

Символ-алгебры и цикличность алгебр после расширения скаляров*

У. РЕМАН

Университет Билефельда, Германия
e-mail: rehmann@math.uni-bielefeld.de

С. В. ТИХОНОВ

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: tsv@im.bas-net.by

В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: yanch@im.bas-net.by

УДК 512.7

Ключевые слова: центральная простая алгебра, скрещённое произведение, многообразии Севери—Брауэра.

Аннотация

Пусть F — поле. Для семейства центральных простых F -алгебр мы доказываем, что существует регулярное расширение E/F , сохраняющее индексы F -алгебр, такое что все алгебры семейства циклические после расширения скаляров до E . Пусть \mathcal{A} — центральная простая F -алгебра степени n и примитивный корень степени n из единицы принадлежит F . Построено квазиаффинное F -многообразие $\text{Symb}(\mathcal{A})$, такое что для расширения L/F многообразие $\text{Symb}(\mathcal{A})$ обладает L -рациональной точкой тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \otimes_F L$ — символ-алгебра. Пусть \mathcal{A} — центральная простая F -алгебра степени n и K/F — циклическое расширение степени n . Построено квазиаффинное F -многообразие $C(\mathcal{A}, K)$, такое что для расширения L/F со свойством $[KL : L] = [K : F]$ многообразие $C(\mathcal{A}, K)$ обладает L -рациональной точкой тогда и только тогда, когда KL — подполе алгебры $\mathcal{A} \otimes_F L$.

Abstract

U. Rehmann, S. V. Tikhonov, V. I. Yanchevskii, Symbol algebras and cyclicity of algebras after a scalar extension, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 193—209.

For a field F and a family of central simple F -algebras we prove that there exists a regular field extension E/F preserving indices of F -algebras such that all the algebras from the family are cyclic after scalar extension by E . Let \mathcal{A} be a central simple algebra over a field F of degree n with a primitive n th root of unity ρ_n . We construct a quasi-affine F -variety $\text{Symb}(\mathcal{A})$ such that for a field extension L/F $\text{Symb}(\mathcal{A})$ has an L -rational point if and only if $\mathcal{A} \otimes_F L$ is a symbol algebra. Let \mathcal{A} be a central simple algebra over a field F of degree n and K/F be a cyclic field extension of degree n . We

*Второй и третий авторы благодарны Центру совместных исследований 701 (CRC 701) в университете города Билефельда за поддержку во время подготовки этой статьи.

construct a quasi-affine F -variety $C(\mathcal{A}, K)$ such that, for a field extension L/F with the property $[KL : L] = [K : F]$, the variety $C(\mathcal{A}, K)$ has an L -rational point if and only if KL is a subfield of $\mathcal{A} \otimes_F L$.

1. Введение

Пусть \mathcal{A} — центральная простая алгебра конечной размерности над полем F . По теореме Веддербёрна существуют однозначно определённое целое $m \geq 1$ и центральная F -алгебра с делением \mathcal{D} , которая определена с точностью до F -изоморфизма, такие что $\mathcal{A} \cong M_m(\mathcal{D})$. Как обычно, степень алгебры \mathcal{A} определяется как $\deg(\mathcal{A}) = \sqrt{\dim_F \mathcal{A}}$, индекс \mathcal{A} — как $\text{ind}(\mathcal{A}) = \deg(\mathcal{D})$, а экспонента $\text{exp}(\mathcal{A})$ алгебры \mathcal{A} — как порядок соответствующего класса эквивалентности $[\mathcal{A}]$ в группе Брауэра $\text{Br}(F)$. Если $[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}]$, то будем писать $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$. Запись $\mathcal{A} \sim 1$ означает, что алгебра \mathcal{A} представляет тривиальный элемент группы Брауэра. Для расширения полей E/F через $\text{res}: \text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(E)$ будем обозначать гомоморфизм ограничения, а через \mathcal{A}_E — тензорное произведение $\mathcal{A} \otimes_F E$.

В статье рассматриваются следующие задачи, связанные со свойствами центральных простых алгебр после расширения скаляров.

Задача 1.1. Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство центральных простых F -алгебр. Зафиксируем некоторое свойство \mathcal{P} центральной простой алгебры. Существует ли такое расширение E/F (по возможности регулярное), что всякий член семейства $\{\mathcal{A}_\alpha \otimes_F E\}_{\alpha \in I}$ обладает этим свойством \mathcal{P} ?

Задача 1.2. Пусть \mathcal{A}/F — центральная простая алгебра. Зафиксируем некоторое свойство \mathcal{P} центральной простой алгебры. Существует ли такое алгебраическое F -многообразие V (аффинное, квазиаффинное, проективное или квази-проективное), что алгебра $\mathcal{A} \otimes_F L$ обладает свойством \mathcal{P} тогда и только тогда, когда у V есть L -рациональная точка?

Конечно, эти задачи в своей полной общности слишком неясные, поэтому ниже мы объясняем, какие свойства \mathcal{P} мы рассматриваем. В качестве примеров укажем следующие.

Пример 1.3. \mathcal{P} — свойство иметь заданный индекс.

Пример 1.4. \mathcal{P} — свойство иметь заданную экспоненту;

Пример 1.5. \mathcal{P} — свойство иметь заданные экспоненту и индекс.

В связи с этими примерами отметим результат из [15, лемма 1.3.], где доказано, что для всякой центральной простой алгебры \mathcal{A} над F экспоненты e и индекса d с разложением по степеням простых делителей $d = \prod p^{v_p(d)}$ и для всякого делителя δ числа d существует расширение $E^{(\delta)}$, такое что

$$\text{exp}(\mathcal{A} \otimes_F E^{(\delta)}) = \text{НОД}(e, \delta) \quad \text{и} \quad \text{ind}(\mathcal{A} \otimes_F E^{(\delta)}) = \prod_{p|\delta} p^{v_p(d)}.$$

Пример 1.6. \mathcal{P} — свойство алгебры иметь совпадающие экспоненту и индекс (свойство равенства экспоненты и индекса).

Замечание 1.7. Последний пример приводит к следующей хорошо известной проблеме равенства экспоненты и индекса.

Задача 1.8. Описать класс полей F , для которых $\text{ind}(\mathcal{A}) = \text{exp}(\mathcal{A})$ для всякой центральной простой F -алгебры \mathcal{A} .

До сих пор неизвестно, верно ли, что эта проблема имеет положительное решение в классе C_2 -полей.

Недавние результаты А. де Йонга [14] и М. Либлиха [17] показывают, что для класса полей функций поверхностей над алгебраически замкнутыми полями эта проблема решается положительно.

Примеры другого типа связаны с представлением алгебр образующими и определяющими соотношениями. Наиболее известные примеры относятся к следующим классам алгебр.

1. *Матричные алгебры* $M_n(F)$.
2. *Скрещённые произведения* $(L/F, \text{Gal}(L/F), f)$. Пусть L/F — расширение Галуа с группой $\text{Gal}(L/F)$ и f — 2-цикл группы G со значениями в L^* . Тогда $(L/F, \text{Gal}(L/F), f)$ — левый L -модуль с L -базисом $\{u_\tau\}_{\tau \in \text{Gal}(L/F)}$ и таблицей умножения

$$u_s l = l^s u_s, \quad u_s u_t = f(s, t) u_{st}$$

для всех $s, t \in \text{Gal}(L/F)$ и $l \in L$.

3. *Циклические алгебры* $(Z/F, s, a)$. Это специальный вид скрещённых произведений. Пусть Z/F — циклическое расширение степени n , s — образующая группы $\text{Gal}(Z/F)$ и $a \in F^*$. Тогда $(Z/F, s, a)$ — левый Z -модуль с Z -базисом $\{u_s^i\}_{i=1, \dots, n}$ и таблицей умножения

$$u_s^i c = c^{s^i} u_s^i, \quad u_s^n = a$$

для всех $i = 1, \dots, n$ и $c \in Z$.

4. *Символ-алгебры* $(a, b)_n$. Эти алгебры также имеют простое множество образующих и определяющих соотношений. Пусть $\rho_n \in F$ — примитивный корень степени n из единицы и $a, b \in F^*$. Тогда $(a, b)_n$ — векторное F -пространство размерности n^2 с F -базисом

$$\{A^i B^j\}_{i, j=1, \dots, n}$$

и таблицей умножения

$$A^j B^i = \rho_n^j B^i A^j, \quad A^n = a, \quad B^n = b.$$

Замечание 1.9. Ввиду простоты множеств образующих и определяющих соотношений интересным является рассмотрение свойств \mathcal{P} алгебр быть после расширения скаляров алгебрами четырёх вышеперечисленных типов 1–4, особенно циклическими или символ-алгебрами (более общо, скрещёнными произведениями с группами Галуа простой структуры, например абелевыми).

Замечание 1.10. Произвольная центральная простая алгебра A/F не обязательно принадлежит одному из классов 1–4: У. Гамильтон в 1843 году доказал, что над полем \mathbb{R} не всякая центральная простая алгебра матричная; А. Алберт [5] в 1932 году построил пример нециклической алгебры с делением, и позднее С. А. Амицур [6] в 1972 году доказал, что существуют нескрещённые произведения. Из этих результатов также следует, что не все алгебры являются символ-алгебрами.

Нам потребуются несколько известных фактов, связанных с вышеупомянутыми свойствами \mathcal{P} .

1. Если \mathcal{P} — свойство алгебры быть матричной, то для всякой конечномерной центральной простой алгебры A/F задача 1.1 всегда имеет решение — так называемое поле расщепления для A . Имеется много результатов о полях расщепления, являющихся регулярными расширениями поля F , полученных Э. Виттом, Р. Брауэром, П. Рокеттом, Ф. Шатле, А. Ковачем, А. Хойзером и другими. В этом случае также и проблема 1.2 имеет решение: многообразие Севери—Брауэра, соответствующее алгебре A , обладает требуемыми свойствами.
2. В случае когда \mathcal{P} — свойство быть скрещённым произведением с заданной конечной группой G и инъективным гомоморфизмом ограничения $\text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(E)$, ответ положительный. Добавление к [9, теорема 4] содержит доказательство следующего результата.

Теорема 1.11 (Д. Солтман). Пусть A — центральная простая F -алгебра степени n и G — конечная группа порядка n . Тогда существует конечно порождённое расширение E/F , такое что

- 1) алгебра A_E изоморфна скрещённому произведению с группой G ;
- 2) гомоморфизм ограничения $\text{res}: \text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(E)$ инъективен.

Замечание 1.12. Для циклической группы G и $\rho_n \in F$ простое доказательство этого утверждения дано в [11, теорема 5.5.1].

Замечание 1.13. Первое упоминание о существовании положительного решения в случае циклических алгебр было в работе М. ван ден Берга и А. Шофилда [7]. Там же отмечено, что для заданной центральной алгебры с делением A над полем F существует регулярное расширение E/F , такое что $A_E = A \otimes_F E$ — циклическая алгебра (см. обсуждение после теоремы 2.6 в [7]).

Мы обобщаем это результат и доказываем существование регулярного расширения E/F , сохраняющего индексы всех центральных простых F -алгебр и такого, что все E -алгебры циклические.

Кроме того, нами построено квазиаффинное многообразие, такое что наличие у него L -рациональной точки влечёт существование у \mathcal{A}_L максимального подполя, приходящего с заданного циклического расширения Z/F степени $\deg(\mathcal{A})$. (Факт существования для заданного циклического расширения Z/F степени $\deg(\mathcal{A})$ хотя бы одного регулярного расширения L/F , для которого $[LZ : L] = \deg(\mathcal{A})$ и LZ — максимальное подполе в \mathcal{A}_L , следует из [8, теорема 3.7].)

Более точно, в разделе 2 нами доказана следующая теорема.

Теорема 1.14. Пусть F — поле. Тогда существует регулярное расширение E/F со следующими свойствами:

- 1) всякая центральная простая E -алгебра циклическая;
- 2) $\text{ind}(C_E) = \text{ind}(C)$ для всякой центральной простой F -алгебры C ;
- 3) $\text{exp}(C_E) = \text{exp}(C)$ для всякой центральной простой F -алгебры C ;
- 4) гомоморфизм ограничения $\text{res}: \text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(E)$ инъективен.

В разделах 3 и 4 мы устанавливаем справедливость следующих утверждений.

Теорема 1.15. Пусть $\rho_n \in F$ и \mathcal{A} — центральная простая F -алгебра степени n . Тогда существует квазиаффинное F -многообразие $\text{Symb}(\mathcal{A})$, такое что для расширения L/F многообразие $\text{Symb}(\mathcal{A})$ обладает L -рациональной точкой тогда и только тогда, когда \mathcal{A}_L — символ-алгебра.

Теорема 1.16. Пусть \mathcal{A} — центральная простая алгебра над полем F степени n и K/F — циклическое расширение степени n . Существует квазиаффинное F -многообразие $C(\mathcal{A}, K)$, такое что для расширения L/F со свойством $[KL : L] = [K : F]$ многообразие $C(\mathcal{A}, K)$ обладает L -рациональной точкой тогда и только тогда, когда KL — максимальное подполе в \mathcal{A}_L .

В качестве приложений приведённых выше результатов покажем, как можно свести известную гипотезу А. А. Суслина об общем элементе приведённой группы Уайтхеда к случаю центральных алгебр с делением специального типа.

Напомним сначала несколько определений.

Для всякой центральной простой алгебры \mathcal{A}/F определено отображение приведённой нормы $\text{Nrd}_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow F$. Его ограничение на мультипликативную группу \mathcal{A}^* алгебры \mathcal{A} даёт гомоморфизм $\text{Nrd}_{\mathcal{A}}: \mathcal{A}^* \rightarrow F^*$. Фактор-группа $\text{SK}_1(\mathcal{A})$ ядра этого гомоморфизма по коммутанту группы \mathcal{A}^* обычно называется приведённой группой Уайтхеда алгебры \mathcal{A} . Эта группа интересна по крайней мере в двух отношениях: в связи с гипотезой Кнезера—Титса для алгебраических групп [10] и в связи с проблемой рациональности для групповых алгебраических многообразий [10].

Гипотеза 1.17 (А. А. Суслин, 1991 г. [4, 21]). Пусть \mathcal{A}/F — центральная простая алгебра, $\text{ind}(\mathcal{A})$ взаимно прост с $\text{char}(F)$, \mathbb{G} — алгебраическая группа, определяемая $\text{SL}(1, \mathcal{A})$, $F(\mathbb{G})$ — её поле функций, $\mathbb{G}(F(\mathbb{G}))$ — группа $F(\mathbb{G})$ -рациональных точек многообразия \mathbb{G} . Если $\text{ind}(\mathcal{A})$ не является свободным от квадратов, то общая точка $\xi \in \mathbb{G}(F(\mathbb{G}))$ приводит к нетривиальному общему элементу в группе $\text{SK}_1(\mathcal{A} \otimes_F F(\mathbb{G}))$.

В настоящее время эта гипотеза доказана только в случае, когда $\text{ind}(\mathcal{A})$ делится на 4 (см. [18]).

Замечание 1.18. Легко заметить, что для доказательства гипотезы Суслина достаточно доказать следующее утверждение: для всякой центральной простой алгебры \mathcal{A}/F с не являющимся свободным от квадратов индексом $\text{ind}(\mathcal{A})$ существует расширение E/F , такое что $\text{SK}_1(\mathcal{A} \otimes_F E) \neq \{0\}$.

Используя приведённые выше результаты, немедленно получаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1.19. *Гипотеза Суслина верна тогда и только тогда, когда она верна для всех циклических алгебр.*

Комбинируя предыдущее утверждение с основным результатом из [3], замечаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1.20. *Гипотеза Суслина верна тогда и только тогда, когда она верна для всех циклических алгебр с делением вида $(a, c)_p \otimes (b, d)_p$.*

2. Циклическость после расширения скаляров

Для доказательства основного результата этого раздела — теоремы 1.14 — нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 2.1 [7, теорема 1.3; 20, теорема 13.10]. *Пусть \mathcal{D} , \mathcal{E} — центральные алгебры с делением над полем F индексов m и n соответственно. Пусть $\text{SB}(\mathcal{E})$ — многообразие Севери—Брауэра алгебры \mathcal{E} и K — его поле функций. Тогда*

$$\text{ind}(\mathcal{D} \otimes_F K) = \text{НОД}\{\text{ind}(\mathcal{D} \otimes_F \mathcal{E}^i)\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Замечание 2.2. Обычно последняя формула называется формулой редукции индекса.

Следствие 2.3. *Пусть \mathcal{D} , \mathcal{E} — центральные алгебры с делением над F . Пусть K — поле функций многообразия Севери—Брауэра $\text{SB}(\mathcal{E})$. Предположим, что $\text{ind}(\mathcal{D})$ взаимно прост с $\text{ind}(\mathcal{E})$. Тогда $\text{ind}(\mathcal{D} \otimes_F K) = \text{ind}(\mathcal{D})$.*

Доказательство. Используем формулу редукции индекса. \square

Лемма 2.4 [1, с. 200, упражнение 7]. *Пусть E/F — циклическое расширение степени q^{l-1} (q — простое число). Пусть также $\text{Gal}(E/F) = \langle \sigma \rangle$ и $(\text{char}(F), q) = 1$. Предположим, что найдётся элемент $\beta \in E$, такой что $N_{E/F}(\beta) = \rho_q$ (ρ_q — примитивный корень степени q из единицы). Пусть $a \in E$ — такой элемент, что $a^\sigma/a = \beta^q$. Тогда*

- 1) для всякого элемента $\lambda \in F^*$ многочлен $x^q - \lambda a$ неприводим над E ,
- 2) если θ — корень этого многочлена, то $E(\theta)$ — циклическое расширение поля F степени q^l .

Следующий результат будет использоваться нами только в случае $p = 2$, однако ради полноты изложения мы приводим его доказательство для любого p .

Лемма 2.5. *Предположим, что $\rho_p \in F$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует башня расширений полей*

$$F \subset K \subset E,$$

такая что

- 1) E/F — регулярное расширение;
- 2) E/K — циклическое расширение степени p^m ;
- 3) $\text{ind}(\mathcal{C}_E) = \text{ind}(\mathcal{C})$ для всякой центральной простой F -алгебры \mathcal{C} .

Доказательство. Применим индукцию по m . Пусть \mathcal{C} — центральная простая F -алгебра. При $m = 1$ можно взять $K = F(x)$ и $E = K(\sqrt[p]{x})$, где x — трансцендентная переменная над F .

Предположим, что лемма справедлива при $m = m_0$ (т. е. существует башня расширений полей $F \subset K_{m_0} \subset E_{m_0}$, такая что E_{m_0}/K_{m_0} — циклическое расширение степени $|E_{m_0} : K_{m_0}| = p^{m_0}$, расширение E_{m_0}/F регулярно и

$$\text{ind}(\mathcal{C}_{E_{m_0}}) = \text{ind}(\mathcal{C}),$$

и пусть $m = m_0 + 1$. Тогда $\mathcal{B} = (E_{m_0}/K_{m_0}, \sigma, \rho_p)$ — циклическая алгебра над полем K_{m_0} . Пусть также M — поле функций многообразия Севери—Брауэра $\text{SB}(\mathcal{B})$.

Заметим, что композит ME_{m_0}/M — циклическое расширение степени p^{m_0} . Поскольку поле E_{m_0} расщепляет алгебру \mathcal{B} , то ME_{m_0} является чисто трансцендентным расширением поля E_{m_0} . Следовательно, расширение ME_{m_0}/F регулярно и

$$\text{ind}(\mathcal{C}_{ME_{m_0}}) = \text{ind}(\mathcal{C}_{E_{m_0}}) = \text{ind}(\mathcal{C}).$$

Кроме того, M расщепляет \mathcal{B} . Тогда найдётся элемент $\beta \in ME_{m_0}$, такой что

$$N_{ME_{m_0}/M}(\beta) = \rho_p.$$

Пусть $a \in ME_{m_0}$ и $a^\sigma/a = \beta^p$. Пусть также y — ещё одна трансцендентная переменная. Тогда расширение $ME_{m_0}(y)/M(y)$ циклическое степени p^{m_0} . Ввиду леммы 2.4 получаем, что $ME_{m_0}(\sqrt[p]{ay})/M(y)$ — циклическое расширение степени p^{m_0+1} . Понятно, что расширение $ME_{m_0}(\sqrt[p]{ay})/F$ регулярно и

$$\text{ind}(\mathcal{C}_{ME_{m_0}(\sqrt[p]{ay})}) = \text{ind}(\mathcal{C}_{ME_{m_0}}) = \text{ind}(\mathcal{C}). \quad \square$$

Лемма 2.6. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует башня расширений полей

$$F \subset K \subset E,$$

такая что E/F — регулярное расширение, E/K — циклическое расширение степени n и

$$\text{ind}(\mathcal{C}_E) = \text{ind}(\mathcal{C})$$

для всякой центральной простой F -алгебры \mathcal{C} .

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $\text{char}(F) = 2$ или $4 \nmid n$. Пусть x — трансцендентная переменная и v_x — нормирование поля $F(x)$, соответствующее многочлену x . Тогда ввиду [19, теорема 5] существует циклическое расширение $E/F(x)$ степени n , такое что пополнение E_{v_x} относительно нормирования v_x совпадает с полем $F(x)_{v_x}$. Заметим, что $F(x)_{v_x}$ совпадает с полем формальных степенных рядов $F((x))$. Следовательно,

$$\text{ind}(\mathcal{C}) = \text{ind}(\mathcal{C}_{F((x))}) = \text{ind}(\mathcal{C}_{E_{v_x}})$$

для любой центральной простой F -алгебры \mathcal{C} . Тогда $\text{ind}(\mathcal{C}) = \text{ind}(\mathcal{C}_E)$.

Более того, поскольку поле F алгебраически замкнуто в E_{v_x} , то E/F — регулярное расширение.

Далее рассмотрим случай $\text{char}(F) \neq 2$ и $4 \mid n$. Пусть $n = 2^s m$, где $2 \nmid m$. С учётом рассмотренного выше случая получаем существование башни расширений полей $F \subset K_1 \subset E_1$, такой что расширение E_1/F регулярно, E/K циклично степени m , а E_1 сохраняет индексы F -алгебр. Кроме того, из леммы 2.5 вытекает существование башни расширений полей $F \subset K_2 \subset E_2$, такой что E_2/F регулярно, E_2/K_2 циклично степени 2^s и $\text{ind}(\mathcal{C}_{E_2}) = \text{ind}(\mathcal{C})$ для всякой центральной простой F -алгебры \mathcal{C} . Пусть $K = K_1 K_2$, $E = E_1 E_2$ — свободные над F композиты полей K_1 , K_2 и E_1 , E_2 . Тогда расширение E/K циклическое степени n . Более того, так как E_i не изменяет индекс алгебры \mathcal{C} , то

$$\text{ind}(\mathcal{C}) = \text{ind}(\mathcal{C}_{E_1}) = \text{ind}(\mathcal{C}_{E_1 E_2}) = \text{ind}(\mathcal{C}_E). \quad \square$$

Установим теперь справедливость следующих фактов, необходимых нам в дальнейшем.

Лемма 2.7. Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} — центральные простые F -алгебры. Предположим, что $\text{ind}(\mathcal{A}) = p^m$, $\text{ind}(\mathcal{B}) = p^n$ и $m \geq n$. Тогда $\text{ind}(\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B}) \geq p^{m-n}$.

Доказательство. Пусть E/F — расширение степени p^n , расщепляющее алгебру \mathcal{B} . Пусть также $\text{ind}(\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B}) = p^s$. Предположим, что $p^s < p^{m-n}$. Тогда существует расширение L/F степени p^s , расщепляющее $\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B}$. Следовательно,

$$1 \sim (\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B})_{EL} \sim \mathcal{A}_{EL} \otimes_{EL} \mathcal{B}_{EL} \sim \mathcal{A}_{EL}.$$

Таким образом, поле EL расщепляет алгебру \mathcal{A} . Так как $|EL : F| < p^m$, то $\text{ind}(\mathcal{A}) < p^m$, и мы получаем противоречие. \square

Лемма 2.8. Пусть \mathcal{A} — центральная простая F -алгебра индекса $\text{ind}(\mathcal{A}) = p^m$. Тогда $\text{ind}(\mathcal{A}^{\otimes p}) < \text{ind}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что существует поле расщепления L алгебры \mathcal{A} , такое что $|L : F| = \text{ind}(\mathcal{A})$ и L содержит подполе K степени $|L : K| = p$. Тогда $\text{ind}(\mathcal{A}_K) = p$. Следовательно, $1 = \text{ind}(\mathcal{A}_K^{\otimes p})$. Таким образом,

$$\text{ind}(\mathcal{A}^{\otimes p}) \leq |K : F| < |L : F| = \text{ind}(\mathcal{A}). \quad \square$$

Лемма 2.9. Пусть K/F — циклическое расширение, $\langle \sigma_i \rangle = \text{Gal}(K(z)/F(z))$ и z — трансцендентная переменная. Пусть также \mathcal{C} — центральная простая F -алгебра с делением, такая что \mathcal{C}_K — алгебра с делением. Тогда $(K(z)/F(z), \sigma, z) \otimes_{\mathcal{C}_{F(z)}} \mathcal{C}_{F(z)}$ — $F(z)$ -алгебра с делением.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.3 из [16]. \square

В обозначениях предыдущей леммы немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 2.10. Пусть \mathcal{A} — центральная простая F -алгебра и $\text{ind}(\mathcal{A}_K) = \text{ind}(\mathcal{A})$. Тогда

$$\text{ind}((K(z)/F(z), \sigma, z) \otimes_{\mathcal{A}_{F(z)}} \mathcal{A}_{F(z)}) = \text{ind}((K(z)/F(z), \sigma, z)) \text{ind}(\mathcal{A}).$$

Теорема 2.11. Пусть \mathcal{A} — центральная простая алгебра над полем F . Тогда существует регулярное расширение M/F , такое что

- 1) алгебра \mathcal{A}_M циклическая;
- 2) $\text{ind}(\mathcal{C}_M) = \text{ind}(\mathcal{C})$ для всякой центральной простой F -алгебры \mathcal{C} ;
- 3) $\text{exp}(\mathcal{C}_M) = \text{exp}(\mathcal{C})$ для всякой центральной простой F -алгебры \mathcal{C} ;
- 4) гомоморфизм ограничения $\text{res}: \text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(M)$ инъективен.

Более того, для всякого расширения L/F свободный над F композит ML сохраняет индексы L -алгебр.

Доказательство. Пусть $\text{deg}(\mathcal{A}) = n = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$ (p_i — различные простые числа) и $\mathcal{A} = \bigotimes_{i=1}^s \mathcal{A}_i$, где $\text{ind}(\mathcal{A}_i) = p_i^{l_i}$, $l_i \leq n_i$. По лемме 2.6 существует башня расширений полей $F \subset K \subset E$, такая что расширение E/F регулярно, E/K циклично степени n и E сохраняет индексы F -алгебр. Пусть E_i/K — циклическое подрасширение степени $p_i^{n_i}$.

Рассмотрим алгебры

$$\mathcal{D}_i = (E_i(z)/K(z), \sigma_i, z), \quad i = 1, \dots, s,$$

где $\langle \sigma_i \rangle = \text{Gal}(E_i(z)/K(z))$ и z — трансцендентная переменная.

Положим

$$\mathcal{D} = \bigotimes_{i=1}^s \mathcal{D}_i.$$

Так как

$$\mathcal{D}_i \sim (E(z)/K(z), \sigma, z^{n/p^{n_i}}),$$

где $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(E(z)/K(z))$, имеем

$$\mathcal{D} \cong \left(E(z)/K(z), \sigma, z^{\sum_{i=1}^s n/p^{n_i}} \right).$$

Тогда \mathcal{D} — циклическая алгебра индекса n с максимальным подполем $E(z)$.

Имеем

$$\mathcal{D} \sim \mathcal{D} \otimes_{K(z)} \mathcal{A}_{K(z)}^{\text{op}} \otimes_{K(z)} \mathcal{A}_{K(z)}.$$

Пусть M — поле функций многообразия Севери—Брауэра $\text{SB}(\mathcal{D} \otimes_{K(z)} \mathcal{A}_{K(z)}^{\text{op}})$. Тогда $\mathcal{A}_M \sim \mathcal{D}_M$. Поскольку $\text{deg}(\mathcal{A}_M) = \text{deg}(\mathcal{D}_M)$, то $\mathcal{A}_M \cong \mathcal{D}_M$.

Пусть \mathcal{C} — центральная простая F -алгебра и $\mathcal{C} = \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{C}_i$ — разложение алгебры \mathcal{C} в тензорное произведение алгебр примарных индексов. Так как $\text{ind}(\mathcal{C}_M) = \prod_{i=1}^m \text{ind}(\mathcal{C}_{iM})$, то достаточно рассмотреть случай, когда алгебра \mathcal{C} имеет примарный индекс. Кроме того, если $p_i \nmid \text{ind}(\mathcal{C})$, $1 \leq i \leq s$, то $\text{ind}(\mathcal{C}_M) = \text{ind}(\mathcal{C})$ по следствию 2.3. Таким образом, можно предполагать, что $\text{ind}(\mathcal{C}) = p_i^{m_i}$ — степень простого числа p_i для некоторого $1 \leq i \leq s$.

Воспользуемся формулой редукции индекса. Получим

$$\text{ind}(\mathcal{C}_M) = \text{НОД}\{\text{ind}(\mathcal{D}^{\otimes j} \otimes_{K(z)} \mathcal{A}_{K(z)}^{\text{op}} \otimes_{K(z)} \mathcal{C}_{K(z)})\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Так как индекс $\text{ind}(\mathcal{C})$ примарен, то

$$\text{ind}(\mathcal{C}_M) = \min_{j=1}^{n_i} \{\text{ind}(\mathcal{D}_i^{\otimes j} \otimes_{K(z)} \mathcal{A}_{K(z)}^{\text{op}} \otimes_{K(z)} \mathcal{C}_{K(z)})\}.$$

Рассмотрим алгебру

$$\mathcal{B}_{i,j} = \mathcal{D}_i^{\otimes j} \otimes_{K(z)} \mathcal{A}_{K(z)}^{\text{op}} \otimes_{K(z)} \mathcal{C}_{K(z)}.$$

Ввиду следствия 2.10 получаем

$$\text{ind}(\mathcal{B}_{i,j}) = \text{ind}(\mathcal{D}_i^{\otimes j}) \text{ind}(\mathcal{A}_{K(z)}^{\text{op}} \otimes_{K(z)} \mathcal{C}_{K(z)}).$$

Зафиксируем некоторое j . Пусть $j = p_i^t j_1$, где $p_i \nmid j_1$. Тогда $\text{ind}(\mathcal{D}_i^{\otimes j}) = p_i^{n_i - t}$. Пусть $\text{ind}(\mathcal{A}^{\text{op}} \otimes_{K(z)} \mathcal{C}_{K(z)}) = p_i^{s_i}$. Тогда из леммы 2.8 следует, что $s_i \leq l_i - t$. Следовательно, по лемме 2.7

$$\text{ind}(\mathcal{B}_{i,j}) = p_i^{n_i - t} p_i^{|s_i - m_i|} = p_i^{n_i - t + |s_i - m_i|}.$$

Наконец, рассмотрим два случая.

1. Если $s_i \geq m_i$, то $n_i - t \geq m_i$ и $n_i - t + |s_i - m_i| \geq m_i$.
2. Если $s_i < m_i$, то $n_i - t + |s_i - m_i| = n_i - t - s_i + m_i \geq m_i$.

Следовательно, $\text{ind}(\mathcal{B}_{i,j}) \geq p^{m_i} = \text{ind}(\mathcal{C})$ для всякого j . Таким образом, $\text{ind}(\mathcal{C}_M) = \text{ind}(\mathcal{C})$.

Заметим, что расширение M/F сохраняет индексы всех F -алгебр, а это влечёт также сохранение экспонент F -алгебр. Действительно, предположим, что $\mathcal{C}_M^{\otimes m} \sim 1$ для некоторой центральной простой F -алгебры \mathcal{C} . Поскольку

$$1 = \text{ind}(\mathcal{C}_M^{\otimes m}) = \text{ind}(\mathcal{C}^{\otimes m}),$$

то $\mathcal{C}^{\otimes m} \sim 1$. Таким образом, $\text{exp}(\mathcal{C}_M) = \text{exp}(\mathcal{C})$. Более того, сохранение экспонент, в свою очередь, влечёт инъективность гомоморфизма ограничения $\text{res}: \text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(M)$.

Рассмотрим последнее утверждение о свободном композите. Свободный композит LM может быть построен с помощью процедуры, аналогичной процедуре построения поля M , следует лишь заменить поле F на поле L . Далее утверждение о сохранении индексов L -алгебр получается автоматически. \square

Замечание 2.12. Нетрудно заметить, что сохранение экспонент всех F -алгебр не влечёт сохранения индексов.

Докажем теперь наш основной результат.

Доказательство теоремы 1.14. Прежде всего заметим, что сохранение индексов влечёт сохранение экспонент и инъективность гомоморфизма ограничения.

Докажем теперь, что для всякого поля K существует регулярное расширение, превращающее все K -алгебры в циклические и сохраняющее их индексы.

Если множество I центральных простых K -алгебр счётно, то построим последовательность расширений полей

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_i \subset E_{i+1} \subset \dots,$$

такую что E_{i+1} — регулярное расширение поля E_i , сохраняющее индексы E_i -алгебр, а \mathcal{A}_{i+1E_i} — циклическая алгебра. Тогда поле $E = \bigcup_i E_i$ имеет требуемые свойства.

Наконец, если I не является счётным, то воспользуемся леммой Цорна. Действительно, пусть

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{l} \text{регулярные} \\ \text{расширения } K/F \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{для всякого расширения } L/F \text{ свободный} \\ \text{композит } LK \text{ над } F \text{ сохраняет} \\ \text{индексы } L\text{-алгебр и существует} \\ F\text{-алгебра } \mathcal{A}, \text{ такая что } \mathcal{A}_K \text{ циклическая} \end{array} \right. \right\}$$

(предполагается, что все поля в \mathcal{M} погружены в некоторую универсальную область). Включения полей определяют частичный порядок на этом множестве. Для совершенно упорядоченного подмножества $\mathcal{S} = \{K_\alpha\} \subset \mathcal{M}$ его верхней границей будет $\bigcup_\alpha K_\alpha$. Следовательно, по лемме Цорна существует максимальный

элемент E в \mathcal{M} . Покажем, что поле E имеет требуемые свойства. Предположим, что найдётся F -алгебра \mathcal{A} , такая что \mathcal{A}_E не является циклической. По теореме 2.11 существует такое расширение $E_1 \in \mathcal{M}$, что алгебра \mathcal{A}_{E_1} циклическая. Тогда $E_1 E$ принадлежит \mathcal{M} и содержит E . Противоречие.

Завершим доказательство теоремы. Пусть K_0 — поле, превращающее все F -алгебры в циклические и сохраняющее их индексы. Рассмотрим поле K_1 , превращающее все K_0 -алгебры в циклические и сохраняющее их индексы, и т. д. Тогда поле $\bigcup_i K_i$ обладает требуемыми свойствами. \square

3. Многообразия $\text{Symb}(\mathcal{A})$

Доказательство основного результата предварим одним из определений многообразия Севери—Брауэра.

Для заданного векторного F -пространства V размерности n пусть $\text{Grass}_F(m, V)$ — множество подпространств размерности m . На $\text{Grass}_F(m, V)$ задаётся структура проективного многообразия с помощью плюккерова вложения. Пусть $\bigwedge^m V$ — m -я внешняя степень пространства V и $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ — проективное пространство, соответствующее векторному пространству $\bigwedge^m V$. Тогда существует отображение (плюккерова вложение)

$$\begin{aligned} \text{Grass}_F(m, V) &\rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V), \\ Fw_1 \oplus Fw_2 \oplus \dots \oplus Fw_m &\mapsto F(w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_m). \end{aligned}$$

Зафиксируем базис e_1, e_2, \dots, e_n для V , тогда $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$, является базисом для $\bigwedge^m V$. Последний, в свою очередь, определяет проективные координаты для точки $F(w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_m)$.

Далее, пусть \mathcal{A} — центральная простая F -алгебра с базисом e_1, e_2, \dots, e_{n^2} . Многообразию Севери—Брауэра $SB(\mathcal{A})$ определяется как подмногообразие грассманиана $\text{Grass}_F(n, \mathcal{A})$, состоящее из точек, соответствующих правым идеалам в \mathcal{A} . Это условие может быть выражено с помощью полиномиальных уравнений следующим образом (см. [13, с. 112]).

Пусть $T \subset \mathcal{A}^*$ — такое подмножество, что мультипликативная группа, им порождённая, содержит базис алгебры \mathcal{A} . Пусть

$$I = F(w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_n) \in \text{Grass}_F(n, \mathcal{A}),$$

т. е. I соответствует векторному пространству

$$W = Fw_1 \oplus Fw_2 \oplus \dots \oplus Fw_n \subset \mathcal{A}.$$

Тогда W — правый идеал в \mathcal{A} тогда и только тогда, когда

$$I = F(w_1 t \wedge w_2 t \wedge \dots \wedge w_n t)$$

для всех $t \in T$.

Для $t \in T$ пусть

$$e_i t = \sum a_{ij} e_j. \quad (3.1)$$

Тогда

$$e_{i_1} t \wedge e_{i_2} t \wedge \dots \wedge e_{i_n} t = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq n^2} t_{j_1, \dots, j_n, i_1, \dots, i_n} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n},$$

где

$$t_{j_1, \dots, j_n, i_1, \dots, i_n} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_n j_1} & \dots & a_{i_n j_n} \end{vmatrix}.$$

Для

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n^2} p_{i_1, \dots, i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

имеем

$$w_1 t \wedge w_2 t \wedge \dots \wedge w_n t = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n^2} q_{i_1, \dots, i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n},$$

где

$$q_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq n^2} t_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n} p_{j_1, \dots, j_n}.$$

Таким образом, $F(w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_n) = F(w_1 t \wedge w_2 t \wedge \dots \wedge w_n t)$ тогда и только тогда, когда их плюккеревы координаты пропорциональны, т. е.

$$q_{i_1, \dots, i_n} p_{j_1, \dots, j_n} = q_{j_1, \dots, j_n} p_{i_1, \dots, i_n}.$$

Следовательно, всякий $t \in T$ определяет следующее множество полиномиальных уравнений для $\text{SB}(\mathcal{A})$:

$$\left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq n^2} t_{i_1, \dots, i_n, k_1, \dots, k_n} \xi_{k_1, \dots, k_n} \right) \xi_{j_1, \dots, j_n} - \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq n^2} t_{j_1, \dots, j_n, k_1, \dots, k_n} \xi_{k_1, \dots, k_n} \right) \xi_{i_1, \dots, i_n} = 0,$$

где $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n^2$, $1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq n^2$.

Таким образом, многообразие Севери–Брауэра алгебры \mathcal{A} задаётся в $\text{Grass}_F(n, \mathcal{A})$ этой системой уравнений для всех $t \in T$.

Пусть $\rho_n \in F$ и \mathcal{B} – центральная простая F -алгебра степени m . Положим

$$\mathcal{D} = (x, y)_n \otimes_{F(x, y)} \mathcal{B}_{F(x, y)},$$

где $F(x, y)$ – чисто трансцендентное расширение поля F . Пусть $\sqrt[n]{x^i} \sqrt[n]{y^j}$, $0 \leq i, j \leq n-1$, – стандартный базис для алгебры $(x, y)_n$ и v_1, \dots, v_{m^2} – базис для \mathcal{B} над F , состоящий из обратимых элементов. Тогда $\sqrt[n]{x^i} \sqrt[n]{y^j} v_l$, $0 \leq i, j \leq n-1$, $1 \leq l \leq m^2$, – базис для \mathcal{D} над $F(x, y)$.

Используя описанную выше процедуру, построим уравнения для многообразия Севери–Брауэра $\text{SB}(\mathcal{D})$. Рассмотрим сначала стандартные многочлены $G_j \in F(x, y)[\xi_0, \dots, \xi_N]$, $j \in J$, определяющие грассманиан $\text{Grass}(nm, \mathcal{D}) \subset \mathbb{P}^N$, где $N = C_{n^2 m^2}^{nm} - 1$. Заметим, что коэффициенты многочленов G_j , $j \in J$, принадлежат множеству $\{\pm 1, 0\}$.

Положим

$$T_{\mathcal{D}} = \{ \sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{y}, v_1, \dots, v_{m^2} \}.$$

Мультипликативная группа, порождённая множеством $T_{\mathcal{D}}$, содержит базис алгебры \mathcal{D} над $F(x, y)$. Тогда всякий $t \in T_{\mathcal{D}}$ определяет семейство полиномиальных уравнений $\{F_i^{(t)}\}$, $i \in I_t$, многообразия $\text{SB}(\mathcal{D})$. Заметим, что

$$\{F_i^{(t)}\} \in F[x, y][\xi_0, \dots, \xi_N], \quad i \in I_t.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что для всякого $t \in T_{\mathcal{D}}$ коэффициенты a_{ij} из (3.1) принадлежат $F[x, y]$. Действительно, если $t = v_l$, то

$$(\sqrt[n]{x^i} \sqrt[n]{y^j} v_k) v_l = \sqrt[n]{x^i} \sqrt[n]{y^j} \left(\sum a_s v_s \right)$$

для некоторого $a_s \in F$. Если $t = \sqrt[n]{x}$, то

$$(\sqrt[n]{x^i} \sqrt[n]{y^j} v_k) \sqrt[n]{x} = \begin{cases} \rho_n^j \sqrt[n]{x}^{i+1} \sqrt[n]{y^j} v_k, & \text{если } i < n-1, \\ x \rho_n^j \sqrt[n]{y^j} v_k, & \text{если } i = n-1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Подобные соотношения имеют место и для $\sqrt[n]{y}$.

Далее, пусть L/F – расширение полей и $a, b \in L^*$. Рассмотрим алгебру

$$\bar{\mathcal{D}} = (a, b)_n \otimes_L \mathcal{B}_L.$$

Тогда $\sqrt[n]{a}^i \sqrt[n]{b}^j v_l$, $0 \leq i, j \leq n-1$, $1 \leq l \leq m^2$, — базис для $\bar{\mathcal{D}}$ над L . Более того, мультипликативная группа, порождённая множеством $\{\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, v_l \mid 1 \leq l \leq m^2\}$, содержит базис алгебры $\bar{\mathcal{D}}$ над L . Следовательно, это множество может быть использовано для построения уравнений многообразия Севери—Брауэра $\text{SB}(\bar{\mathcal{D}})$.

Специализируя x и y в (3.2) ($x \mapsto a$, $y \mapsto b$), мы немедленно приходим к равенствам

$$(\sqrt[n]{a}^i \sqrt[n]{b}^j v_k) \sqrt[n]{a} = \begin{cases} \rho_n^j \sqrt[n]{a}^{i+1} \sqrt[n]{b}^j v_k, & \text{если } i < n-1, \\ a \rho_n^j \sqrt[n]{b}^j v_k, & \text{если } i = n-1. \end{cases}$$

Подобные соотношения имеют место для $\sqrt[n]{b}$ и v_l , $1 \leq l \leq m^2$.

Следовательно, многочлены из $L[\xi_1, \dots, \xi_N]$, задающие многообразие $\text{SB}(\bar{\mathcal{D}})$, получаются специализацией $x \mapsto a$, $y \mapsto b$ многочленов из $F[x, y][\xi_1, \dots, \xi_N]$, определяющих $\text{SB}(\mathcal{D})$.

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $\rho_n \in F$, \mathcal{B} — центральная простая F -алгебра степени m . Пусть также $\mathcal{D} = (x, y)_n \otimes_{F(x, y)} \mathcal{B}_{F(x, y)}$. Тогда многообразие Севери—Брауэра $\text{SB}(\mathcal{D})$ алгебры \mathcal{D} может быть задано такими многочленами в $F[x, y][\xi_0, \dots, \xi_N]$ ($N = C_{n^2 m^2}^{nm} - 1$), что для любого расширения L/F и $a, b \in L^*$ их специализация $x \mapsto a$, $y \mapsto b$ даёт многочлены в $L[\xi_0, \dots, \xi_N]$, определяющие многообразие Севери—Брауэра $\text{SB}(\bar{\mathcal{D}})$ алгебры $\bar{\mathcal{D}} = (a, b)_n \otimes_L \mathcal{B}_L$.

Теперь мы можем доказать основной результат этого раздела.

Доказательство теоремы 1.15. Пусть

$$\mathcal{D} = (x, y)_n \otimes_{F(x, y)} \mathcal{A}_{F(x, y)}^{\text{op}},$$

где $F(x, y)$ — чисто трансцендентное расширение поля F .

Многообразие Севери—Брауэра алгебры \mathcal{D} — подмногообразие проективного пространства $\mathbb{P}_{F(x, y)}^N$, где $N = C_{n^2}^n - 1$. Пусть $F_j \in F[x, y][\xi_0, \dots, \xi_N]$, $j \in J$, — многочлены, определяющие $\text{SB}(\mathcal{D})$, построенные в доказательстве леммы 3.1. Рассмотрим многочлены F_j как многочлены из $F[x, y, \xi_0, \dots, \xi_N]$. Тогда эти многочлены определяют аффинное многообразие $X \subset \mathbb{A}_F^{N+3}$. Для $H \in F[x, y, \xi_0, \dots, \xi_N]$ через $D(H)$ обозначим открытое дополнение в \mathbb{A}_F^{N+3} к многообразию, определённому многочленом H . Пусть

$$\text{Symb}(\mathcal{A}) = X \cap D(x) \cap D(y) \cap \left(\bigcup_{i=0}^N D(\xi_i) \right).$$

Покажем, что многообразие $\text{Symb}(\mathcal{A})$ обладает требуемыми свойствами. Предположим, что $(x_0, y_0, c_0, \dots, c_N) \in \text{Symb}(\mathcal{A})(L)$ для некоторого расширения L/F . Следовательно,

$$F_j(x_0, y_0, c_0, \dots, c_N) = 0 \tag{3.3}$$

для всех $j \in J$. Заметим, что специализация $x \mapsto x_0, y \mapsto y_0$ многочленов $F_j \in F[x, y, \xi_0, \dots, \xi_N]$ даёт многочлены, определяющие многообразие Севери—Брауэра алгебры $(x_0, y_0)_n \otimes_L \mathcal{A}_L^{\text{op}}$. Условие (3.3) показывает, что $\text{SB}((x_0, y_0)_n \otimes_L \mathcal{A}_L^{\text{op}})$ обладает L -рациональной точкой. Тогда $(x_0, y_0)_n \otimes_L \mathcal{A}_L^{\text{op}}$ — матричная алгебра, т. е. алгебра $(x_0, y_0)_n$ Брауэр-эквивалентна алгебре \mathcal{A}_L . Так как $\deg(\mathcal{A}_L) = \deg((x_0, y_0)_n)$, то $(x_0, y_0) \cong \mathcal{A}_L$.

Предположим, что $(x_0, y_0)_n \cong \mathcal{A}_L$ для некоторых $x_0, y_0 \in L^*$. Тогда $\text{SB}((x_0, y_0)_n \otimes_L \mathcal{A}_L^{\text{op}})$ обладает L -рациональной точкой, обозначим её через (c_0, \dots, c_N) . Получаем, что $F_j(x_0, y_0, c_0, \dots, c_N) = 0$ для всех $j \in J$. Следовательно, $(x_0, y_0, c_0, \dots, c_N) \in X$. Поскольку $x_0, y_0 \in L^*$ и некоторые из c_i не равны 0, то $(x_0, y_0, c_0, \dots, c_N) \in \text{Symb}(\mathcal{A})$. \square

Наконец, нетрудно доказать следующее свойство многообразия $\text{Symb}(\mathcal{A})$.

Предложение 3.2. Пусть \mathcal{A}/F — центральная простая алгебра. Тогда

$$\text{Symb}(\mathcal{A} \otimes_F K) = \text{Symb}(\mathcal{A}) \times_F K$$

для всякого расширения K/F .

4. Многообразие $\mathcal{C}(\mathcal{A}, K)$

Пусть \mathcal{A}/F — центральная простая алгебра степени n и K/F — циклическое расширение степени n .

Рассмотрим $F(x)$ -алгебру $\mathcal{C} = (K(x)/F(x), \sigma, x)$, где $\text{Gal}(K(x)/F(x)) = \langle \sigma \rangle$. Имеем $\mathcal{C} = \sum_{0 \leq i \leq n-1} u_{\sigma^i} K(x)$ и

$$u_{\sigma^i} u_{\sigma^j} = \begin{cases} u_{\sigma^{i+j}}, & \text{если } i+j < n, \\ x u_{\sigma^{i+j-n}}, & \text{если } i+j \geq n. \end{cases}$$

Пусть b_1, \dots, b_n — базис F -векторного пространства K и v_1, \dots, v_{n^2} — базис центральной простой F -алгебры \mathcal{B} степени n , состоящий из обратимых элементов. Тогда мультипликативная группа, порождённая множеством $\{u_{\sigma}, b_1, \dots, b_n, v_1, \dots, v_{n^2}\}$, содержит базис алгебры $\mathcal{D} = \mathcal{C} \otimes_{F(x)} \mathcal{B}_{F(x)}$. Как и в разделе 3, можно построить многочлены $F_j \in F(x)[\xi_0, \dots, \xi_N]$, $j \in J$, определяющие многообразие Севери—Брауэра $\text{SB}(\mathcal{D})$, где $N = C_{n^4}^n - 1$. Более того, можно показать, что эти многочлены имеют коэффициенты не просто в $F(x)$, а в $F[x]$.

Пусть L/F — такое расширение полей, что $[LK : L] = [K : F]$. Для $a \in L^*$ рассмотрим алгебру $\bar{\mathcal{D}} = (LK/L, \tau, a) \otimes_L \mathcal{B}_L$, где $\text{Gal}(LK/L) = \langle \tau \rangle$. Имеем $(LK/L, \tau, a) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} w_{\tau^i} LK$ и

$$w_{\tau^i} w_{\tau^j} = \begin{cases} w_{\tau^{i+j}}, & \text{если } i+j < n, \\ a w_{\tau^{i+j-n}}, & \text{если } i+j \geq n. \end{cases}$$

Так как $[LK : L] = [K : F]$, то b_1, \dots, b_n — базис L -векторного пространства LK . Тогда мультипликативная группа, порождённая множеством $\{w_\tau, b_1, \dots, b_n, v_1, \dots, v_{n^2}\}$, содержит базис алгебры \mathcal{D} .

Действуя как в доказательстве леммы 3.1, получаем следующую лемму.

Лемма 4.1. Пусть \mathcal{B} — центральная простая F -алгебра степени n , K/F — циклическое расширение степени n . Пусть также

$$\mathcal{D} = (K(x)/F(x), \sigma, x) \otimes_{F(x)} \mathcal{B}_{F(x)}.$$

Тогда многообразие Севери—Брауэра $\text{SB}(\mathcal{D})$ алгебры \mathcal{D} может быть задано такими многочленами из $F[x][\xi_0, \dots, \xi_N]$, что для любого расширения L/F и $a \in L^*$ их специализация $x \mapsto a$ даёт многочлены в $L[\xi_0, \dots, \xi_N]$, определяющие многообразие Севери—Брауэра $\text{SB}(\bar{\mathcal{D}})$ алгебры $\bar{\mathcal{D}} = (LK/L, \tau, a) \otimes_L \mathcal{B}_L$.

Доказательство теоремы 1.16. Пусть

$$\mathcal{D} = (K(x)/F(x), \sigma, x) \otimes_{F(x)} \mathcal{A}_{F(x)},$$

где $F(x)$ — чисто трансцендентное расширение поля F .

Многообразие Севери—Брауэра алгебры \mathcal{D} — замкнутое подмногообразие проективного пространства $\mathbb{P}_{F(x)}^N$, где $N = C_{n^4}^n - 1$. Пусть $F_j \in F[x][\xi_0, \dots, \xi_N]$, $j \in J$, — многочлены, задающие многообразие $\text{SB}(\mathcal{D})$, построенные в доказательстве леммы 4.1. Рассмотрим F_j как многочлены в $F[x, \xi_0, \dots, \xi_N]$. Тогда эти многочлены определяют аффинное многообразие $X \subset \mathbb{A}_F^{N+2}$. Для $H \in F[x, \xi_0, \dots, \xi_N]$ через $D(H)$ обозначим открытое дополнение в \mathbb{A}_F^{N+2} многообразия, задаваемого многочленом H . Положим

$$C(\mathcal{A}, K) = X \cap D(x) \cap \left(\bigcup_{i=0}^N D(\xi_i) \right).$$

Оставшаяся часть доказательства теоремы использует рассуждения, аналогичные применявшимся при доказательстве теоремы 2.11. \square

Как и в случае многообразия $\text{Symb}(\mathcal{A})$, можно доказать следующее утверждение.

Предложение 4.2. Пусть \mathcal{A} — центральная простая алгебра над полем F степени n и K/F — циклическое расширение степени n . Пусть также L/F — такое расширение, что $|K : F| = |LK : L|$. Тогда

$$C(\mathcal{A} \otimes_F L, LK) = C(\mathcal{A}, K) \times_F L.$$

Литература

- [1] Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. Гл. IV—VI. — М.: Наука. 1965.
- [2] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир. 1986.

- [3] Прокопчук А. В., Тихонов С. В., Янчевский В. И. Об общих элементах в группах SK_1 для центральных простых алгебр // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2008. — № 3. — С. 35–42.
- [4] Суслин А. А. Снова об SK_1 алгебр с делением и о когомологиях Галуа // Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва. — 2005. — Т. 12.
- [5] Albert A. A. A construction of non-cyclic normal division algebras // Bull. Amer. Math. Soc. — 1932. — Vol. 38, no. 6. — P. 449–456.
- [6] Amitsur S. A. On central division algebras // Israel J. Math. — 1972. — Vol. 12. — P. 408–420.
- [7] Van den Berg M., Schofield A. The index of a Brauer class on a Brauer–Severi variety // Trans. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 333, no. 2. — P. 729–739.
- [8] Van den Berg M., Schofield A. Division algebra coproducts of index n // Trans. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 341, no. 2. — P. 505–517.
- [9] Berhuy G., Frings C. On the second trace form of central simple algebras in characteristic two // Manuscripta Math. — 2001. — Vol. 106. — P. 1–12.
- [10] Gille Ph. Le problème de Kneser–Tits // Séminaire BOURBAKI 60ème année. — 2006–2007. — No. 983.
- [11] Gille Ph., Szamuely T. Central Simple Algebras and Galois Cohomology. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. — (Cambridge Stud. Adv. Math.; Vol. 101).
- [12] Harris J. Algebraic Geometry. A First Course. — New York: Springer, 1992. — (Grad. Texts Math.; Vol. 133).
- [13] Jacobson N. Finite-Dimensional Division Algebras. — Berlin: Springer, 1996.
- [14] De Jong A. J. The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface // Duke Math. J. — 2004. — Vol. 123, no. 1. — P. 71–94.
- [15] Kersten I., Rehmann U. Excellent algebraic groups. I // J. Algebra. — 1998. — Vol. 200, no. 1. — P. 334–346.
- [16] Kunyavskii B. È., Rowen L. H., Tikhonov S. V., Yanchevskii V. I. Bicyclic algebras of prime exponent over function fields // Trans. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol. 358, no. 6. — P. 2579–2610.
- [17] Lieblich M. Twisted sheaves and the period-index problem // Compositio Math. — 2008. — Vol. 144, no. 1. — P. 1–31.
- [18] Merkurjev A. S. Generic element in SK_1 for simple algebras // K-Theory. — 1993. — Vol. 7. — P. 1–3.
- [19] Miki H. On Grunwald–Hasse–Wang’s theorem // J. Math. Soc. Japan. — 1978. — Vol. 30, no. 2. — P. 313–325.
- [20] Saltman D. J. Lectures on Division Algebras. — Providence: Amer. Math. Soc., 1999.
- [21] Suslin A. A. SK_1 of division algebras and Galois cohomology // Algebraic K-Theory. — Providence: Amer. Math. Soc., 1991. — (Adv. Soviet Math.; Vol. 4). — P. 75–99.

