4. Миллионщиков В. М. *Задачи о минорантах показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2014–2015.

5. Рахимбердиева М. И. *О бэровском классе показателей Ляпунова* // Матем. заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 925–931.

6. Миллионщиков В. М. *Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408–1416.

7. Сергеев И. Н. *Класс Бэра максимальных показателей линейных систем* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1574.

8. Быков В. В., Салов Е. Е. *О классе Бэра минорант показателей Ляпунова* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 2003. № 1. С. 33–40.

9. Сергеев И. Н. *К задаче о классе Бэра минорант показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1600–1601.

10. Ветохин А. Н. *К бэровской классификации остаточных показателей* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1039–1042.

11. Миллионщиков В. М. *Нерешенная задача о мажорантах показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1457.

12. Ветохин А. Н. *Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1313–1317.

13 Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H. *Topological entropy* // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 114. No 2. P. 309–319.

14. Каток А. Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем.* М.: Факториал, 1999.

15. Ветохин А. Н. *О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем* // Матем. заметки. 2013. Т. 93. Вып. 3. С. 347–356.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С БЛОКАМИ НЕПОЛНОГО РАНГА

А.К. Деменчук

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
demenchuk@im.bas-net.by

В 30-х годах прошлого века в одном из ряда исследований параметрического возбуждения, проводимых под общим руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, было обнаружено весьма значительное отклонение реальных характеристик от расчетных. В частности, скорость вращения электромотора оказалась не синхронна с частотой тока питания. Как выяснилось, такое непривычное с точки зрения обычной электротехники явление обусловлено реакцией вращающейся механической системы на параметрически связанную с ней электрическую колебательную систему. В результате анализа системы, состоящей из синусоидального источника напряжения, цепи питания с включенной в нее некоторой емкостью для компенсации переменной индуктивности мотора, Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [1], в отличие от обычного параметрического возбуждения, которое имело место только при целочисленном отношении частот, была продемонстрирована новая своеобразная трансформации частот, находящихся практически в любом отношении с частотой изменения параметров системы.

Тем не менее при изучении периодических решений дифференциальных систем еще долгое время предполагалось, что периоды самой системы и ее решений всегда находятся в рациональном отношении. Только в 1950 г. Х. Массера показал возможность существования иррационального отношения периодов решения и самой системы [2]. Такие периодические решения и описываемые ими колебания названы сильно нерегулярными [3]. Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, называют асинхронным режимом [4, 5]. Задача синтеза асинхронных режимов линейных систем сформулирована в виде задачи управления спектром нерегулярных колебаний [6].

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

где $A(t)$ — непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица, B — постоянная $(n \times n)$-матрица. Предположим, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x \tag{2}$$

с непрерывной ω-периодической $(n \times n)$-матрицей $U(t)$.

Задачу выбора такой матрицы $U(t)$ (коэффициента обратной связи) управления (2), чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x$$

имела сильно нерегулярные периодические решения с заданным спектром частот L (целевым множеством) будем называть *задачей управления асинхронным спектром с целевым множеством* L.

Условия разрешимости поставленной задачи для невырожденной матрицы B указаны в [6]. Поэтому будем рассматривать случай, когда $\operatorname{rank} B = r < n \quad (n - r = d)$, причем, без ограничения общности можно считать, что первые d строк этой матрицы нулевые. Учитывая такую структуру матрицы B, представим матрицу коэффициентов $A(t)$ в блочном виде. Пусть $A^{(11)}_{d,\,d}(t)$, $A^{(21)}_{r,\,d}(t)$ — ее левые верхний и нижний, а $A^{(12)}_{d,\,r}(t)$, $A^{(22)}_{r,\,r}(t)$ — правые верхний и нижний блоки (нижние индексы указывают размерность блоков). Соответственно такому представлению усредненную матрицу $\hat{A} = \omega^{-1}\int_0^\omega A(s)\,ds$ в свою очередь разобьем на такие же четыре блока $\hat{A}^{(11)}_{d,d}$, $\hat{A}^{(21)}_{r,d}$, $\hat{A}^{(12)}_{d,r}$, $\hat{A}^{(22)}_{r,r}$ аналогичных размерностей. Будем считать, что матрица $\hat{A}$ имеет нижнюю блочно-треугольную форму, т. е. $\hat{A}^{(12)}_{d,r} = 0$.

Пусть $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{r'}\}$ — целевое множество частот, элементы которого попарно различны, соизмеримы между собой и несоизмеримы с $2\pi/\omega$. В таком случае найдется наибольшее положительное вещественное λ, которому будут кратны числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r'}$, т.е. $\lambda_j = k_j\lambda \quad (k_j \in N;\ j = \overline{1, r'})$. Обозначим $\Omega = 2\pi/\lambda$, при этом отношение чисел ω и Ω иррационально.

Предположим, что верхние левый и правый блоки $\tilde{A}^{(11)}_{d,d}$, $\tilde{A}^{(12)}_{d,r}$ матрицы $\tilde{A}(t) = A(t) - \hat{A}$ имеют неполный столбцовый ранг

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \tilde{A}^{(11)}_{d,d} = r_1 < d, \quad \operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \tilde{A}^{(12)}_{d,r} = r_2 < r,$$

более того

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \{\tilde{A}^{(11)}_{d,d}, \tilde{A}^{(12)}_{d,r}\} = p < r_1 + r_2.$$

В силу первого условия найдется постоянная неособенная $(d \times d)$-матрица Q_1 такая, что у матрицы $\tilde{A}^{(11)}_{d,d}(t)Q_1$ первые $d_1 = d - r_1$ столбцов нулевые, в то время как остальные r_1 столбцов будут линейно независимыми. Аналогично из второго условия вытекает существование постоянной неособенной $(r \times r)$-матрицы Q_2 такой, что у матрицы $A^{(11)}_{d,r}(t)Q_2$ первые $d_2 = r - r_2$ столбцов нулевые, в то время как остальные r_2 столбцов будут линейно независимыми.

Согласно [3] для решения поставленной задачи необходимо, чтобы Ω-периодические решения имелись у блочной системы

$$\dot{v} = \hat{C}^{(11)}v, \quad \dot{w} = \hat{C}^{(21)}v + \hat{C}^{(22)}w,$$

где $x^{[d]} = \mathrm{col}\,(x_1,\ldots,x_d) = Q_1 v$, $x_{[r]} = \mathrm{col}\,(x_{d+1},\ldots,x_n) = Q_2 w$, $x = \mathrm{col}\,(x^{[d]}, x_{[r]})$, $\hat{C}^{(11)} = Q_1^{-1}\hat{A}^{(11)}_{d,d}Q_1$, $\hat{C}^{(21)} = Q_2^{-1}(\hat{A}^{(21)}_{r,d} + B_{r,n}\hat{U}_{n,d})Q_1$, $\hat{C}^{(22)} = Q_2^{-1}(\hat{A}^{(22)}_{r,r} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r})Q_2$, $\hat{U} = \{\hat{U}_{n,d}, \hat{U}_{n,r}\}$.

Имеет место

Теорема. *Если матрица $\hat{C}^{(11)}$ не имеет чисто мнимых собственных чисел $\pm i\lambda_j$ $\lambda_j \in$ $\in L$ и для мощности целевого множества имеет место оценка*

$$|L| > [(r - r_2)/2],$$

то задача управления асинхронным спектром для системы (1) не имеет решений.

Литература

1. Папалекси Н. Д. *Об одном случае параметрически связанных систем* // Journ. of Phys. Acad. Sc. USSR. 1939. Т. 1. С. 373–379.

2. Massera J. L. *Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales* // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4, № 1. P. 37–45.

3. Demenchuk A. K. *Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems* // Math. Bohemica. 2001. V. 126, № 1. P. 221–228.

4. Minorsky N. *On asynchronous actions* // Journ. of the Franclin Institute. 1955. V. 259, № 3. P. 209–219.

5. Пеннер Д. И., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И. и др. *Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний* // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109, вып. 1. С. 402–406.

6. Деменчук А. К. *Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.

БЕСКОНЕЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ЭФФЕКТА ПЕРРОНА СМЕНЫ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н.А. Изобов[1], **А.В. Ильин**[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
izobov@im.bas-net.by
[2] Московский государственный университет, Москва, Россия
iline@cs.msu.su

Рассматриваем двумерные линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и отрицательными характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) < 0$, являющиеся линейным приближением для нелинейных систем

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемым по своим аргументам m-возмущением

$$f : \|f(t,y)\| \leqslant C_f\|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0 \tag{3}$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и возможного роста вне ее.

По известному (частичному) эффекту Перрона [1; 2, с. 50–51] смены значений характеристических показателей существуют линейная система (1) с конкретными характеристическими показателями $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ и нелинейная система (2) с возмущением (3) второго