@cs.msu.su

Рассматриваем двумерные линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и отрицательными характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) < 0$, являющиеся линейным приближением для нелинейных систем

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемым по своим аргументам m-возмущением

$$f : \|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0 \tag{3}$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и возможного роста вне ее.

По известному (частичному) эффекту Перрона [1; 2, с. 50–51] смены значений характеристических показателей существуют линейная система (1) с конкретными характеристическими показателями $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ и нелинейная система (2) с возмущением (3) второго порядка и всеми бесконечно продолжимыми решениями, часть которых совпадает с решениями исходной системы (1) и имеет показатель λ_2, а оставшаяся часть — общий положительный показатель, точно вычисленный в [3, с. 13–15]. Различным обобщениям этого эффекта посвящен цикл совместных работ авторов и предшествующих им также совместных работ первого автора и С.К. Коровина.

Настоящее сообщение посвящено бесконечным вариантам приведенного эффекта Перрона. Простейший из них содержит следующая

Теорема 1 [4]. *Для любых параметров* $m > 1$ *и* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$ *и непустых произвольных конечных или ограниченных счетных множеств* $\beta_i \subset [\lambda_i, +\infty)$, $i = 1, 2$, *удовлетворяющих условию отделенности* $\sup\beta_1 \leqslant \inf\beta_2$, *существуют:*

1) *система линейного приближения* (1) *с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на полуоси* $[1, +\infty)$ *коэффициентами и характеристическими показателями* $\lambda_1(A) = \lambda_1 \leqslant \lambda_2(A) = \lambda_2$,

2) *бесконечно дифференцируемое по своим аргументам* t, y_1, y_2 *и удовлетворяющее условию* (3) *возмущение* $f : [1, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *порядка* $m > 1$,

такие что все нетривиальные решения $y(t, c)$, $y(1, c) = c$, *нелинейной системы* (2) *бесконечно продолжимы вправо и их характеристические показатели составляют множества*

$$\{\lambda[y(\cdot, c)] : c_2 = 0,\ c_1 \neq 0\} = \beta_1,$$

$$\{\lambda[y(\cdot, c)] : c_2 \neq 0\} = \beta_2, \quad c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Исследование по линейному приближению как экспоненциальных устойчивости и условной устойчивости, так и неустойчивости нулевого решения системы (2), как правило, сводится к определению знаков характеристических показателей ее решений, начинающихся в любой как угодно малой окрестности начала координат. Поэтому возникает необходимость реализации бесконечного эффекта Перрона смены значений характеристических показателей именно на таких решениях системы (2). Справедлива

Теорема 2 [5]. *Для любых параметров* $m > 1$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$ *и произвольного счетного замкнутого сверху множества* $\beta \subset [\lambda_1, +\infty)$ *со свойствами* $\lambda_2 \leqslant b \equiv \sup\beta \in \beta$ *существуют:*

1) *линейная система* (1) *с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на полуоси* $[1, +\infty)$ *коэффициентами и характеристическими показателями* $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$,

2) *бесконечно дифференцируемое по времени* t *и переменным* y_1, y_2 m*-возмущение* $f(t, y_1, y_2)$,

такие что все нетривиальные решения $y(t, c)$ *нелинейной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и их показатели составляют предельное множество*

$$\Lambda_0(A, f) \equiv \operatorname*{Lim}_{\rho \to +0} \{\lambda[y(\cdot, c)] : 0 < \|c\| \leqslant \rho\} = \beta$$

и принимают значения

$$\lambda[y(\cdot, c)] = b, \quad \forall c \neq I \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1, \quad x_2 = 0\}.$$

В связи с утверждением предыдущей теоремы возникает вопрос о существовании помимо начала координат других точек $\mathbb{R}^2$, в любой окрестности которых реализуется бесконечный эффект Перрона. Счетность числа таких точек устанавливает

Теорема 3. *Для любых параметров* $m > 1$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$ *и произвольного конечного или ограниченного счетного множества* $\beta \subset [\lambda_1, +\infty)$, $\beta \cap [\lambda_2, +\infty) \neq \varnothing$, *существуют такие линейная система* (1) *и нелинейная* (2) *с* m*-возмущением* f, *что все нетривиальные решения системы* (2) *с линейным приближением* (1) *бесконечно продолжимы вправо и* *их характеристические показатели составляют множество* $\Lambda(A,f)=\beta$, *принимающее в точках* $p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$ *с целочисленными координатами свои предельные значения*

$$\Lambda_p(A,f)=\begin{cases}\beta, & \text{если } p_1\in Z \text{ и } p_2=0,\\ \beta\cap[\lambda_2,+\infty), & \text{если } p_1\in Z \text{ и } p_2\in Z\setminus\{0\}.\end{cases}$$

Приведенные результаты получены при финансовой поддержке Белорусского республиканского (проект Ф14Р–011) и Российского (проект 14–01–90010 Бел-а) фондов фундаментальных исследований.

Литература

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitsch. 1930. Bd 32. Hf 5. S. 702–728.

2. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М.; Ижевск, 2006.

3. Izobov N. A. *Lyapunov Exponents and Stability.* Cambridge, 2012.

4. Ильин А. В., Изобов Н. А. *Бесконечномерный эффект Перрона смены всех значений характеристических показателей дифференциальных систем* // Докл. РАН. 2014. Т. 457. № 2. С. 147–151.

5. Ильин А. В., Изобов Н. А. *Счетный аналог эффекта Перрона смены значений характеристических показателей в любой окрестности начала координат* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1115–1117.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА НЕПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА

Н.А. Изобов[1], **С.А. Мазаник**[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
izobov@im.bas-net.by
[2] Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
smazanik@bsu.by

Рассматриваем исходные линейные дифференциальные системы

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad \|A(t)\|\leqslant a<+\infty,\quad t\geqslant 0, \tag{1_A}$$

с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами. Наряду с системами (1_A) рассмотрим и возмущенные системы (1_{A+Q}) также с кусочно-непрерывными на полуоси $[0,+\infty)$ возмущениями Q, удовлетворяющими либо условию

$$\|Q(t)\|\leqslant C_Q e^{-\sigma t},\quad \sigma>0,\quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

либо более общему условию

$$\lambda[Q]\equiv\varlimsup_{t\to+\infty}t^{-1}\ln\|Q(t)\|\leqslant-\sigma<0. \tag{3}$$

Эти возмущения для $\sigma=0$ как в случае (2), так и в случае (3) дополнительно считаем исчезающими на бесконечности:

$$Q(t)\to 0\quad\text{при}\quad t\to+\infty. \tag{4}$$

В нашей работе [1] введены непустые так называемые множества неприводимости $N_2(a,\sigma)$ и $N_3(a,\sigma)$, $\sigma\in(0,2a]$, всех тех систем (1_A) с матрицами коэффициентов A, имеющими на