ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭМДЕНА — ФАУЛЕРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

И.В. Асташова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
ast@diffiety.ac.ru

1. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x)+p_0|y|^k\operatorname{sgn} y=0,\quad 0<k<1,\quad p_0>0. \tag{1}$$

Доказано существование колеблющегося решения специального вида этого уравнения.

Теорема 1. *Для любого целого* $n>2$ *и любого положительного* $k<1$ *существует такая знакопеременная периодическая функция* $h(s)$, *что для любого* p_0, *удовлетворяющего неравенству* $(-1)^n p_0>0$, *и любого* $x^*\in\mathbb{R}$ *функция*

$$y(x)=|\,p_0\,|^{-1/(k-1)}\,(x^*-x)^{-n/(k-1)}h(\log(x^*-x)),\quad -\infty<x<x^*,$$

является решением уравнения (1).

2. Приводится асимптотическая классификация решений уравнений

$$y^{\mathrm{IV}}(x)+p_0|y|^k\operatorname{sgn} y=0,\quad 0<k<1,\quad p_0>0. \tag{2}$$

$$y^{\mathrm{IV}}(x)-p_0|y|^k\operatorname{sgn} y=0,\quad 0<k<1,\quad p_0>0. \tag{3}$$

Асимптотическая классификация решений сингулярного уравнения $(0<k<1)$ вида (1) третьего порядка приведена в [1], уравнения (2) — в [6], регулярного уравнения $(k>1)$ вида (1) третьего порядка — в [3, гл. 7], регулярного уравнения (3) — в [3, гл. 7 и 5]. В [2, 3] содержатся результаты об асимптотическом поведении решений уравнений (1) произвольного порядка n.

В случае регулярной нелинейности, $k>1$, рассматриваются только максимально продолженные решения, так как решения могут вести себя особым образом только вблизи границ области определения. Если $k<1$, то особое поведение может проявляться и во внутренней точке области определения. Поэтому, как было отмечено в [6], будем рассматривать *максимально продолженные единственным образом* решения, то есть решения $y:(a,\,b)\mapsto\mathbb{R}$, где $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, для которых выполняются следующие два условия:

(i) уравнение не имеет других решений, равных y на некотором подынтервале интервала $(a,\,b)$ и не равных y в некоторой точке из $(a,\,b)$;

(ii) уравнение либо не имеет решений, определеннных на другом интервале, содержащем $(a,\,b)$, и равных y на $(a,\,b)$, либо имеет по крайней мере два таких решения, не равных друг другу в точках, сколь угодно близких к границе интервала $(a,\,b)$.

Теорема 2. *Пусть* $0<k<1$ *и* $p_0>0$. *Тогда все максимально продолженные единственным образом решения уравнения* (1) *делятся на* 13 *типов в соответствии с их асимптотическим поведением.*

1 –2. *Определенные на полуоси* $(b,+\infty)$ *решения со степенным асимптотическим поведением вблизи границ области определения* (*с одинаковыми знаками* $\pm$) :

$$y(x)\sim\pm C_{4k}\,(x-b)^{-4/(k-1)},\quad x\to b+0,\quad y(x)\sim\pm C_{4k}\,x^{-4/(k-1)},\quad x\to+\infty,$$

где $C_{4k}=(4p_0^{-1}(k+3)(2k+2)(3k+1)(k-1)^{-4})^{1/(k-1)}$.

3 –4. *Определенные на полуоси* $(-\infty,b)$ *решения со степенным асимптотическим поведением вблизи границ области определения* (*с одинаковыми знаками* $\pm$) :

$$y(x)\sim\pm C_{4k}|x|^{-4/(k-1)},\quad x\to-\infty,\quad y(x)\sim\pm C_{4k}(b-x)^{-4/(k-1)},\quad x\to b-0.$$

5. *Определенные на всей прямой периодические колеблющиеся решения. Все они могут быть получены из одного, скажем,* $z(x)$, *при помощи соотношения* $y(x) = \lambda^4 z(\lambda^{k-1}x + x_0)$ *с произвольными* $\lambda > 0$ *и* x_0. *Таким образом, существуют такие решения с произвольным максимумом* $h > 0$ *и с произвольным периодом* $T > 0$, *но не с произвольной парой* (h, T).

6 – 7. *Определенные на* $(-\infty, +\infty)$ *решения, являющиеся колеблющимися на* $x \to -\infty$, *и имеющие степенное асимптотическое поведение на* $+\infty$: $y(x) \sim \pm C_{4k} x^{-4/(k-1)}$, $x \to +\infty$. *Для каждого решения этого типа существует конечный предел модулей его локальных экстремумов при* $x \to -\infty$.

8 – 9. *Определенные на* $(-\infty, +\infty)$ *решения, являющиеся колеблющимися на* $x \to +\infty$, *и имеющие степенное асимптотическое поведение на* $-\infty$: $y(x) \sim \pm C_{4k} |x|^{-4/(k-1)}$, $x \to -\infty$. *Для каждого решения этого типа существует конечный предел модулей его локальных экстремумов при* $x \to +\infty$.

10 – 13. *Определенные на* $(-\infty, +\infty)$ *имеющие степенное асимптотическое поведение на* $-\infty$ *и* $+\infty$ *(с четырьмя возможными парами знаков* $\pm$*)* : $y(x) \sim \pm C_{4k} |x|^{-4/(k-1)}$, $x \to \pm\infty$.

Замечание. Отметим, что периодические решения, определенные в п. 5, существуют у уравнения (2) и в случае регулярной нелинейности [1].

Литература

1. Асташова И. В. *Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 11. С. 847–848.

2. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1990. 432 с.

3. Асташова И. В. *Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

4. Astashova I. *On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden—- Fowler type differential equation* // Boundary Value Problems. 2014. № 2014:174. P. 1–8.

5. Astashova I. V. *On Asymptotic Behavior of Solutions to a Forth Order Nonlinear Differential Equation.* Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Pure Mathematics (PUMA '14), Tenerife, Spain, January 10–12, 2014, ISBN: 978-960-474-360-5, WSEAS Press, 2014. P. 32–41.

6. Асташова И. В. *Асимптотическая классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена — Фаулера четвертого порядка с постоянным положительным потенциалом* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 827–828.

~~О БЭРОВСКОМ КЛАССЕ И СТРОЕНИИ СПЕКТРОВ ВЕРХНИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ НУЛЕЙ, ЗНАКОВ И КОРНЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ~~

~~Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич~~

~~Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь~~

~~bar@im.bas-net.by, voidelevich@gmail.com~~

~~Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка $(n \in \mathbb{N})$~~

$$\cancel{y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, +\infty),} \qquad (1)$$

~~с непрерывными коэффициентами $a_i(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Будем отождествлять уравнение (1) и его строку $a = a(\cdot) = (a_1(\cdot), \ldots, a_n(\cdot))$ коэффициентов и поэтому обозначать уравнение (1) также через a. Пусть $S_*(a)$ — множество всех ненулевых решений уравнения a.~~

~~Символом $\varkappa$ обозначим величину, принимающую значения в множестве из трех элементов $\{0, -, +\}$. Для ненулевого решения $y(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ уравнения (1) через $\nu^{\varkappa}(y(\cdot); t)$ обозначим: число нулей сужения $y|_{(0,t)}(\cdot)$, если $\varkappa = 0$; число тех нулей сужения $y|_{(0,t)}(\cdot)$,~~