АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КОРРЕКТНЫЕ КРАВЕЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЗ СВОЙСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ

А.Б. Антоневич[1,2], **Е.В. Пантелеева**[3]

[1] Белгосуниверситет, механико-математический факультет, Минск, Беларусь
[2] Университет в Белостоке, факультет математики и информатики, Белосток, Польша
antonevich@bsu.by
[3] Брестский госуниверситет, физико-математический факультет, Брест, Беларусь
kati1986@tut.by

Изучению линейных дифференциально-операторных уравнений вида

$$Lu(t) \equiv \frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{J}, \tag{1}$$

и краевых задач для них посвящена обширная литература. Здесь $\mathbb{J}$ есть прямая $\mathbb{R}$ или полупрямая $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, u и f есть функции на $\mathbb{J}$ со значениями в заданном банаховом пространстве Y, $A(t)$ — ограниченная сильно непрерывная функция переменной t со значениями в пространстве $LB(Y)$ линейных ограниченных операторов в Y. Такие уравнения рассматривались также в случае, когда значения $A(t)$ являются неограниченными операторами, но интересующие нас эффекты появляются в рассматриваемом более простом случае ограниченных коэффициентов. Уравнение обычно рассматривается в некотором банаховом пространстве F, состоящем из функций со значениями в Y, для определенности будем считать, что $F = C_b(\mathbb{J}, Y)$, т. е. состоит из ограниченных непрерывных функций со значениями в Y и снабжено нормой

$$|||u||| = \sup_t \|u(t)\|_Y.$$

В общей постановке *краевая задача* ставится с помощью задания векторного подпространства $V \subset F$ и заключается в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условию $u \in V$.

В классических примерах краевые задачи задаются с использованием значений решения на границе области, что оправдывает термин «краевое». В общем случае при постановке задачи краевые условия могут быть заданы с использованием значений функции внутри области, но такие задачи тоже по традиции называют краевыми.

Краевая задача называется *корректной,* если для любого $f \in F$ существует единственное решение задачи и оно непрерывно зависит от f.

Заметим, что задача Коши, заданная условием $u(0) = 0$, является корректной только в исключительных случаях. В связи с этим подробно исследовались *модифицированные задачи Коши*: вместо условия $u(0) = 0$ рассматривается более слабое условие $u(0) \in N$, где N есть заданное замкнутое векторное подпространство в Y (см. [1, 2]).

Напомним, что уравнение (1) допускает *экспоненциальную дихотомию*, если существует такое разложение

$$Y = Y^+ \bigoplus Y^-$$

в прямую сумму замкнутых векторных подпространств, что при некоторых положительных постоянных $C^\pm$ и $\gamma^\pm$ и $t, s \in \mathbb{J}$ для решений однородного уравнения выполнены неравенства

$$\|u(t)\| \leqslant C^+ e^{\gamma^+(s-t)} \|u(s)\|, \quad \text{если} \quad u(0) \in Y^+, \quad t \geqslant s;$$

$$\|u(t)\| \leqslant C^{-}e^{\gamma^{-}(t-s)}\|u(s)\|, \quad \text{если} \quad u(0) \in Y^{-}, \quad t \leqslant s.$$

Начиная с работы О. Перрона [3], при исследовании уравнений вида (1) существенное внимание уделялось установлению связей между корректностью краевых задач и существованием экспоненциальной дихотомии [1–5].

Авторами введено новое свойство дифференциального уравнения, обеспечивающее существование корректных краевых задач. Ввиду ограниченности объема работы приведем здесь только простейший пример, показывающий, что это свойство более слабое, чем существование экспоненциальной дихотомии.

Пример. Пусть $Y = CB(\mathbb{R}_+)$ есть пространство скалярных ограниченных непрерывных функций на полупрямой. Рассмотрим уравнение

$$\frac{du(t,x)}{dt} - \varphi(t-x)u(t,x) = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x \geqslant 1, \\ -x, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

Это пример дифференциально-операторного уравнения вида (1) в пространстве $F = CB(\mathbb{R}_+, Y)$, т. е. в пространстве непрерывных ограниченных функций на четверти плоскости.

Теорема. *Уравнение* (2) *не допускает экспоненциальной дихотомии и для этого уравнения любая модифицированная задача Коши некорректна. Вместе с тем для рассматриваемого уравнения существуют корректные задачи; в частности, корректной является задача, заданная условием* $u(x,x) = 0$.

Имеется ряд непосредственных связей и аналогий между уравнениями (1) и функциональными уравнениями, порожденными операторами взвешенного сдвига. При исследовании таких функциональных уравнений также устанавливаются связи между разрешимостью уравнения и существованием экспоненциальной дихотомии. Авторами в [6] была получена теорема об общем виде правосторонней резольвенты и на ее основе было обнаружено свойство функциональных уравнений, необходимое и достаточное для существования корректных краевых задач. Данная работа содержит аналог этого результата для случая дифференциальных уравнений.

Литература

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. А. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

2. Баскаков А. Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* // УМН. 2013. Т. 68. Вып. 1. С. 77–128.

3. Perron O. *Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungssysteme* // Math. Z. 1930. V. 30. No №5. P. 703–728.

4. Массера Х. Л., Шеффер Х. Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства* М.: Мир, 1970.

5. Бичегкуев М. С. *Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах функций* // Матем. заметки. 2014. Т. 95. № 1. С. 18–25.

6. Antonevich A. B., Panteleeva E. V. *Right-Side Hyperbolic Operators* // Scientific Publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A. 2014. № 1. P. 1–9.