$$\lim_{\varepsilon\to+0}\sup_{\|Q\|\leqslant\varepsilon}\sup_{x\in\mathcal{X}(A+Q)}\underline{\beta}[x]=\lim_{T\to+\infty}\varliminf_{k-m\to+\infty}\frac{1}{(k-m)T}\sum_{i=m+1}^{k}\ln\|X_A(iT,(i-1)T)\|\overset{\text{def}}{=}\Omega_0^*(A).$$

где $k,m\in\mathbb{N}$.

То, что правые части этих равенств корректно определены (т. е. то, что внешний предел в правых частях этих равенств существует), устанавливается в доказательстве теоремы 2.

Приведенная выше теорема Р. Э. Винограда [2] (см. соотношения (4)) и теорема 2 дают точные крайние границы изменения (подвижности) верхних и нижних показателей Боля решений под действием малых возмущений матрицы коэффициентов системы (1). Рассмотрим, как могут изменяться сами эти точные границы $\Omega^0(A)$, $\omega_*^0(A)$ и $\Omega_0^*(A)$, $\omega_0(A)$, а также величины $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$ под действием малых возмущений матрицы коэффициентов системы (1). Напомним, что вещественнозначная функция, заданная на метрическом пространстве $\mathcal{M}_n$, называется устойчивой вверх (соответственно вниз), если она является полунепрерывной сверху (соответственно снизу) функцией на этом пространстве.

Показатель $\Omega^0(\cdot)$ устойчив вверх, а показатель $\omega_0(\cdot)$ — вниз [1, с. 180], но в противоположных направлениях эти показатели, если $n\geqslant 2$, неустойчивы [4]. Этими же свойствами, как показывают следующие теоремы, обладают и показатели $\Omega_0^*(\cdot)$ и $\omega_*^0(\cdot)$, но не $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$.

Теорема 3. *Показатель* $\Omega_0^*(\cdot)$ *устойчив вверх, а показатель* $\omega_*^0(\cdot)$ *— вниз.*

Теорема 4. *Если* $n\geqslant 2$, *то показатель* $\Omega_0^*(\cdot)$ *неустойчив вниз, а показатель* $\omega_*^0(\cdot)$ *— вверх, т. е. при* $n\geqslant 2$ *существуют такие системы* $A\in\mathcal{M}_n$, *для которых выполнены соответственно неравенства*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\inf_{\|Q\|\leqslant\varepsilon}\Omega_0^*(A+Q)<\Omega_0^*(A)\quad \text{и}\quad \lim_{\varepsilon\to+0}\sup_{\|Q\|\leqslant\varepsilon}\omega_*^0(A+Q)>\omega_*^0(A).$$

Теорема 5. *Каждый из показателей* $\Omega_0(A)$ *и* $\omega^0(A)$ *не устойчив ни вверх, ни вниз при малых возмущениях матрицы коэффициентов.*

Литература

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970. 536 с.

2. Vinograd R. E. *Simultaneous attainability of central Lyapunov and Bohl exponents for ODE linear systems* // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 88. № 4. P. 595–601.

3. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1665–1676.

4. Миллионщиков В. М. *О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 4. С. 749–750.

О ВНУТРЕННОСТИ И КРАЕ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ КЛАССОВ СЛАБО И ПОЧТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ДИХОТОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.Б Бекряева

Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь
evgenia.bekriaeva@gmail.com

Для натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant 0,\tag{1}$$

с матрицей коэффициентов $A(\cdot):\ [0,+\infty)\to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, кусочно-непрерывной и ограниченной ($\sup\{\|A(t)\|:t\geqslant 0\}<+\infty$) на временнóй полуоси $t\geqslant 0$. Будем отождествлять систему (1) и ее матрицу коэффициентов и вследствие этого писать $A\in\mathcal{M}_n$. Считаем, что на множестве $\mathcal{M}_n$ задана метрика $\operatorname{dist_u}(\cdot,\cdot)$ равномерной сходимости на полуоси коэффициентов, т. е.

$$\operatorname{dist_u}(A,B)=\sup\{\|A(t)-B(t)\|:\ t\geqslant 0\},\quad A,B\in\mathcal{M}_n.$$

В работе [1] введен класс систем, названных в [2] слабо экспоненциально дихотомическими на полуоси и представляющих собой обобщение экспоненциально дихотомических на полуоси систем. Система $A\in\mathcal{M}_n$ называется слабо экспоненциально дихотомической (на полуоси), если существуют такие положительные постоянные ν_1 и ν_2 и такое разложение пространства $\mathbb{R}^n=L_-\oplus L_+$ начальных (при $t=0$) данных в прямую сумму подпространств L_- и L_+ (причем, случай нулевой размерности одного из подпространств не исключается), что для ее решений $x(\cdot)$ выполняются условия:

а) если $x(0)\in L_-$, то $\|x(t)\|\leqslant c_1(x)\,\mathrm{e}^{-\nu_1(t-s)}\|x(s)\|$ для любых $t\geqslant s\geqslant 0$,

б) если $x(0)\in L_+$, то $\|x(t)\|\geqslant c_2(x)\,\mathrm{e}^{\nu_2(t-s)}\|x(s)\|$ для любых $t\geqslant s\geqslant 0$,

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от выбора решения $x(\cdot)$ (что и отражено в обозначении этих постоянных).

Если положительные постоянные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можно выбрать одними и теми же для всех решений из L_- и L_+ соответственно (т. е. если оценки *а*) и *б*) равномерны по этим постоянным), то приходим к классическому определению экспоненциально дихотомической системы [3, с. 233–234]. Класс n-мерных слабо экспоненциально дихотомических систем обозначим через WE_n, а класс n-мерных экспоненциально дихотомических систем, как принято, — через E_n. Очевидно равенство $E_1=WE_1$. То, что при $n\geqslant 2$ включение $E_n\subset WE_n$ является собственным, вытекает из работы [4] и отмечено в [1]. В работе [1] доказано, что, описательно говоря, неравномерность оценок *а*) и *б*) может быть сделана сколь угодно малой, и, тем не менее, система не будет экспоненциально дихотомической.

Таким образом, определение слабо экспоненциально дихотомических систем отличается от определения экспоненциально дихотомических систем только отказом от требования равномерности оценок по соответствующим постоянным-множителям. Требование равномерности оценок в определении экспоненциально дихотомической системы мы ослабим и в несколько другом отношении, введя еще один, промежуточный между классами E_n и WE_n, класс систем, который назовем классом почти экспоненциально дихотомических систем и обозначим AWE_n. Систему $A\in\mathcal{M}_n$ назовем почти экспоненциально дихотомической (на полуоси), если существуют положительные постоянные c_1, c_2 и ν_1, ν_2 и разложение пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t=0$) данных в прямую сумму подпространств L_- и L_+ и для каждого ее решения $x(\cdot)$ с начальным вектором $x(0)\in L_-\cup L_+$ число $t_x\geqslant 0$, такие, что выполнены два условия:

а’) если $x(0)\in L_-$, то $\|x(t)\|\leqslant c_1\,\mathrm{e}^{-\nu_1(t-s)}\|x(s)\|$ для любых $t\geqslant s\geqslant t_x$,

б’) если $x(0)\in L_+$, то $\|x(t)\|\geqslant c_2\,\mathrm{e}^{\nu_2(t-s)}\|x(s)\|$ для любых $t\geqslant s\geqslant t_x$.

Другими словами, условия *а’*) и *б’*) означают равномерность их оценок по постоянным-множителям c_1 и c_2 не при всех $t\geqslant 0$ (как в случае экспоненциально дихотомических систем), а только при t, больших некоторого t_x, своего для каждого решения $x(\cdot)$.

Из результатов работ [4] и [1] вытекает

Теорема 1. *Для любого $n\geqslant 2$ имеют место включения $E_n\subset AWE_n\subset WE_n$, каждое из которых является собственным.*

Поскольку определения классов E_n, AWE_n и WE_n достаточно близки, то представляется правдоподобным, что и их свойства, если и отличаются, то несущественно. В частности, хорошо известно (например, [3, с. 260]), что свойство системы из метрического пространства $\mathcal{M}_n$ быть экспоненциально дихотомической является грубым, т. е. множество E_n является открытым в этом пространстве. Следующая теорема показывает, что для слабо и почти экспоненциально дихотомических систем свойство грубости места не имеет.

Теорема 2. *Для любого натурального $n \geqslant 2$ в метрическом пространстве $\mathcal{M}_n$ с метрикой равномерной сходимости на полуоси внутренность $\operatorname{int} WE_n$ множества WE_n слабо экспоненциально дихотомических систем и внутренность $\operatorname{int} AWE_n$ множества AWE_n почти экспоненциально дихотомических систем совпадают между собой и совпадают с множеством экспоненциально дихотомических систем, т. е. $\operatorname{int} WE_n = \operatorname{int} AWE_n = E_n$ для любого $n \geqslant 2$.*

Напомним, что краем множества M в топологическом пространстве называется [5] разность между множеством и его внутренностью: $M \setminus \operatorname{int} M$. Из теоремы 2 с помощью несложных рассуждений вытекает

Следствие. *В метрическом пространстве $\mathcal{M}_n$, $n \geqslant 2$, с метрикой равномерной сходимости на полуоси каждое из множество WE_n и AWE_n не является ни открытым, ни замкнутым, все их точки предельные, а край $\operatorname{ed} WE_n$ множества WE_n (край $\operatorname{ed} AWE_n$ множества AWE_n) составляют в точности слабо (почти) экспоненциально дихотомические системы, не являющиеся экспоненциально дихотомическими.*

Литература

1. Бекряева Е. Б. *О равномерности оценок норм решений экспоненциально дихотомических систем* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 626–636.

2. Бекряева Е. Б. *Линейные дифференциальные системы, близкие к экспоненциально дихотомическим* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55. № 1. С. 36–40.

3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970. 536 с.

4. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1665–1676.

5. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. *Общая топология.* М.: Высшая школа, 1979. 336 с.

МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А.Н. Бондарев

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

alex-bondarev@tut.by

Рассмотрим краевую задачу для матричного уравнения Ляпунова

$$\frac{dX}{dt} = (A_0(t) + \lambda A_1(t))X + XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

с условием

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A_0(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$, $F(t)$ — матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей, M_i — заданные постоянные $(n \times n)$-матрицы, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В данной работе, являющейся продолжением [1, 2] и развитием [3, 4], с помощью подхода [5, гл. I] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и оценка области локализации решения задачи (1), (2).

Примем следующие обозначения:

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|, \quad v_i = \|V_i\|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$