

ИЗУЧЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

И. В. Кирюшин, И. Е. Волюнец

*Белорусский государственный педагогический
университет имени Максима Танка*

Минск, Беларусь

E-mail: sky909@rambler.ru

Для изучения степенных рядов в курсе математического анализа для студентов вузов физических и инженерно-технических специальностей предлагается использовать компьютерное моделирование оптических явлений, таких как интерференция и дифракция. Рассматривается методика проведения интеграционной лабораторной работы (в системе MathCAD), создающая условия для лучшего усвоения нового материала. Компьютерное моделирование создает благоприятные условия для формирования профессиональной компетентности будущих специалистов благодаря повышению мотивации к изучению математики и приобретению навыков прикладного моделирования.

Ключевые слова: математический анализ, степенные ряды, компьютерное моделирование, педагогическая интеграция, компетентность.

Формированию компетентности вузовских выпускников физических и инженерно-технических специальностей может содействовать усиление профессиональной направленности математического образования, которое, в свою очередь, обеспечивается через его интеграцию с физикой. М. Н. Берулава различает в междисциплинарной интеграции три уровня: уровень целостности (высокий), дидактического синтеза (средний) и междисциплинарных связей (низкий) [1, с. 118]. Математический анализ является важнейшей базовой дисциплиной для инженеров и физиков. Педагогическая интеграция математического анализа и физики в области практики образования находится сейчас на уровне междисциплинарных связей. Она может осуществляться через математическое [2] и компьютерное [3] моделирование физических процессов (явлений). В работе [3] были рассмотрены лишь общие вопросы. Поэтому целью данной статьи является рассмотрение методики изучения степенных рядов в курсе математического анализа с использованием компьютерного моделирования оптических явлений, создающей условия для повышения профессиональной компетентности будущих инженеров и физиков.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

При изучении этого материала можно рассмотреть явления многолучевой интерференции света и дифракции Фраунгофера. Если в некоторую точку экрана приходит одновременно N лучей равной интенсивности, а фаза каждого следующего луча сдвинута по отношению к предыдущему лучу на постоянную величину x , то общая интенсивность I , возникающая при их интерференции равна [4, с. 374]:

$$I(x) = I_0 \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad (1)$$

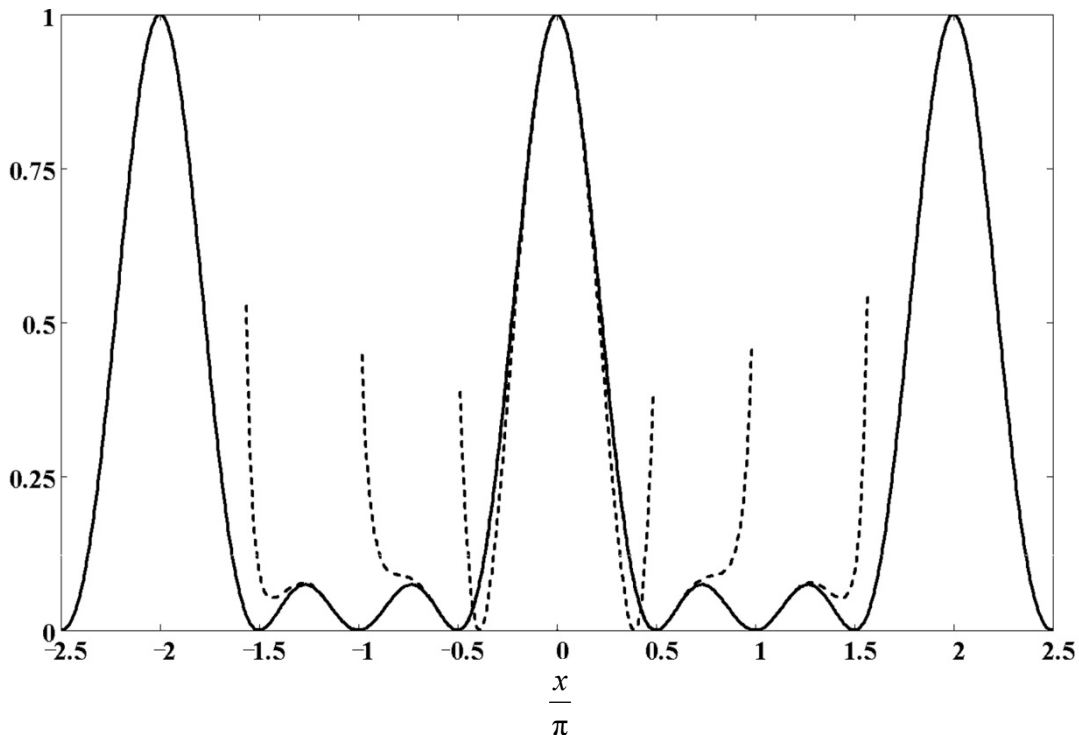
где I_0 – интенсивность, создаваемая каждым из лучей в отдельности. В учебных целях раскладываем величину $I(x)$ в ряд, используя разложение синуса в ряд Маклорена. Частичная сумма $S_m(x)$ с номером m будет иметь вид

$$S_m(x) = \left[\frac{\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{Nx}{2}\right)^{2n+1}}{\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}} \right]^2. \quad (2)$$

При значениях $x = 2\pi k$ ($k \in Z$) выражение (1) становится неопределенным, а эту неопределенность вида $(0/0)$ можно раскрыть, дважды применяя правило Лопиталя – Бернулли. Следует также показать студентам, как найти предел, пользуясь первыми членами разложения в ряд числителя и знаменателя (2). При $m = 0$ получим

$$I(2\pi k) = \lim_{x \rightarrow 2\pi k} I_0 \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} = I_0 \frac{(Nx/2)^2}{(x/2)^2} = I_0 N^2. \quad (3)$$

Найдена интенсивность в главных максимумах. Она оказалась в N^2 раз больше интенсивности отдельного колебания, поскольку результирующая амплитуда, очевидно, возросла в N раз, а интенсивность, как известно, пропорциональна квадрату амплитуды. Для компьютерного моделирования (в системе MathCAD) удобно нормировать общую интенсивность на $I_0 N^2$. Используем выражения (1–2) после нормировки, например при $N = 4$ (четыре луча), полагая, что в равенстве (2) $m = 1, 5, 10$. По оси абсцисс откладываем величину x , выраженную в единицах π на рисунке.



Графики зависимостей $I(x)/(I_0 N^2)$ (сплошная линия) и $S_m(x)$ (пунктир, $m = 1, 5, 10$)

Следует обратить внимание учащихся на то, что предельное значение нормированной интенсивности в главных максимумах (при $x/\pi = 0, \pm 2, \dots$), как видно из графиков, совпадает с рассчитанным с помощью рядов. Кроме того, с ростом величины m точность аппроксимации возрастает, аппроксимирующие кривые «облегают» все большее число максимумов, а «точка отрыва» постепенно удаляется от главного максимума, наблюдаемого при $x = 0$.

Затем переходят к моделированию дифракции Фраунгофера от бесконечно длинной щели. В этом случае интенсивность $I(\varphi)$ дифрагированного света в точке экрана, положение которой определяется углом φ с оптической осью линзы, равна [4, с. 396]:

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2(\pi b(\sin \varphi)/\lambda)}{(\pi b(\sin \varphi)/\lambda)^2}, \quad (4)$$

где I_0 – интенсивность в середине дифракционной картины (напротив центра линзы), b – ширина щели, λ – длина волны света. Очевидно, при значениях φ , удовлетворяющих условию $b \sin \varphi = \pm k\lambda$ ($k \in N$), интенсивность обращается в нуль (положение минимумов). Однако при стремлении величины φ к нулю имеется неопределенность вида $(0/0)$, которую можно раскрыть, применяя правило Лопиталя – Бернулли дважды. Надо продемонстрировать студентам, как можно найти указанный предел, используя разложение величины $I(\varphi)$ в ряд по степеням $x = \sin \varphi$ (после выполнения деления):

$$I(x) = I_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi b x}{\lambda} \right)^{2n} \right]^2. \quad (5)$$

Из этого соотношения легко получить, что $\lim_{\varphi \rightarrow 0} I(\varphi) = \lim_{x \rightarrow 0} I(x) = I_0$. При компьютерном моделировании мы будем опираться на соотношения (4–5).

Для нормированной интенсивности $I(x)/I_0$ (например, при отношении $b/\lambda = 8$) строим график функции, определяемой зависимостью (4), и графики частичных сумм ряда (5), ограничиваясь значениями максимального индекса, равными $m = 1, 5, 10$. При этом надо сделать акцент на том, что предельное значение величины $I(x)/I_0$ в точке $x = \sin \varphi = 0$, как должно быть видно из графиков, совпадает со значением, рассчитанным нами выше с помощью ряда.

ПРИЛОЖЕНИЕ РЯДОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Можно рассмотреть эту тему на примере моделирования явления дифракции Френеля от края полуплоскости. Сначала студенты выполняют аппроксимацию так называемых интегралов Френеля, не берущихся в квадратурах:

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx. \quad (6)$$

Используя разложения косинуса и синуса в ряд Маклорена, а затем, опираясь на свойства равномерно сходящихся (степенных) рядов, проводят интегрирование полученных выражений и приходят к представлению каждого из интегралов Френеля в виде ряда:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n} \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}, \quad (7)$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}. \quad (8)$$

При компьютерном моделировании строятся графики зависимостей $C(x)$ и $S(x)$ согласно (6), а также графики соответствующих частичных сумм по (7–8) с наибольшим значением индекса, равным $m = 1, 2, 5, 6, 9, 10$. Затем можно перейти к моделированию так называемой спирали Корню (клотоиды), позволяющей находить амплитуду светового колебания в любой точке экрана с помощью векторного представления [4, с. , 403]. Уравнение спирали Корню в параметрической форме в координатах $\xi - \eta$ имеет вид: $\xi = C(x)$, $\eta = S(x)$, где $|x|$ – длина дуги данной кривой, измеряемая от начала координат. Компьютерную аппроксимацию клотоиды лучше проводить, используя в качестве одной из координат $\xi = C(x)$ или $\eta = S(x)$ (уравнения (6)), а в качестве другой – частичные суммы ряда (8) или (7). С увеличением верхнего индекса частичной суммы длина участка «совпадения» аппроксимирующей кривой со спиралью Корню возрастает.

Далее следует рассмотреть результат применения клотоиды для расчета интенсивности светового колебания в некоторой точке P экрана. Относительная интенсивность $I(P)$ равна:

$$I(P) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} - C(x) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S(x) \right)^2 \right). \quad (9)$$

Положение точки P будем характеризовать координатой z , отмеряемой от границы геометрической тени, которую отбрасывает на экран край полуплоскости. Если точка наблюдения находится в освещенной области, то $z > 0$, $x < 0$. В области геометрической тени $z < 0$, $x > 0$.

При аппроксимации расчет относительной интенсивности проводим с помощью (9), в котором вместо $C(x)$ и $S(x)$ используем частичные суммы рядов (7–8) с одинаковым верхним индексом m . Обращаем внимание студентов на характерные особенности поведения аппроксимирующих кривых с увеличением значения m .

Продуктивное обучение математике может достигаться путем постановки ряда исследовательских интеграционных задач. Например, достаточно сложной задачей, которую можно предложить студентам для самостоятельной домашней работы, является оценка погрешности приближения функций, рассмотренных выше, частичными суммами рядов. Более простое задание: проанализировать влияние значения какого-либо параметра на конечный результат моделирования и найти наиболее оптимальный диапазон, обеспечивающий наглядное представление модели. Так или иначе, творческие задания, на наш взгляд, должны быть обязательным атрибутом интеграционного обучения.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Эффективность математической подготовки студентов физических и инженерно-технических специальностей напрямую связана с их умением использовать математику в своей практической деятельности. Совершенное владение математикой подразумевает не только знание основ математической теории, но и возможность ее практического применения. К сожалению, последнему моменту в курсе математики уделяется в настоящее время еще не достаточно внимания. Приобретение студентами математических умений и навыков при решении чисто математических задач на практических занятиях не гарантирует автоматического «переноса» этих умений и навыков на прикладные задачи, где требуется работа с математической моделью физического явления.

Обучение математическому моделированию – это весьма сложный процесс, который нельзя отдавать только «на откуп» специальным физическим и техническим дисциплинам, а следует начинать уже в курсах математических дисциплин. Очевидно, лишь в ходе изучения математики студенты могут приобрести ценный математический опыт, связанный со всеми тонкостями, условиями и ограничениями в применении математического аппарата при моделировании тех или иных физических явлений. Особенно важной представляется мотивационная функция прикладного моделирования. Она может обеспечить значительный рост интереса учащихся к изучению математики благодаря естественному приоритету профессиональных ценностей и установок. Компьютерное моделирование, опирающееся, разумеется, на моделирование математическое, должно сыграть здесь весьма важную роль, особенно в связи с развитием информационного общества.

Моделирование на компьютере в нашем случае обеспечивает повторение материала из курса математического анализа по темам «Предел функции», «Параметрически заданные функции», «Интеграл с переменным верхним пределом». Наконец, студенты могут приобрести определенные навыки в компьютерном моделировании физических явлений. В целом компьютерное моделирование, как оно рассмотрено выше, создает, по нашему мнению, условия, необходимые для повышения профессиональной компетентности выпускников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берулава, М. Н.* Интеграция содержания образования / М. Н. Берулава; Рос. акад. образования. М. : Педагогика, 1993. 170 с.
2. *Беломестнова, В. Р.* Математическое моделирование как средство интеграции курса математики с физическими дисциплинами при обучении студентов физических специальностей / В. Р. Беломестнова // Омский научный вестник. 2006. № 7 (43). С. 192–201.
3. *Кирюшин, И. В.* Построение межпредметных связей математики и физики в курсе математического анализа с использованием компьютерного моделирования физических процессов / И. В. Кирюшин // Весці БДПУ. Сер. 3. 2009. № 4. С. 16–21.
4. *Савельев, И. В.* Курс общей физики: учеб. пособие: в 3 т. / И. В. Савельев. 3-е изд. М. : Наука, 1988. Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. 496 с.