

**СБОРНИК РАБОТ  
63-Й НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
СТУДЕНТОВ И АСПИРАНТОВ  
БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТА**

Минск, 23 – 26 мая 2006 г.

**В ТРЕХ ЧАСТЯХ**

**ЧАСТЬ I**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**СБОРНИК РАБОТ  
63-Й НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
СТУДЕНТОВ И АСПИРАНТОВ  
БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТА**

Минск, 23 – 26 мая 2006 г.

**В ТРЕХ ЧАСТЯХ**

**ЧАСТЬ I**

**МИНСК  
2006**

УДК 082.2  
ББК 94я43  
С23

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Л. М. Томильчик;  
доктор физико-математических наук Ф. Ф. Комаров;  
доктор физико-математических наук, профессор Ф. Е. Ломовцев;  
доктор химических наук Л. П. Круль;  
кандидат физико-математических наук, доцент М. В. Игнатенко и др.

**Сборник работ 63-й научной конференции студентов и аспирантов**  
С23 Белгосуниверситета: В 3 ч. ч.1 – БГУ, 2006. – 219 с.  
**ISBN 985-445-369-3** (ч.1).

В первую часть сборника включены доклады студентов и аспирантов механико-математического факультета, факультета радиофизики и электроники, физического факультета, а также химического факультета, на 63-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета (23–26 мая 2006 года).

**УДК 082.2**  
**ББК 94я43**

**ISBN 985-445-369-3 (ч.1)**  
**ISBN 985-445-358-5**

© БГУ, 2006

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ  
НЕАВТОНОМНЫЙ СЛУЧАЙ****Н. В. Бедюк****ВВЕДЕНИЕ**

При переходе от обычных дифференциальных уравнений к нелинейным уравнениям с обобщенными коэффициентами возникают принципиально неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Многими авторами предложены различные способы трактовки решений некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений. К сожалению, различные трактовки одного и того же нелинейного уравнения приводят к различным решениям, и предпочесть ту или иную интерпретацию можно только с помощью каких-либо соображений, используемых при моделировании решаемой практической задачи данным уравнением. В данной статье ограничимся изучением следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))\dot{L}(t) \quad (1)$$

где  $\dot{L}(t)$  – обобщенная производная функции ограниченной вариации. Рассмотрим некоторые подходы к решению данного уравнения. Первый подход связан с попытками формализации такой задачи в рамках теории обобщенных функций и упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении  $f(t, x(t))\dot{L}(t)$ . В [1, гл.1, §8 с. 41] вводится определение умножения, которое для гладких функций совпадает с классической формулой для производной сложной функции. В [2] в рамках секвенциального подхода теории обобщенных функций вводится определение произведения разрывной функции на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения. Решения, понимаемые в смысле работ [2], отличаются от решений, рассматриваемых в [1]. Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi, x(\xi))dL(\xi)$$

в котором интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса, Перрона-Стилтьеса и т.д. [3],[4]. Однако при таком толковании скачки решения будут зависеть от определения интегрируемой функции в точках разрыва функции  $L(t)$ , что является недостатком данного подхода. Третий подход восходит к работе [5] и опирается на идею аппроксимации искомого решения уравнения (1) классическими, порожденными гладкими приближениями функции  $L(t)$ . Отметим, что решения, полученные в [1] с помощью первого и последнего подхода совпадают.

В настоящее время активно разрабатывается подход, связанный с рассмотрением уравнения (1) в алгебре новых обобщенных функций. Отметим в этом направлении работы [6],[7].

В данной работе уравнение (1) рассматривается как уравнение в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций и показывается, что при некоторых условиях полученная в качестве решения новая обобщенная функция ассоциирует обычной, которую естественно назвать решением (1). Также показывается, что решение (1) в смысле всех описанных выше подходов может быть получено из уравнения в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций.

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функция  $f : T \times R \rightarrow R$ , где  $T = [a, b]$ , липшицева по обоим переменным:

$$|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| < C_1 |t_1 - t_2| + C_2 |x_1 - x_2|, \quad (2)$$

и имеет ограниченный рост, то есть для  $\forall t \in T$

$$|f(t, x)| < C_3 (1 + |x|) \quad (3)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – константы не зависящие от  $t$  и  $x$ .

Пусть функция  $L : T \rightarrow R$  – непрерывна справа и имеет ограниченную вариацию.

Уравнению (1) в алгебре новых обобщенных функций соответствует уравнение в дифференциалах, которое на уровне представителей имеет вид:

$$\begin{cases} x_n(t + h_n) - x_n(t) = f_n(t, x_n(t))(L(t + h_n) - L(t)) \\ x_n(t)|_{[a, a+h_n]} = x_n^0(t) \end{cases} \quad (4)$$

где  $h_n > 0$ ,  $L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L(t+s)\rho_n(s)ds$ ,  $\rho_n$  – «шапочка», то есть

$$\rho_n \in C^\infty(R), \rho_n \geq 0, \text{supp } \rho_n \subseteq [0, \frac{1}{n}], \int_0^{1/n} \rho_n(s)ds = 1, \quad f_n(t) = (f * \tilde{\rho}_n)(t) =$$

$$= \int_{[0, 1/n]^2} f(t+u, x+v)\tilde{\rho}_n(u, v)d\sigma, \quad \text{а } \tilde{\rho}_n \in C^\infty(R^2), \tilde{\rho}_n \geq 0, \text{supp } \tilde{\rho}_n \subseteq [0, 1/n]^2,$$

$$\int_{[0, 1/n]^2} \tilde{\rho}_n(u, v)d\sigma = 1.$$

Для любого  $t$  справедливо следующее представление:  $t = \tau_t + m_t h_n$ , где  $\tau_t \in [a, a + h_n]$ ,  $m_t \in N$ . Тогда решение (4) может быть записано в явном виде:

$$x_n(t) = x_n(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(t_k, x_n(t_k))(L(t_{k+1}) - L(t_k)) \quad (5)$$

В данной работе исследуется предельное поведение решения  $x_n$  задачи (4).

Чтобы описать предел последовательности  $x_n$ , рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = x^0 + \int_a^t f(s, x(s))dL^c(s) + \sum_{a < s \leq t} (\varphi(\Delta L(s)f(s, \cdot), x(s-), 1) - x(s-)) \quad (6)$$

где  $L^c$  – непрерывная часть  $L$ ,  $\Delta L(s) = L(s+) - L(s-)$  – величина скачка в точке  $s$ , а  $\varphi$  – решение следующего интегрального уравнения:

$$\varphi(z, x, u) = x + \int_{[0, u]} z(\varphi(z, x, v))\mu(dv) \quad (7)$$

где  $\mu(dv)$  – вероятностная мера, определенная на борелевских подмножествах отрезка  $[0, 1]$ , а интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса.

В дальнейшем будем рассматривать меры, порожденные функциями  $\sigma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  такими, что найдется множество попарно непересекающихся интервалов  $(a_i, b_i] \subset [0, 1], i \in I$ , что

$$\sigma(u) = \begin{cases} b_i, u \in (a_i, b_i] \\ u, u \notin \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i] \end{cases}$$

Обозначим через  $G$  множество всех функций такого вида.

Введем в рассмотрение функцию  $F_n : R \rightarrow [0,1], F_n(x) = \int_x^{1/n} \rho_n(s) ds$  и об-

ратную к ней  $F_n^{-1}(u) = \sup \{x : F_n(x) = u\}$ .

**Теорема** Пусть функции  $f$  и  $L$  удовлетворяют условиям (2) и (3),

$$\int_{t \in T} |x_n^0(\tau_t) - x^0| dt \rightarrow 0, \quad F_n(F_n^{-1}(u) - \delta h_n) \rightarrow \sigma(u) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0,$$

$\forall \delta \in (0,1)$  и  $\forall u \in [0,1]$  – точки непрерывности функции  $\sigma$ .

Тогда  $\sigma \in G$  и

$$\int_{t \in T} |x_n(t) - x(t)| dt \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$ , где  $x_n$  – решение (4), а  $x$  – решение (5) с мерой  $\mu$  порожденной  $\sigma$ .

*Замечание* Таким образом, выбирая различные «шапочки»  $\rho_n$ , мы получаем различные меры  $\mu$ , в зависимости от которых получаются различные решения (1). В частности, при соответствующем выборе «шапочки»  $\rho_n$  могут быть получены решения (1) в смысле всех описанных во введении подходов.

### Литература

1. Завалицин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
2. Antosik P., Liegza J. Products of measure and functions of finite variations // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. – Varna, 1979. – P. 20–26.
3. Das P.C., Sharma R.R. Existence and stability of measure differential equations // Czech. Math. J. –1972–V.22.–№1–P.145–158.
4. Pandit S.G., Deo S.G. Differential systems involving impulses // Lect. Notes. Math.–1982. V.954.
5. Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czech. Math. J. –1958.–V.8.–№1.–P.360–388
6. Yablonski A. Differential equations with generalized coefficients // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
7. Ковальчук А.Н., Новохрост В.Г., Яблонский О.Л.. Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением. // Известия ВУЗов. Математика. – 2005. – № 3. – С. 23–31.

## ЭФФЕКТ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Т. А. Бракоренко

Одной из актуальных задач современного материаловедения является создание принципиально новых материалов, способных проявлять программируемые, существенно нелинейные деформационные свойства, вплоть до получения адаптивной (приспособительной) реакции на внешнее воздействие [1]. В частности, к таковым можно отнести материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона  $\nu$ , способные расширяться/сужаться в направлении, перпендикулярном одноосному растяжению/сжатию соответственно, иначе называемые ауксетичные или ауксетики [2].

У большинства конструкционных материалов значения  $\nu$  колеблются в пределах 0,2–0,4. Тем не менее, теоретические значения  $\nu$  для изотропного материала лежат в пределах  $-1 \leq \nu \leq 0,5$ . Что касается реализации программируемого деформационного поведения, ауксетики, в частности, позволяют в условиях стесненного деформирования достичь высокой несущей способности фрикционных соединений [3], что делает их наиболее предпочтительными для использования в крепежных изделиях.

Целью работы является анализ механизмов, приводящих к отрицательным значениям  $\nu$  в твердых телах, и нахождение такого материала с ауксетичными и неауксетичными включениями, который на тепловое воздействие отвечает нулевым тепловым расширением. Это сделает более широким дальнейшее использование ауксетиков в технике.

На сегодняшний день известно немало случаев проявления отрицательных значений  $\nu$  в кристаллах и композиционных материалах. Учеными было выделено три структурных уровня реализации данной аномалии деформационного поведения: макро-, мезо- и микроскопический. Также известны стержневые модели материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона [4]. Несмотря на то, что коэффициент Пуассона является структурно более чувствительной характеристикой по сравнению с модулем упругости, в литературе мало внимания уделяется изучению причин, ведущих к ауксетичному поведению на атомно-молекулярном уровне. Реализация отрицательных значений  $\nu$  на атомно-молекулярном уровне позволит создавать конструкционные материалы с программируемыми свойствами, а также избежать дефектности структуры и нарушения адгезионного контакта между компонентами. Однако, для решения задач по выявлению данного эффекта на уровне молекул и макромолекул требуется решение сложных квантовомеханических задач. Про-

стейший способ их решения – перенесение принципа сочетания жестких и податливых элементов, реализованного на макро- и мезоскопическом уровнях в композитных материалах и пенопластах, на молекулярный уровень.

Помимо гипотетических структур [5], ауксетичное поведение на данном уровне проявляют жидкие кристаллы и многие монокристаллы металлов. Так, среди тригональных монокристаллов такими свойствами обладают мышьяк и висмут. Среди гексагональных плотноупакованных фаз металлов – цинк и бериллий [6]. В большинстве случаев такие эффекты проявляются в кубических кристаллах вдоль некоторых кристаллографических осей.

В заключение анализа механизмов, приводящих к отрицательным значениям  $\nu$  в твердых телах, отмечу, что существуют альтернативные подходы к созданию ауксетичных фаз, основанные на моделировании упругих свойств термодинамически стабильных изотропных систем, состоящих из сферических частиц. Также был предложен механизм реализации отрицательных значений  $\nu$  в фрактальных средах [7].

Таким образом, в данной работе были описаны некоторые примеры успешной реализации методов молекулярной динамики и молекулярного дизайна для решения макромеханических задач по созданию аномально упругих материалов нового типа, которые, возможно, в будущем смогут применяться в различных областях науки и техники.

Выше было упомянуто о способности ауксетиков расширяться/сужаться в направлении, перпендикулярном одноосному растяжению/сжатию соответственно (рис. 1). Такое свойство делает оправданным предположение о существовании материала, состоящего из ауксетичных и неауксетичных включений, который «не реагирует» на тепловое воздействие. Формулировка проблемы в таком виде требует пояснения. Понятно, что деформации будут присутствовать как в ауксетичных, так и в неауксетичных слоях, но предполагается, что ауксетичный слой поглотит деформации неауксетичного и тепловое расширение материала в целом будет нулевым или даже отрицательным. При такой постановке возникает немало вопросов. Какова скорость поглощения деформаций? Как соотносятся скорость появления деформаций в неауксетичном слое и скорость ее поглощения в ауксетичном? Возможно ли получить отрицательный коэффициент линейного теплового расширения? На эти вопросы сейчас пытаются ответить многие группы ученых по всему миру.

Целью моей работы также является оптимизация геометрических параметров, таких как толщина, число слоев, вид элементарной ячейки и т.д., для того, чтобы получить материал с нулевым или близким к нулевому коэффициентом термического расширения.

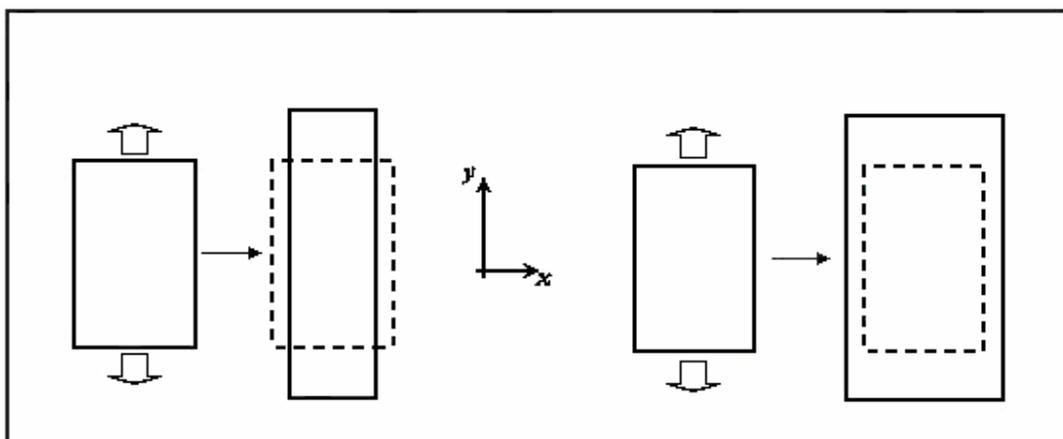


Рис. 1. Реакция неауксетичного (слева) и ауксетичного (справа) материалов на одноосное растяжение

Целью моей работы также является оптимизация геометрических параметров, таких как толщина, число слоев, вид элементарной ячейки и т.д., для того, чтобы получить материал с нулевым или близким к нулевому коэффициентом термического расширения.

В процессе решения данной задачи были сделаны следующие выводы.

Самой результативной оказалась слоистая схема укладки, т.е. чередование ауксетичного и неауксетичного слоев. Именно при таком способе укладки ауксетичных и неауксетичных слоев удалось достичь желаемых результатов. Слои в данной системе связаны без проскальзывания, трение между слоями не учитывается, т.е. слои свободно перемещаются друг относительно друга. За расчетный образец была взята система, состоящая из двух слоев, один из которых имеет положительный коэффициент Пуассона, а другой является ауксетиком. Были построены зависимости двух типов: зависимость термических перемещений:

- от коэффициента Пуассона,
- от толщины слоев системы.

Данные для расчета слоя, состоящего из обычного материала, были взяты из технических источников, т.е. коэффициенты Пуассона брались для реально существующих материалов (дерево, сталь, керамика). Данные для расчета слоя, состоящего из ауксетичного материала, брались с обратным знаком. При этом предполагается существование таких материалов и возможность их получения. Работа осложнялась отсутствием сведений в научной литературе о поведении ауксетиков в температурном поле. Тем не менее, графически удалось показать компенсацию перемещений составной пластины в результате наложения перемещений противоположного направления. Зависимость термических перемещений слоев от коэффициентов теплового расширения материалов, из которых данные слои состоят, показала, что перемещения тем меньше, чем устойчи-

вее материал к температурному полю, т.е. при минимальном коэффициенте теплового расширения. При этом температура и толщина слоев не изменяются. Из зависимости термических перемещений слоев от их толщин, когда температура и коэффициенты теплового расширения материалов слоев постоянны, сделан вывод, что термические перемещения каждого отдельно взятого слоя не зависят от его толщины, что не противоречит принятым в ходе решения задачи предположениям. Зависимость термических перемещений слоев от коэффициента теплового расширения ауксетичного материала, из которого состоит верхний слой, когда температура, толщина слоев и коэффициент теплового расширения неауксетичного материала являются константами, демонстрирует то, что при определенных значениях коэффициента теплового расширения ауксетичного слоя возможно получение нулевых термических перемещений.

Таким образом, цель работы была успешно достигнута. Были получены условия, при которых возможно получение материала с нулевым коэффициентом теплового расширения. В процессе работы над решением данной проблемы возникли новые вопросы, поставлены новые цели, на достижение которых будет направлена наша дальнейшая деятельность.

#### Литература

1. *Pleskachevsky Yu. M., Shilko S. V., Stelmakh S. V.* // Journal of Wave – Material Interaction.–1999.– Vol. 14, № 1 – 2, p.49 – 58.
2. *Конек Д. А., Черноус Д. А., Бодрунов Н. Н.* // Материаловедение, технологии и экология на рубеже веков /Материалы Всерос. научн. конф.– Томск, 2000.– с.105 – 108.
3. *Шилько С. В.* // Трение и износ. – 1995. – Т. 15, № 3. – с.429 – 437.
4. *Конек Д. А., Войцеховски К. В., Плескачевский Ю. М., Шилько С. В.* Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. // Механика композиционных материалов и конструкций.– 2004.– том 10, №1 – с.35–69.
5. *Lakes R. S.* // Advanced Materials.– 1993.–Vol.5.– P.293–296.
6. *Черноус Д. А., Шилько С. В., Плескачевский Ю. М.* // Механика композитных материалов и конструкций. – 1998. –№3. – с.28 – 38.
7. *Плескачевский Ю. М., Шилько С. В.* Ауксетики: модели и приложения. // Вести НАНБ.– 2003.– №4 – с.58–68.

### СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КУСОЧНО-СГЛАЖИВАЮЩИХСЯ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

**К. В. Василевский**

Дифференциально-операторные уравнения первого порядка с переменными областями определения кусочно сглаживающихся операторов

изучались в [1] в классе сильных решений. В данной работе такие дифференциально-операторные уравнения исследуются в классе слабых решений при несколько других предположениях и, в частности, при сопряженных вложениях областей определения соответствующих сопряженных операторов в точках разрывов.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $|\cdot|$  рассмотрим задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения:

$$\mathcal{L}(t)u \equiv \frac{du}{dt} + A(t)u = f, \quad t \in ]0, T[, \quad (1)$$

с начальным условием

$$lu \equiv u(0) = u_0 \in H, \quad (2)$$

где  $u$  и  $f$  – функции переменной  $t$  со значениями в  $H$  и  $A(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , – линейные неограниченные операторы в  $H$  с зависящими от  $t$  областями определения  $D(A(t))$ .

Предполагаем, что  $A(t)$  удовлетворяют следующим условиям.

I. Операторы  $A(t)$  замкнуты в  $H$  и при каждом  $t \in [0, T]$  выполняются неравенства:

$$[u]_{(t)}^2 \equiv \operatorname{Re}(A(t)u + c_0 u, u) \geq c_1 |u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad (3)$$

$$\langle v \rangle_{(t)}^2 \equiv \operatorname{Re}(A^*(t)v + c_0 v, v) \geq c_1 |v|^2 \quad \forall v \in D(A(t)), \quad c_0 \geq 0, \quad c_1 \geq 0, \quad (4)$$

где  $A^*(t)$  – сопряженные операторы в  $H$  к операторам  $A(t)$  и  $D(A^*(t))$  – их области определения.

II. На каждом частичном интервале  $I_i = [t_i, t_{i+1}[$ ,  $i = \overline{0, m}$ , разбиения  $[0, T[ = \bigsqcup_{i=0}^m I_i$ , где  $t_0 = 0$ ,  $t_{m+1} = T$ , существуют максимально диссипативные операторы  $B(t)$  в  $H$  с зависящими от  $t$  областями определения  $D(B(t))$  такие, что при почти всех  $t \in ]0, T[$  операторы  $A^*(t)$  подчинены сопряженным операторам  $B^*(t)$  операторов  $B(t)$  с областями определения  $D(B^*(t))$ , т. е.

$$|A^*(t)v| \leq c_{2,i} |B^*(t)v| \quad \forall v \in D(B^*(t)), \quad c_{2,i} > 0, \quad i = \overline{0, m}.$$

При каждом  $t \in I_i$  операторы  $B(t)$  имеют ограниченные обратные  $B^{-1}(t)$ , у которых сопряженные операторы  $(B^{-1}(t))^* \in L_\infty(I_i, \Lambda(H))$  сильно непрерывны по  $t$  в  $H$  и при почти всех  $t \in I_i$  имеют ограниченную сильную производную  $d(B^{-1}(t))^*/dt \in L_\infty(I_i, \Lambda(H))$  и пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( v, \frac{d(B_\varepsilon^{-1}(t))^*}{dt} B_\varepsilon^{-1}(t)v, v \right) dt = 0 \quad \forall v \in L_2(I_i, H_t^+), \quad (5)$$

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( A^*(t)(B_\varepsilon^{-1}(t))^* B_\varepsilon^{-1}(t)v, v \right) dt \leq c_{3,i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |v|^2 dt \quad \forall v \in L_2(I_i, H_t^+), \quad (6)$$

где  $c_{3,i} \geq 0$  и  $(B_\varepsilon^{-1}(t))^* = (I - \varepsilon B^*(t))^{-1}$  – сопряженные сглаживающие операторы к сглаживающим операторам  $B_\varepsilon^{-1}(t) = (I - \varepsilon B(t))^{-1}$ ,  $\varepsilon > 0$ .

III. При всех  $t \in I_i$  обратные  $A^{-1}(t)$  операторов  $A(t)$  сильно непрерывны по  $t$  в  $H$ , при почти всех  $t \in I_i$  в  $H$  имеют сильную производную  $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(I_i, \Lambda(H))$ ,  $A(t)(dA^{-1}(t)/dt) \in L_\infty(I_i, \Lambda(H_t^+, H))$ ,  $i = \overline{0, m-1}$ , и в точках разрыва  $t_i$  операторов  $B_\varepsilon^{-1}(t)$  справедливы вложения

$$D(B^*(t_i + 0)) \subset D(A^*(t_i - 0)), \quad i = \overline{1, m}.$$

Докажем корректность поставленной задачи Коши (1), (2) в классе слабых решений.

### ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Сначала введем нужные пространства и дадим определение слабых решений задачи Коши (1), (2). Пусть  $H_t^-$  и  $H_t^{*-}$  – антидвойственные гильбертовы пространства к гильбертовым пространствам  $H_t^+$  и  $H_t^{*+}$ , которые получаются замыканием множеств  $D(A(t))$  и  $D(A^*(t))$  по эрмитовым нормам  $[\cdot]_{(t)}$  и  $\langle \cdot \rangle_{(t)}$  из (3) и (4) соответственно. Обозначим пространства  $\mathbf{H}^- = L_2(]0, T[, H_t^-)$ ,  $\mathbf{H} = L_2(]0, T[, H)$ ,  $\mathbf{H}^{*-} = L_2(]0, T[, H_t^{*-})$ .

*Определение 1.* Функция  $u \in \mathbf{H}$  называется *слабым решением* задачи Коши (1), (2) для  $f \in \mathbf{H}^{*-}$  и  $u_0 \in H$ , если имеет место тождество

$$\int_0^T \left\{ (u(t), A^*(t)\varphi(t)) - \left( u(t), \frac{d\varphi}{dt} \right) \right\} dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{(t)} dt + (u_0, \varphi(0))$$

для всех  $\varphi \in \Phi = \{\varphi \in \mathbf{H} : \varphi(t) \in D(A^*(t)), t \in [0, T]\}$ ; слабая производная  $d\varphi/dt$ ,  $A^*(t)\varphi \in \mathbf{H}$ ,  $\varphi(T) = 0$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(t)}$  – полуторалинейные формы антидвойственности между  $H_t^{*+}$  и  $H_t^{*-}$ .

Верны следующие теоремы существования и единственности решений.

**Теорема 1.** Если выполняется условие I, то для каждого  $f \in \mathbf{H}^{*-}$  и  $u_0 \in \mathbf{H}$  существует слабое решение  $u \in \mathbf{H}$  задачи Коши (1), (2).

*Доказательство* состоит в применении проекционной теоремы из [2]

в пространствах  $F$  с нормой  $\|j\| = \left( \int_0^T \langle j(t), j(t) \rangle_{(t)} dt + |j(0)|_{\mathbf{H}}^2 \right)^{1/2}$  и

$F = \mathbf{H}$  к форме  $E(u, j) = \int_0^T e^{2c_0 t} \left\{ (u(t), A^*(t)j(t)) - \left( u(t), \frac{dj}{dt} \right) \right\} dt$  и

функционалу  $L(j) = \int_0^T \langle f(t), j(t) \rangle_{(t)} dt + (u_0, j(0))$ .

**Теорема 2.** Если выполняются условия I - III, то для каждого  $f \in \mathbf{H}^{*-}$  и  $u_0 \in \mathbf{H}$  слабое решение  $u \in \mathbf{H}$  задачи Коши (1), (2) единственно.

*Доказательство.* Пусть  $u \in \mathbf{H}$  – слабое решение задачи Коши (1), (2) при  $f = 0$  и  $u_0 = 0$ . Тогда справедливо тождество

$$\int_0^T \left\{ (u(t), A^*(t)j(t)) - \left( u(t), \frac{dj}{dt} \right) \right\} dt = 0 \quad \forall j \in F. \quad (7)$$

Докажем, что  $u = 0$  в  $\mathbf{H}$ . Для этого достаточно показать, что  $u = 0$  при почти всех  $t$  на каждом интервале  $I_i, i = \overline{0, m}$ . Сначала убедимся в том, что  $u = 0$  почти всюду на  $I_0 = [0, t_1[$ . В тождестве (7) можно положить  $j = (B_e^{-1}(t))^* h$  для  $h, dh/dt \in \mathbf{H}, h(t) = 0 \forall t \in I_0$ . Из условия II вытекает, что  $j \in F$ . В результате этой подстановки получаем равенство

$$\int_0^{t_1} \left( B_e^{-1}(t)u(t), \frac{dh}{dt} \right) = \int_0^{t_1} \left( u(t), A^*(t)(B_e^{-1}(t))^* h \right) - \int_0^{t_1} \left( u(t), \frac{d(B_e^{-1}(t))^* h}{dt} \right) dt. \quad (8)$$

В нем интегрируем по  $t$  один раз по частям, его распространяем предельным переходом на  $h \in \mathbf{H}$ , полагаем  $h = e^{c(T-t)} B_e^{-1}(t)u$ , берем удвоенную вещественную часть и имеем неравенство

$$\begin{aligned}
& c \int_0^{t_1} e^{c(T-t)} |B_e^{-1}(t)u|^2 dt - 2 \operatorname{Re} \int_0^{t_1} (u(t), A^*(t)(B_e^{-1}(t))^* B_e^{-1}(t)u) dt + \\
& + 2 \operatorname{Re} \int_0^{t_1} e^{c(T-t)} u, \frac{d(B_e^{-1}(t))^*}{dt} B_e^{-1}(t)u dt.
\end{aligned} \tag{9}$$

В неравенстве (9) переходим к пределу при  $e \rightarrow 0$  и ввиду предположений (5), (6) приходим к оценке  $(c - c_{3,0}) \int_0^{t_1} e^{c(T-t)} |u|^2 dt \leq 0$ . Отсюда при  $c > c_{3,0}$  следует, что  $u = 0$  почти всюду на  $I_0$ .

Теперь убеждаемся в том, что  $u = 0$  почти всюду на  $[t_1, t_2]$ . Для этого в тождестве (7) полагаем

$$j(t) = \begin{cases} \mathfrak{S}_0(t), & t \in [0, t_1], \\ (B_e^{-1}(t))^* h, & t \in [t_1, t_2], \\ 0, & t \in I_2, \end{cases} \tag{10}$$

где  $h$  — любые функции из  $\mathbf{H}$ , для которых  $dh/dt \in L_2([t_1, t_2], \mathbf{H})$ ,  $h(t) = 0$  при  $t_1 < t \leq t_2$ , а  $\mathfrak{S}_0(t)$  — решение обратной задачи Коши :

$$\frac{d\mathfrak{S}_0(t)}{dt} - A^*(t)\mathfrak{S}_0(t) = 0, \quad 0 < t < t_1; \quad \mathfrak{S}_0(t_1) = (B_e^{-1}(t_1 + 0))^* h(t_1).$$

В силу условия III принадлежность функций  $\mathfrak{S}_0(t)$  множеству гладких решений доказывается с помощью теоремы гладкости из [1]. Таким образом, после подстановки функций  $j$ , определяемых формулой (10) в (7), получим равенство вида (8) с интегралами по  $[t_1, t_2]$  вместо  $[0, t_1]$ . Далее теми же рассуждениями доказывается, что  $u = 0$  почти всюду на  $[t_1, t_2]$ . Аналогично показывается, что  $u = 0$  на каждом  $I_i = [t_i, t_{i+1}[$ ,  $i = \overline{2, m}$ .

### Литература

1. Ломовцев Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №7. С. 1132-1141.
2. Lions J. - L. Equations differentielles operationnelles et problems aux limites. Berlin: Springer. 1961. 292 p.

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

Д. А. Городецкий

Из научно-технической литературы известно, что использование систем остаточных классов [1; 2] и модулярных систем счисления [3] позволяет в ряде случаев ускорить процесс обработки информации за счет параллельного процесса выполнения операций с малоразрядными остатками от деления числа на заранее выбранные натуральные основания [1; 2; 3]. Кроме того, модулярные коды позволяют обнаруживать и исправлять ошибки как при хранении и передачи числовой информации, так и при выполнении (вычислении) арифметических операций [1; 2].

Основными функциональными узлами модулярных систем счисления являются сумматоры и умножители  $P$ , где  $P = 2n + 1$  и число  $n$  – натуральное. Сумматоры и умножители по модулю  $P$  могут использоваться не только в качестве самостоятельных устройств, выполняющих операции сложения или умножения по модулю  $P$ , но также служат основой для построения других (более сложных) вычислительных устройств по модулю  $P$ .

Проектирование вычислительных устройств модулярной арифметики является весьма сложной задачей, кроме того, проектируя такие устройства необходимо минимизировать такие параметры, как 1) конструктивная сложность (суммарное число входов логических элементов); 2) число уровней; 3) число внешних выводов (суммарное число входов и выходов схемы).

Большинство известных схем вычислительных устройств унитарных кодов по модулю три имеют относительно небольшую конструктивную сложность и небольшое число уровней. В то же время при проектировании подобных устройств уделяется мало внимания на проблему минимизации числа внешних выводов.

В работе предлагаются две логические схемы вычислительных устройств унитарных кодов по модулю три с минимальным числом внешних выводов и одно устройство с управляющим входом.

**1. СУММАТОР УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ ТРИ**, ориентированный на реализацию операции  $A + B + C + D = S \pmod{3}$ , логическая схема которого приведена на *рис. 1*.

Сумматор унитарных кодов по модулю три работает следующим образом. На входы сумматора поступают разряды «равно нулю» и «равно двум» унитарных кодов первого  $A = (a_0, a_1, a_2)$ , второго  $B = (b_0, b_1, b_2)$ , третьего  $C = (c_0, c_1, c_2)$  и четвертого  $D = (d_0, d_1, d_2)$  операндов, где

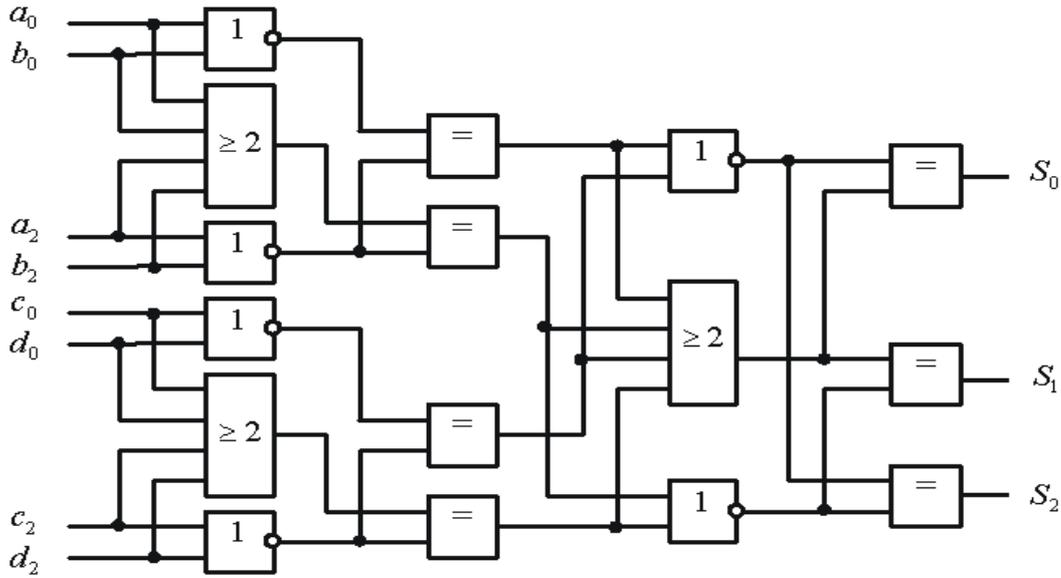


Рис. 1. Сумматор унитарных кодов по модулю три

$a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \{0,1\}$ . При этом  $a_k = 1$  ( $b_k = 1, c_k = 1, d_k = 1$ ) тогда и только тогда, когда  $A = k \pmod{3}$  (соответственно,  $B = k \pmod{3}$  и  $D = k \pmod{3}$ ), где  $k = 0,1,2$ . На выходах сумматора формируется унитарный код результата выполнения операции  $A + B + C + D = S \pmod{3}$ , где  $S = (s_0, s_1, s_2)$  и  $s_0, s_1, s_2 \in \{0,1\}$ . Причем  $s_k = 1$  тогда и только тогда, когда  $A + B + C + D = k \pmod{3}$  и  $k = 0,1,2$ .

**2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ ТРИ**, предназначено для реализации операции  $(A + B) * (C + D) = S \pmod{3}$ . Логическая схема устройства приведена на рис. 2.

Вычислительное устройство работает по аналогии с сумматором унитарных кодов по модулю три, описанным выше, за тем лишь отличием, что на выходах устройства формируется унитарный двоичный код результата выполнения операции  $(A + B) * (C + D) = S \pmod{3}$ , где  $S = (s_0, s_1, s_2)$  и  $s_0, s_1, s_2 \in \{0,1\}$ . Причем  $s_k = 1$  тогда и только тогда, когда  $(A + B) * (C + D) = k \pmod{3}$  и  $k = 0,1,2$ .

Основным достоинством вышеприведенных вычислительных устройств унитарных кодов по модулю три является минимальное число внешних выводов.

**3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО УНИТАРНЫХ КОДОВ ПО МОДУЛЮ ТРИ С УПРАВЛЯЮЩИМ ВХОДОМ**, предназначено для выполнения операций  $A + B = S \pmod{3}$  или  $A - B = R \pmod{3}$ . Логическая схема устройства приведена на рис. 3.

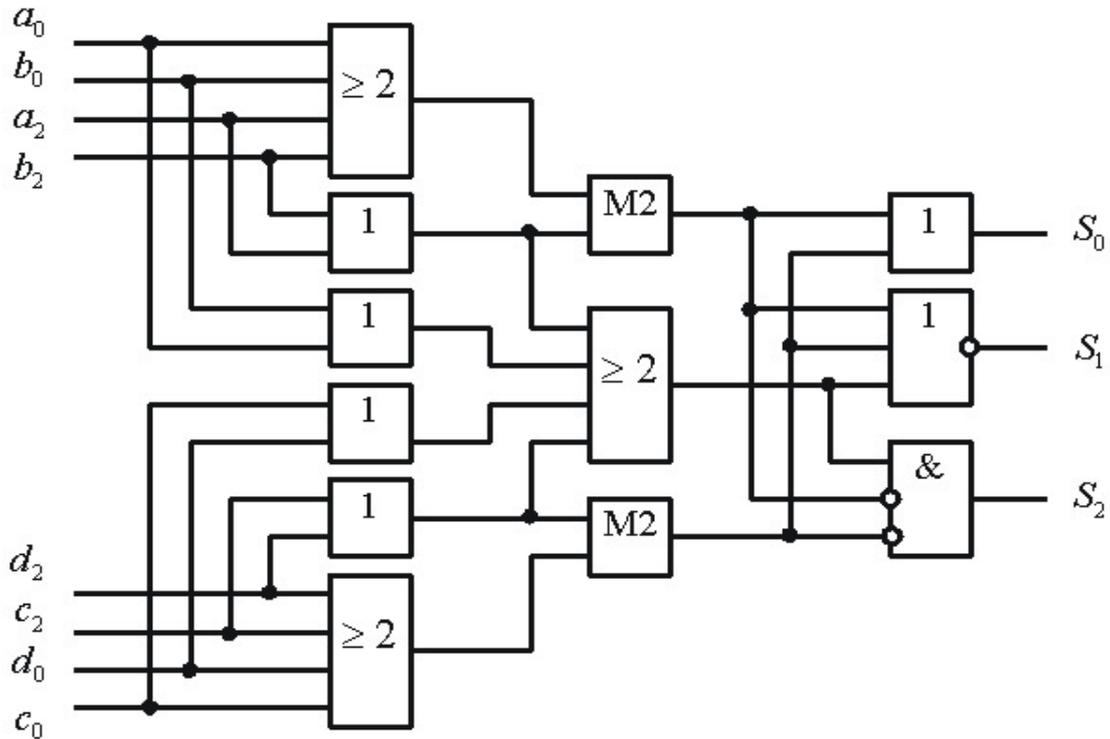


Рис. 2. Вычислительное устройство унитарных кодов по модулю три

Вычислительное устройство унитарных кодов по модулю три работает следующим образом. На информационные входы устройства поступают значения разрядов «равно нулю» и «равно двум» унитарных кодов первого  $A = (a_0, a_1, a_2)$  и второго  $B = (b_0, b_1, b_2)$  операндов, где  $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \{0, 1\}$ . При этом  $a_k = 1$  ( $b_k = 1$ ) тогда и только тогда, когда  $A = k \pmod{3}$  (соответственно,  $B = k \pmod{3}$ ), где  $k = 0, 1, 2$ . На управляющий вход устройства поступает управляющий сигнал  $u = 0$  или  $u = 1$ . На выходах устройства формируется унитарный двоичный код результата выполнения операции  $A + B = S \pmod{3}$ , если  $u = 0$ , или операции  $A - B = R \pmod{3}$ , если  $u = 1$ . Здесь  $S = (s_0, s_1, s_2)$  и  $R = (r_0, r_1, r_2)$ , где  $s_0, r_0, s_1, r_1, s_2, r_2 \in \{0, 1\}$ . Причем  $s_k = 1$  ( $r_k = 1$ ) тогда и только тогда, когда  $A + B = k \pmod{3}$  (соответственно,  $A - B = k \pmod{3}$ ) и  $k = 0, 1, 2$ .

Основным достоинством приведенного вычислительного устройства унитарных кодов по модулю три является минимальное число внешних выводов и возможность

Кроме того, названные устройства имеют небольшую конструктивную сложность и небольшую глубину (относительно известных аналогов). Причем, на все три устройства к настоящему времени оформлены заявки на Патент Республики Беларусь.

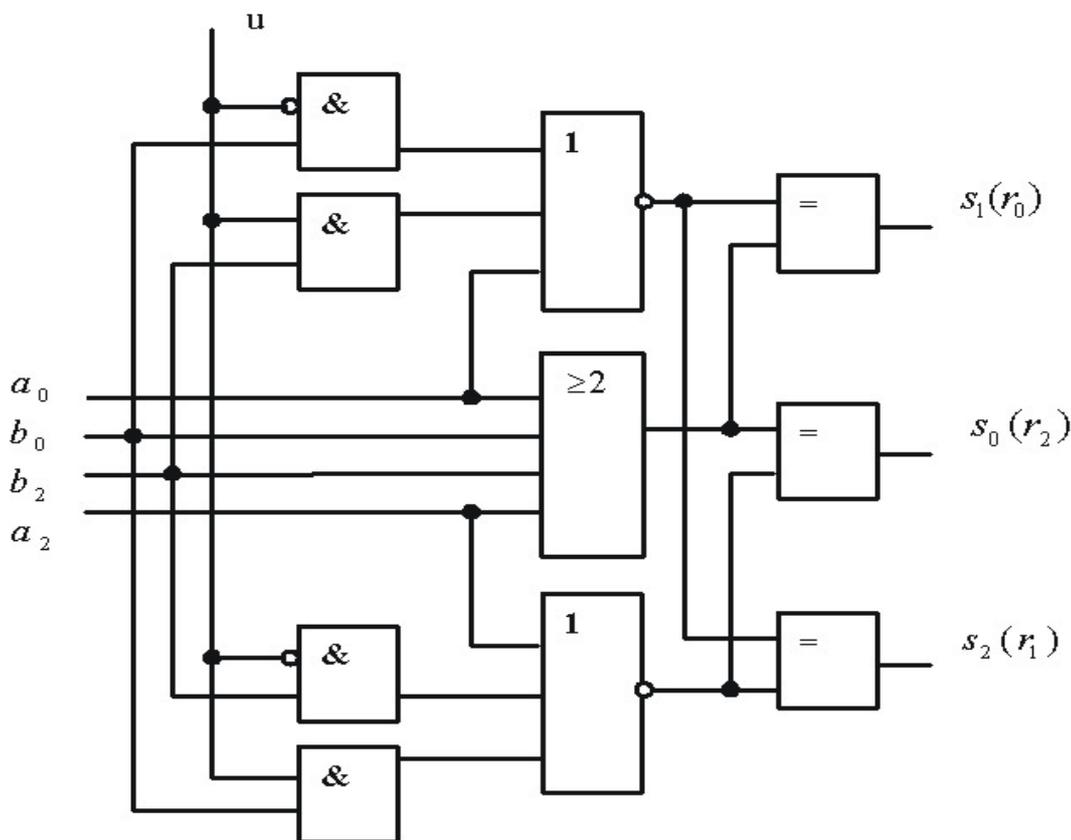


Рис. 3 Вычислительное устройство унитарных кодов по модулю три с управляющим входом

### Литература

1. Торгашев В. А. Система остаточных классов и надежность ЦВМ. – М.: Советское радио, 1973. – 120 с.
2. Долгов А. И. Диагностика устройств, функционирующих в системе остаточных классов. – М.: Радио и связь, 1982. – 64 с.
3. Коляда А. А., Пак И. Т. Модулярные структуры конвейерной обработки информации. – Мн.: Университетское, 1992. – 256 с.

## УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАЗБИЕНИЯ

Е. Е. Гуревский

При решении практических задач оптимизации приходится учитывать различные факторы неопределенности, такие как неточность входной информации, ошибки округления, погрешность вычислений, неадекватность математических моделей реальным процессам и т.п. Это обуславливает внимание многих специалистов к изучению разнообразных аспектов теории некорректных задач, и в частности, к вопросам устойчи-

ности оптимизационных задач. В широком смысле под устойчивостью задачи (как скалярной, так и векторной) понимают существование такой окрестности начальных данных в пространстве параметров задачи, что по отношению к исходной всякая «возмущенная» задача обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности.

В данном докладе рассматривается многокритериальный вариант классической комбинаторной задачи разбиения множества чисел. Скалярная (однокритериальная) задача разбиения может быть интерпретирована, как задача теории расписаний: распределить независимые работы по двум идентичным процессорам так, чтобы время, когда заканчивается последняя выполненная работа, было минимальным (см., например, [1–3]). Исследуется радиус устойчивости векторной задачи разбиения, т. е. предельный уровень возмущений параметров частных критериев, не приводящих к появлению новых парето-оптимальных решений. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости.

Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in Q^n$ ,  $Q = \{-1, 1\}$ ,  $n \geq 2$ ,  $C_i$  –  $i$ -ая строка матрицы  $C = [c_{ij}]_{m \times n} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq 1$ ,  $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$ .

Под  $m$ -критериальной (векторной) задачей разбиения

$$Z^m(C) : \min \{f(x, C) : x \in Q^n\},$$

где

$$f(x, C) = (|C_1x|, |C_2x|, \dots, |C_mx|),$$

будем понимать задачу поиска множества эффективных решений (множества Парето)

$$P^m(C) = \{x \in Q^n : \pi(x, C) = \emptyset\},$$

где

$$\pi(x, C) = \{x' \in X : f(x, C) \geq f(x', C) \text{ \& } f(x, C) \neq f(x', C)\}.$$

В силу конечности  $Q^n$  множество  $P^m(C)$  не пусто при любой матрице  $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ . Кроме того, легко видеть, что множество Парето этой задачи всегда имеет четное число решений, так как из  $x^0 \in P^m(C)$  следует  $-x^0 \in P^m(C)$ .

Устойчивость множество Парето будем исследовать путем прибавления к матрице  $C$  возмущающих матриц множества

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m \times n} : \|C'\|_\infty < \varepsilon\}, \varepsilon > 0,$$

где  $\|C'\|_\infty = \max\{|c'_{ij}| : (i, j) \in N_m \times N_n\}$ .

Следуя [4–6], задачу  $Z^m(C)$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , назовем устойчивой (по функционалу), если множество

$$\Xi(C) = \{\varepsilon > 0 : \forall C' \in \Omega(\varepsilon) (P^m(C + C') \subseteq P^m(C))\} \neq \emptyset.$$

Очевидно, что свойство устойчивости задачи эквивалентно свойству полунепрерывности сверху по Хаусдорфу [5] в точке  $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$  оптимального отображения

$$P^m : \mathbf{R}^{m \times n} \rightarrow 2^{Q^n},$$

т. е. точечно-множественного (многозначного) отображения, которое каждому набору параметров векторного критерия из метрического пространства  $\mathbf{R}^{m \times n}$  ставит в соответствие множество Парето.

В связи с выше изложенным радиусом устойчивости  $\rho^m(C)$  задачи  $Z^m(C)$ ,  $m \geq 1$ , назовем предельный уровень возмущений элементов матрицы  $C$  в пространстве  $\mathbf{R}^{m \times n}$  с метрикой  $l_\infty$ , которые не приводят к появлению новых эффективных решений, т. е.

$$\rho^m(C) = \begin{cases} \sup \Xi(C), & \text{если } \Xi(C) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi(C) = \emptyset. \end{cases}$$

Если  $P^m(C) = Q^n$ , то естественно считать, что радиус равен бесконечности. Задачу  $Z^m(C)$  будем называть нетривиальной, если  $\bar{P}^m(C) := Q^n \setminus P^m(C) \neq \emptyset$ .

Положим

$$\varphi^m(C) = \min_{x \in \bar{P}^m(C)} \max_{x' \in \pi(x, C)} \min_{i \in N_m} \min_{q \in Q} \frac{|C_i(x + qx')|}{\|x + qx'\|_1}.$$

Здесь  $\|\cdot\|_1$  – метрика  $l_1$  в  $\mathbf{R}^n$ .

**Теорема 1.** Для радиуса устойчивости  $\rho^m(C)$  нетривиальной задачи  $Z^m(C)$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , справедливы достижимые оценки

$$\varphi^m(C) \leq \rho^m(C) \leq \min\{\|C_i\|_\infty, i \in N_m\}.$$

Причем

$$\rho^m(C) = \varphi^m(C),$$

если  $|P^m(C)| = 2$ .

**Теорема 2.** Нетривиальная задача  $Z^m(C)$ ,  $m \geq 1$  устойчива тогда и только тогда, когда множество Парето  $P^m(C)$  совпадает с множеством Слейтера

$$Sl^m(C) = \{x \in Q^n : \forall x' \in Q^n \exists i \in N_m (|C_i x| \leq |C_i x'|)\}.$$

Поскольку  $P^1(C) = Sl^1(C)$ , то теорема 2 влечет следующее утверждение: задача разбиения  $Z^1(C)$  устойчива при любом векторе  $C \in \mathbf{R}^n$ .

Работа поддержана Межвузовской программой Республики Беларусь «Фундаментальные и прикладные исследования» (грант 492/28).

### Литература

1. *Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. М., 1984.
2. *Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnoy Kan A. H. G., Shmoys D. B.* Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity // Handbook of Operations Research. Amsterdam. 1993. № 4. С. 445 – 452.
3. *Котов В. М.* Алгоритмы для задач разбиения и упаковки. Мн., 2001.
4. *Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P.* Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. № 4. С. 645 – 676.
5. *Сергиенко И. В., Шило В. П.* Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев, 2003.
6. *Emelichev V. A., Kuz'min K. G., Leonovich A. M.* Stability in the combinatorial vector optimization problems // Automatic and Remote Control. 2004. № 2. С. 227 – 240.

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПОДХОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

**М. А. Журавков, Н. Г. Чумак**

### 1. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим твердое деформируемое двумерное тело, занимающее область  $V$  и находящееся под воздействием внешнего нагружения. Пусть поведение материала можно описать как хрупкое или квазихрупкое, и пусть в теле имеется макротрещина длиной  $l$ . Трещина предполагается прямолинейной и малой по сравнению с характерным размером  $L$  тела, т.е.  $l \ll L$ . Рассмотрим ситуацию, когда положение трещины, угол наклона по отношению к оси  $OX$  в глобальной системе координат, длина трещины или совокупность всех или некоторых из этих параметров являются неизвестными заранее. Поэтому для выполнения полного анализа НДС деформируемого тела необходимо рассмотреть различные случаи расположения трещины и значений ее основных параметров.

Решив соответствующую задачу теории упругости для тела с трещиной и определив НДС в таком теле, можно выполнить оценку коэффици-

ентов интенсивности напряжений  $K_i$ . Как известно, условия, при выполнении которых трещина не распространяется, могут быть представлены в следующем виде:

$$K_i \leq K_{iC}, (i=1,2) \text{ и } \frac{K_1^2 + K_2^2}{E} \leq G_C \quad (1.1)$$

для случаев трещины отрыва ( $i=1$ ), трещины сдвига ( $i=2$ ), и для случаев сложно-напряженного состояния. Величины  $K_{iC}$  и  $G_C$  являются заданными прочностными характеристиками материала [1].

**В дальнейшем будем решать задачу с учетом следующего обстоятельства:** будем рассматривать один из параметров трещины как случайную переменную  $\xi$  с известной функцией плотности распределения  $f(\xi)$ , в то время как другие параметры трещины будут считаться заданными. Предположим, что форма деформируемого тела описывается функцией  $h$  пространственных координат, которая принимается как неизвестная проектируемая переменная. Введем малый положительный параметр  $\varepsilon$  и в соответствии с этим параметром преобразуем значение коэффициента интенсивности напряжений следующим образом:  $K_{1\varepsilon} = K_{1C} - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$  [2,3]. Тогда в терминах механики разрушения можно записать  $K_i(\xi, h) = K_{i\varepsilon}$ .

В общем случае коэффициент интенсивности  $K_i(\xi, h)$  зависит (через зависимость параметров трещины и решение уравнений теорий упругости) от случайной переменной  $\xi$ . Возможная функция плотности распределения переменной  $\xi$  позволяет определить моменты случайной величины  $K_i$ , в частности, математическое ожидание и дисперсию. Это в свою очередь позволяет проконтролировать возможные нарушения искомой величины (1.1) и решить оптимизационную задачу, состоящую в определении функции  $h$ , удовлетворяющей системе неравенств:

$$\hat{K}_i = E(K_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_i(\xi, h) f(\xi) d\xi \leq K_{1\varepsilon}, \quad (1.2)$$

$$D(K_i) = E\left(\left(K_i - \hat{K}_i\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(K(\xi, h) - \hat{K}\right)^2 f(\xi) d\xi \leq \delta, \quad (1.3)$$

и минимизирующей функционал  $V(h)$  (объем или вес структурного элемента), т.е.:

$$V = V(h) = \int_{\Omega} \gamma d\Omega \rightarrow \min_h. \quad (1.4)$$

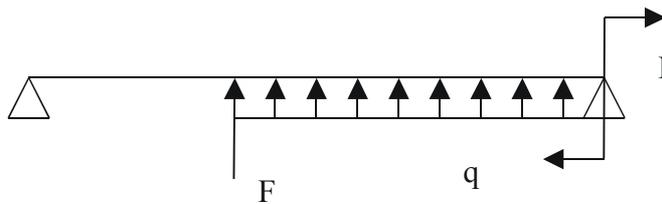


Рис.1 . Приложенная к балке нагрузка

В выражениях (1.2) и (1.3)  $M$ ,  $E$  и  $D$  обозначают соответственно математическое ожидание и дисперсию для случайной переменной, а  $\delta$  обозначает достаточно малое число, которое считается заданным.

## 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

### 2.1. Определение толщины слоя в случае, когда длина трещины рассматривается как случайная переменная

Рассмотрим слой (балку), длиной  $L=100$  м, шириной  $b=1.5$  м и высотой  $h(x)$ , находящийся под воздействием распределенной нагрузки  $q=1000$  Н/м, сосредоточенной силы  $F=2000$  Н и момента  $M=3000$  Нм.

Высоту такой балки необходимо определить при условии, что имеющаяся в кровле макротрещина, не выйдет на ее поверхность. Предположим, что  $h(x)$  изменяется по нормальному закону распределения случай-

ной величины с плотностью распределения  $f(\xi) = \frac{1}{0.35\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-0.1}{0.35}\right)^2}$ . В

результате численных расчетов были получены графики зависимости толщины слоя (высоты балки)  $h_{\min}(x)$ ,  $h_{\varepsilon}(x)$ ,  $h_D(x)$  от местоположения трещины, представленные на рис.2.

Как следует из рис.2, для того, чтобы макротрещина, имеющаяся в

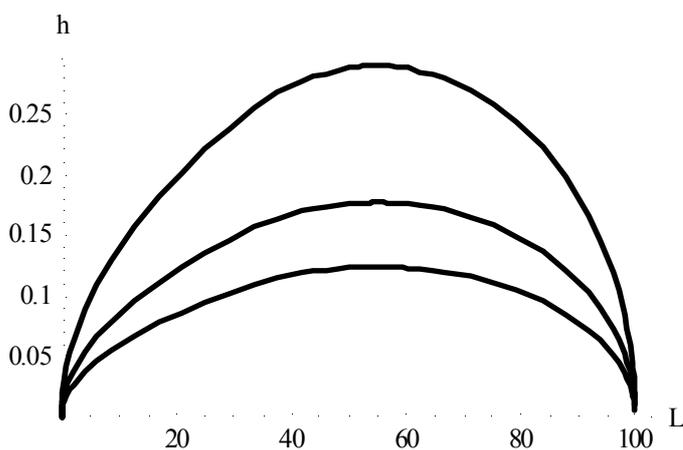


Рис. 2. Графики  $h_{\min}(x)$ ,  $h_{\varepsilon}(x)$ ,  $h_D(x)$  для закона нормального распределения случайной величины - длины трещины.

слое, не распространялась при любом ее расположении по длине слоя, необходимо, чтобы высота слоя была не менее  $h(x)=0.29$  м.

### 2.2. Оптимизация слоя-балки в случае, когда расположение трещины является случайной величиной

Предположим, что породы, составляющие слой, обладают низким значением коэффициентом

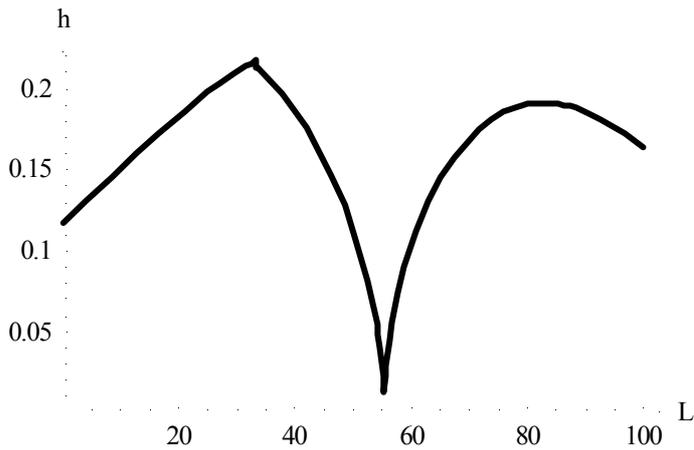


Рис. 3. График  $h(x)$  для закона нормального распределения случайной величины - положения трещины (по срезающим усилиям)

появиться в слое, является заданной  $l=0.1$  м. В результате расчетов, решение оптимизационной задачи имеет вид:

### 2.3. Определение толщины слоя в случае монотонной зависимости коэффициента интенсивности напряжений от случайной переменной

Предполагаем, что случайная величина  $\xi$  (длина трещины) изменяется по закону равномерного распределения на отрезке  $[0, 0.2]$ . По результатам вычислений график допустимых значений распределения высоты

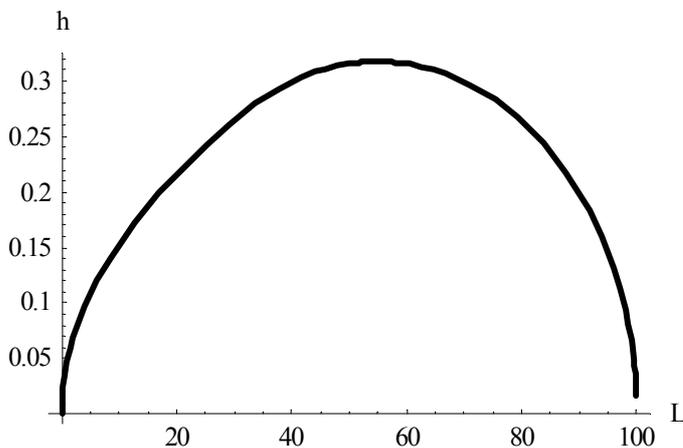


Рис.4. График функции  $h(x)$  при законе равномерного распределения плотности случайной величины – длины трещины

интенсивности срезающих напряжений  $K_{2C}=10^5$ . Трещина расположена на нейтральной оси слоя и координата ее центра  $\xi$  считается случайной переменной, распределенной по нормальному закону с функцией плотности распределения

$$f(\xi) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-50}{30}\right)^2}$$

Будем считать, что длина трещины, которая может

появиться в слое, является заданной  $l=0.1$  м. В результате расчетов, решение оптимизационной задачи имеет вид:

слоя (балки) по длине имеет вид:

#### Литература

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.:Наука,1974.640 с.
2. Стрелецкий Н. С. К вопросу установления коэффициентов запаса сооружений // Изв. АН СССР, ОТН, 1, 1947.
3. Bolotin V. V. Statistical methods in structural mechanics. Holden-Day. San Francisco, 1969.

# МНОГООБРАЗИЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ МАТРИЦ

А. А. Литовко

Пусть  $F$  – алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим множество

$$C(m, n) = \left\{ (A_1, \dots, A_n) \in M_n(F)^m \mid A_i A_j = A_j A_i, i, j = \overline{1, n} \right\}, \quad (1)$$

где  $m, n \geq 2$ .

$C(m, n)$  является замкнутым в топологии Зарисского подмножеством  $A^{mn^2}$  и называется многообразием  $m$  перестановочных матриц порядка  $n$ . Естественными являются следующие вопросы: 1) является ли  $C(m, n)$  неприводимым многообразием; 2) если  $C(m, n)$  приводимо, то сколько оно имеет неприводимых компонент, и какова их размерность.

В [1] доказано, что  $C(2, n)$  неприводимо и  $\dim C(2, n) = n^2 + n$ . В [2] проведено первое систематическое исследование многообразий перестановочных матриц. В частности, доказано, что  $C(m, 2)$  и  $C(m, 3)$  неприводимые многообразия размерностей  $2m + 2$  и  $3m + 6$  соответственно. В этой же работе доказано, что  $C(m, n)$  приводимо, если  $m, n \geq 4$ . В [3] доказано, что  $C(3, n)$  приводимо при  $n \geq 32$ . Таким образом, вопрос о неприводимости  $C(m, n)$  остается открытым лишь в случае, когда  $m = 3$ , а  $4 \leq n \leq 31$ . Отметим, что в случае приводимости  $C(m, n)$  вопрос о числе неприводимых компонент и об их размерности также остается открытым.

В [2] Герстенхабер доказал, что если  $C(m, n)$  неприводимо, то любая подалгебра  $M_n(F)$ , порожденная  $m$  перестановочными матрицами, имеет размерность не более  $n$ . Для доказательства приводимости  $C(m, n)$  при  $m, n \geq 4$  в [2] явно строится подалгебра  $M_n(F)$ , порожденная  $m$  перестановочными матрицами и имеющая размерность больше  $n$ . Поэтому естественно возникает еще один вопрос: какова максимальная размерность подалгебры  $M_n(F)$ , порожденной  $m$  ( $m > 2$ ) перестановочными матрицами? В частности, существует ли подалгебра  $M_n(F)$ , порожденная тремя попарно перестановочными матрицами, размерности больше  $n$ ?

В данной работе доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Многообразие  $C(3, n)$  приводимо при  $n \geq 29$ .

Доказательство теоремы использует методы, развитые Гуральником в [2], и, по существу, является модификацией доказательства Гуральника.

В начале напомним некоторые необходимые понятия и факты.

Матрица  $A \in M_n(F)$  называется *регулярной*, если  $\dim C(A) = n$ , где  $C(A)$  – централизатор матрицы  $A$ , и в этом случае

$$C(A) = \left\{ \alpha_0 E + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} \mid \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in F \right\}. \quad (2)$$

Множество всех регулярных матриц  $U_{reg} \subset M_n(F)$  является открытым по Зарисскому подмножеством [4]. Определим морфизм

$$f: M_n(F) \times \mathbf{A}^{(m-1)n} \rightarrow C(m, n) \quad (3)$$

по правилу

$$f(X, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{m-1n}) = (X, \alpha_{11}E + \dots + \alpha_{1n}X^{n-1}, \dots, \alpha_{m-11}E + \dots + \alpha_{m-1n}X^{n-1}).$$

В [2] доказано, что замыкание  $\overline{\text{Im } f} = W$  является неприводимой компонентой  $C(m, n)$  и  $\dim W = n^2 + (m-1)n$ . Кроме того, если  $(A_1, \dots, A_m) \in C(m, n)$ , и хотя бы одна из матриц  $A_i$  регулярна, то  $(A_1, \dots, A_m) \in W$ .

В случае  $m=3$  имеем  $\dim W = n^2 + 2n$ . Для доказательства теоремы нам достаточно найти в  $C(3, n)$  замкнутое неприводимое подмножество  $Z \neq W$  такое, что  $\dim Z \geq n^2 + 2n$ .

$$\text{Для } A \in M_n(F) \quad C_2(A) = \left\{ (X, Y) \in C(A)^2 \mid X \ Y = Y \ X \right\}.$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0_{s \times s} & E_{s \times s} & 0_{s \times t} & 0_{s \times s} \\ 0_{s \times s} & 0_{s \times s} & 0_{s \times t} & E_{s \times s} \\ 0_{t \times s} & 0_{t \times s} & 0_{t \times t} & 0_{t \times s} \\ 0_{s \times s} & 0_{s \times s} & 0_{s \times t} & 0_{s \times s} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $E_{s \times s}$  – единичная матрица порядка  $s$ ,  $0_{s \times t}$  – нулевая матрица порядка  $s \times t$ .

**Лемма.**

$$1) \dim C(A) = 3s^2 + 2st + t^2.$$

$$2) \dim C_2(A) = 3s^2 + 4st + 2.$$

*Доказательство.* 1) Пусть  $X \in C(A)$ . Тогда непосредственное вычисление показывает, что

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 0 & X_1 & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & X_5 & X_6 \\ 0 & 0 & 0 & X_1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $X_1, X_2, X_4 \in M_s(F)$ ,  $X_5 \in M_t(F)$ ,  $X_3 \in M_{s \times t}(F)$ ,  $X_6 \in M_{t \times s}(F)$ .

Поэтому  $\dim C(A) = 3s^2 + 2st + t^2$ .

2) Пусть  $K$  – множество всех матриц  $B \in C(A)$  вида

$$B = \alpha E + \begin{pmatrix} 0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\alpha \in F$ .

Ясно, что  $\dim K = 2s^2 + 2st + 1$ . Так как условие, что две матрицы из  $K$  перестановочны, задается  $s^2$  уравнениями, то

$$\dim C_2(A) \geq \dim K^2 \cap C_2(A) \geq 2(2s^2 + 2st + 1) - s^2 = 3s^2 + 4st + 2.$$

*Доказательство теоремы.* Пусть  $A$  – матрица, определенная в (4),  $n = 3s + t + k$ ,  $k \geq 0$ . Определим морфизм

$$f : GL_n(F) \times C_2(A) \times A^{3k+1} \rightarrow C(3, n) \quad (7)$$

по правилу

$$f(X, B, C, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k, \gamma_1, \dots, \gamma_k) = (XA_1X^{-1}, XB_1X^{-1}, XC_1X^{-1}),$$

где  $A_1 = \text{diag}(\alpha_0 E + A, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ,  $B_1 = \text{diag}(B, \beta_1, \dots, \beta_k)$ ,  $C_1 = \text{diag}(C, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ .

Пусть  $T = \text{Im } f$ . Найдем размерность  $T$ .

Пусть  $\pi : T \rightarrow M_n(F)$  – проекция на первую координату, т. е.  $\pi(X, Y, Z) = X$ . Тогда  $\pi(T) = \bigcup Cl(A_1)$ , где  $Cl(A_1)$  – класс сопряженности  $A_1$ , а объединение берется по всем  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ .

Определим морфизм  $\phi : F^{k+1} \times GL_n(F) \rightarrow \pi(T)$  по правилу  $\phi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, U) = UA_1U^{-1}$ . Очевидно, что  $\phi$  сюръективное отображение. Если  $\alpha_i$  попарно различны, то  $\phi^{-1}(A_1) = \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, U) \mid U \in C(A_1)\}$ , и в силу леммы  $\dim \phi^{-1}(A_1) = \dim C(A_1) = \dim C(A) + k = 3s^2 + 2st + t^2 + k$ .

Если  $\alpha_i$  не попарно различны, то  $\dim \varphi^{-1}(A_1)$  будет не меньше, чем в предыдущем случае. Таким образом, по теореме о размерности слоев морфизма [5, с. 55], получаем

$$\dim \pi(T) = n^2 + k + 1 - (3s^2 + 2st + t^2 + k) = n^2 - 3s^2 - 2st - t^2 + 1. \quad (8)$$

Далее, для любой матрицы  $XA_1X^{-1} \in \pi(T)$  слой  $\pi^{-1}(XA_1X^{-1}) = \left\{ (XA_1X^{-1}, XB_1X^{-1}, XC_1X^{-1}) \mid (B, C) \in C_2(A) \beta_i, \gamma_j \in F \right\}$ .

Следовательно, в силу леммы размер прообраза любой матрицы из  $\pi(T)$  равен

$$\dim \pi^{-1}(XA_1X^{-1}) = \dim C_2(A) + 2k \geq 3s^2 + 4st + 2 + 2k. \quad (9)$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \dim T &= \dim \pi(T) + \dim \pi^{-1}(A_1) = \dim \pi(T) + \dim C_2(A_1) \geq \\ &\geq n^2 - 3s^2 - 2st - t^2 + 1 + 3s^2 + 4st + 2 + 2k = n^2 - t^2 + 2st + 2k + 3. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть  $Z = \bar{T}$ , тогда

$$\dim Z = \dim T \geq n^2 - t^2 + 2st + 2k + 3. \quad (11)$$

Исследуем, при каких значениях  $s, t$  справедливо неравенство

$$\dim Z \geq n^2 + 2n. \quad (12)$$

Имеем  $n^2 - t^2 + 2st + 2k + 3 \geq n^2 + 6s + 2t + 2k$ , откуда

$$-t^2 + 2st - 6s - 2t + 3 \geq 0. \quad (13)$$

Непосредственная проверка показывает, что это неравенство выполняется при  $s = 8, t = 5$ . Так как  $n = 3s + t + k = 29 + k$ , то мы получаем, что  $C(3, n)$  приводимо при  $n \geq 29$ .

Теорема доказана.

### Литература

1. *Motzkin T., Taussky O.* Pairs of matrices with property L. II // *Trans. Amer. Math. Soc.* 80 (1955). P. 387–401.
2. *Gerstenhaber M.* On dominance and varieties of commuting matrices // *Annals of Math.* 73 (1961). P. 324–348.
3. *Guralnick R.* A note on commuting pairs of matrices // *Linear and Multilinear Algebra.* 1992. Vol. 31. P. 71–75. Gordon and Breach Science Publishers S. A., 1992.
4. *Springer T., Steinberg R.* Conjugacy classes // *Seminar in algebraic groups and related finite groups.* (ed. A. Borel et al.), *Lecture Notes in Math.* 131. Springer-Verlag, 1970.
5. *Шафаревич И. П.* Основы алгебраической геометрии // *Успехи математических наук.* Том XXIV. Вып. 6 (150), ноябрь-декабрь. М.: Наука, 1969.

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Д. М. Костян

Свойства решений уравнений Пенлеве изучались с различных точек зрения (см. на пример [1] – [5]), хотя первоначально они были открыты из классификации Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$w'' = R(z, w, w'), \quad (1)$$

где функция  $R(z, w, w')$  является рациональной по  $w$ ,  $w'$  и локально-аналитической по  $z$ , без подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [6]. Наличие свойства Пенлеве у уравнений и систем тесно связано с их интегрируемостью [7]. В настоящее время уравнения Пенлеве имеют широкие приложения в теории изомонодромной деформации линейных систем, теории абелевых интегралов и алгебраической геометрии, теории случайных матриц, а также они нашли различные физические приложения.

Рассмотрим уравнение  $({}_4\tilde{P}_2)$

$$w^{(4)} = 10w^2w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 + zw - \beta(w'' - 2w^3) - 2\gamma w + \alpha, \quad (2)$$

где  $w$  – неизвестная функция, зависящая от переменной  $z$ , а  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  – параметры.

**Теорема 1** [3]: Пусть  $w = w(z, \alpha, \beta, \gamma)$  решения уравнения  $({}_4\tilde{P}_2)$ , тогда Беклунд-преобразования

$$T : w \rightarrow \tilde{w} = -w + (2\alpha + 1) / (2\tilde{L}_2[-w' - w^2] - z), \quad (3)$$

$$T^{-1} : \tilde{w} \rightarrow w = -\tilde{w} + (2\tilde{\alpha} - 1) / (2\tilde{L}_2[\tilde{w}' - \tilde{w}^2] - z) \quad (4)$$

задают решение уравнения  $({}_4\tilde{P}_2)$ , где  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = (\alpha + 1, \beta, \gamma)$ ,  $\tilde{L}_2[u] = u'' + 3u + \beta u + \gamma$ .

**Теорема 2** [3]: Уравнение  $({}_4\tilde{P}_2)$  имеет рациональное решение  $w = w(z)$ , тогда и только тогда, когда  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Для всех таких  $\alpha$  существует единственное рациональное решение.

Так как  $w = 0$  является решением уравнения  $({}_4\tilde{P}_2)$  то, воспользовавшись Беклунд-преобразованиями  $T, T^{-1}$ , найдем для него рациональные решения при всех  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . При  $\gamma = 0$  для  $\alpha = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  они имеют вид:

$$\begin{aligned}
w(z, \pm 1, \beta) &= \mp 1/z, \\
w(z, \pm 2, \beta) &= \pm (-2z^3 + 4\beta)/(z^4 + 4\beta z), \\
w(z, \pm 3, \beta) &= \mp \frac{3(z^8 + 8\beta z^5 + 96z^3 + 160z^2\beta^2)}{(z^3 + 4\beta)(z^6 + 20\beta z^3 - 144z - 80\beta^2)}.
\end{aligned}$$

**Теорема 3:** Для уравнения  $({}_4\tilde{P}_2)$  при  $\alpha \in \{0, \pm 1, \dots, \pm 9\}$  число полюсов  $m$  удовлетворяет соотношению  $m = \alpha^2$ .

**Теорема 4:** Для уравнения  $({}_4\tilde{P}_2)$  при  $\alpha \in \{0, \pm 1, \dots, \pm 4\}$  вычеты полюсов удовлетворяет соотношению  $\text{res}_{z=z_0} w(z) = c_{-1}, c_{-1} \in \{\pm 1\}$ .

Рассмотрим первый член иерархии Каупа-Купершмидта – уравнение  $({}_4\tilde{K}_2)$ , которое записывается следующим образом

$$w^{(4)} = 5w^2w'' - 5w'w'' + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma = 0, \quad (5)$$

где  $w$  – неизвестная функция, зависящая от переменной  $z$ , а  $\alpha, \gamma, \lambda \in \mathbb{C}$  – параметры.

**Теорема 5 [4]:** Беклунд-преобразования для уравнения (5) имеют вид:

$$T_1 : w \rightarrow \tilde{w} = w - (2\gamma + \lambda)/(2D_1[w]), \quad (6)$$

где  $\tilde{\gamma} = -\gamma - \lambda, \tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\alpha} = \alpha$ , и

$$\begin{aligned}
D_\varepsilon[w] &= -w^3 - \frac{3\varepsilon + 1}{2}ww''' + \frac{3\varepsilon - 9}{4}(w')^2 + \frac{5 - 3\varepsilon}{2}w^2w' + \frac{3\varepsilon - 1}{4}w^4 + \frac{1 - 3\varepsilon}{4}(\lambda z + \alpha) \\
T_2 : w &\rightarrow \tilde{w} = w - 2(\gamma - \lambda)/2D_2[w], \quad (7)
\end{aligned}$$

где  $\tilde{\gamma} = -\gamma + 2\lambda, \tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\alpha} = \alpha$ .

Если применить композицию отображений (6), (7)  $T = T_2T_1$ , то соотношение параметров будет  $\tilde{\gamma} = \gamma + 3\lambda, \tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\alpha} = \alpha$ , при этом преобразование  $T^{-1} = T_1T_2$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma - 3\lambda, \tilde{\lambda} = \lambda, \tilde{\alpha} = \alpha$  и  $T^{-1}T = TT^{-1} = I$ . Так как  $w = 0$  решение уравнения  $({}_4\tilde{K}_2)$ , то с помощью преобразования  $T_1$  получаем, что  $w = \lambda/(\alpha + \lambda z)$  при  $\gamma/\lambda = -1$  решение уравнения  $({}_4\tilde{K}_2)$ . Далее, применяя к ним  $T, T^{-1}$ , получим рациональные решения для всех  $\gamma/\lambda = 3n - 1$  и  $\gamma/\lambda = 3n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $m$  – число полюсов уравнения  $({}_4\tilde{K}_2)$ . При  $\gamma/\lambda = 3 - m = 1$ , при  $\gamma/\lambda = 5 - m = 10$ , при  $\gamma/\lambda = 6 - m = 6$ , при  $\gamma/\lambda = 9 - m = 36$ .

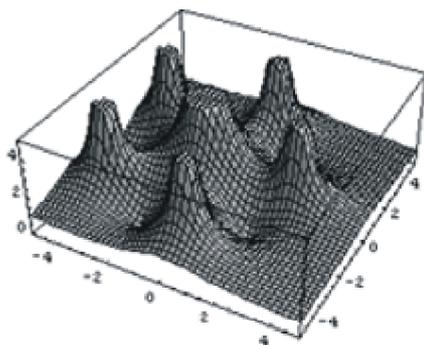


Рис 1

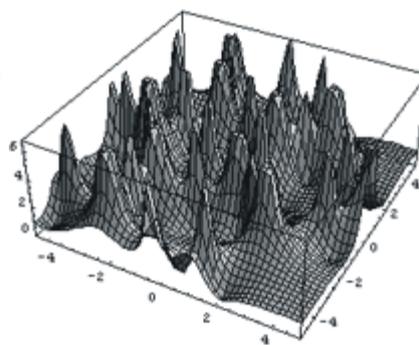


Рис 2

На следующих рисунках изображен модуль рационального решения уравнения  $({}_4\tilde{K}_2)$  на комплексной плоскости при  $\gamma/\lambda = 6$  (рис. 1) и  $\gamma/\lambda = 9$  (рис. 2).

Матричные аналоги уравнений Пенлеве могут возникать в ситуациях и моделях, аналогичных тем, в которых возникают скалярные уравнения Пенлеве. Однако это не всегда справедливо [8],[9].

Уравнение Риккати имеет вид

$$w' = \alpha w^2 + \beta w + \gamma, \quad (8)$$

где  $w$  – неизвестная функция, зависящая от переменной  $z$ , а  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  – параметры.

Запишем уравнение (8) в матричном виде для матриц  $n \times n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$W(z)' = AW(z)^2 + BW(z) + G, \quad (9)$$

где  $W(z) = \{w_{i,j}(z)\}$  – искомая  $n \times n$  матрица-решение,  $A = \{\alpha_{i,j}\}, B = \{\beta_{i,j}\}, G = \{\gamma_{i,j}\}$  –  $n \times n$  матрицы комплексных параметров.

Матричные уравнения Пенлеве существенно отличаются от скалярных и, по-существу, являются объектами нового типа, требующие отдельного изучения [8], [9]. Уравнение (8) в невырожденном случае в скалярной записи представляет собой систему из  $n^2$  уравнений.

Исследуя матричное уравнение Риккати при помощи теста Пенлеве-Ковалевской на свойство Пенлеве, было установлено, что для матриц  $2 \times 2$ , для любых значений параметров  $A, B, G$  система уравнений (9) проходит тест Пенлеве-Ковалевской.

Второе матричное уравнение Пенлеве имеет вид

$$W(z)'' = 2W(z)^3 + zW(z) + A, \quad (10)$$

где  $W(z) = \{w_{i,j}(z)\}$  – искомая  $n \times n$  матрица-решение,  $A = \{\alpha_{i,j}\}$  –  $n \times n$  матрица комплексных параметров. Для матриц размера  $2 \times 2$  не со-

держащих нулей необходимым условием на наличие свойства Пенлеве (а так же достаточным для прохождения теста Пенлеве-Ковалевской) является условие  $A = \lambda E$ , где  $E$  – единичная  $2 \times 2$  матрица. Если искомая матрица  $W(z)$  содержит нулевые элементы, тогда скалярные уравнения (10) проходят тест Пенлеве-Ковалевской при  $A \neq 0$ , только если ненулевые элементы содержатся лишь на главной диагонали.

Для второго матричного уравнения Пенлеве размера  $3 \times 3$  индексы Фукса (номера коэффициентов в разложении решения в ряд Лорана при которых коэффициенты не определяются) равны -1 – кратности 2, 0 – кратности 6, 1 – кратности 1, 2 – кратности 1, 3 – кратности 6, 4 – кратности 2.

Матричные уравнения  $({}_4\tilde{P}_2)$  и  $({}_4\tilde{K}_2)$  имеют вид

$$W(z)^{(4)} = 10W(z)^2W(z)'' + 10W(z)(W(z)')^2 - 6W(z)^5 + zW(z) - BW(z)'' - 2BW(z)^3 - 2GW(z) + A, \quad (11)$$

$$W(z)^{(4)} = 10W(z)^2W(z)'' + 10W(z)(W(z)')^2 - 6W(z)^5 + zW(z) - BW(z)'' - 2BW(z)^3 - 2GW(z) + A, \quad (12)$$

где  $W(z) = \{w_{i,j}(z)\}$  – искомая  $n \times n$  матрица-решение,  $A = \{\alpha_{i,j}\}$ ,  $B = \{\beta_{i,j}\}$ ,  $G = \{\gamma_{i,j}\}$  –  $n \times n$  матрицы комплексных параметров. Матричные уравнения  $({}_4\tilde{P}_2)$  и  $({}_4\tilde{K}_2)$  не проходят тест Пенлеве-Ковалевской, исключая случай, когда система уравнений (11) и (12) распадается на систему из двух независимых скалярных уравнений.

### Литература

1. *Ablowitz M., Clarkson P.A.* Solitons, Nonlinear Evolutions Equations and Inverse Scattering // L.M.S. Lect.Notes Math, 149, C.U.P., Cambridge, 1991.
2. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M.* From Gauss to Painleve. A modern theory of special functions // Aspects of Mathematics E16. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.
3. *Valerii I. Gromak, Ilpo Laine, Shum Shimomura.* Painleve differential equations in the complex plane // Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2002.
4. *Kudryashov N.A.* Forth-order analogies to the Painlevé equations // J. Phys. A: Math.Gen. (2002), No. 35, 4617-4632.
5. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
6. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Киев: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1939.
7. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / Пер. с англ. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

8. Баландин С.П. Интегрируемость по Пенлеве систем нелинейных дифференциальных уравнений с приложениями к теории переноса: автореф. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Стерлимак 2004.
9. Inozemtseva N.G., Sanovnikov B.I. On exact solutions for some matrix equations // Regular and chaotic dynamics V.3,N 1,1988.

## ЗАМКНУТЫЕ НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ГРАФОВ, ИХ ПРИВОДИМОСТЬ

**О. В. Максимович**

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой статье рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер, различаемые с точностью до изоморфизма.

Граф  $G$  называется *суперграфом* графа  $H$ , если  $H$  является индуцированным подграфом в  $G$  ( $H \leq G$ ).

Определим две операции на множестве графов. Пусть  $G_1$  и  $G_2$  произвольные графы и  $VG_1 \cap VG_2$  пусто. Граф  $G$  назовем *дизъюнктным объединением* графов  $G_1$  и  $G_2$ , если  $VG = VG_1 \cup VG_2$  и  $EG = EG_1 \cup EG_2$ . Граф  $G$  назовем *соединением* графов  $G_1$  и  $G_2$ , если  $VG = VG_1 \cup VG_2$  и множество его ребер состоит из ребер графов  $G_1$ ,  $G_2$  и всех ребер, один конец которых принадлежит  $VG_1$ , а другой –  $VG_2$ .

Пусть  $\Gamma$  это множество всех простых графов. Произвольное подмножество  $P$  множества  $\Gamma$  называется *теоретико-графовым свойством*. Граф  $G$  обладает свойством  $P$ , если  $G \in P$ . Свойство  $P$  называется *наследственным*, если для всех графов  $G$  из  $P$  истинна импликация  $H \leq G \Rightarrow H \in P$ .

Будем говорить, что множество  $I$  графов *характеризует свойство  $P$  в терминах запрещенных индуцированных подграфов*, если  $G \in P$  тогда и только тогда, когда ни один из индуцированных подграфов графа  $G$  не принадлежит множеству  $I$ . Широко известны следующие два факта:

#### **Теорема 1.**

1. *Наследственные свойства и только они могут быть в точности охарактеризованы в терминах запрещенных индуцированных подграфов.*

2. *Для данного наследственного свойства  $P$  минимальным множеством запрещенных индуцированных подграфов является множество графов  $G$  обладающих следующими свойствами:*

- $G \notin P$ .
- Любой индуцированный подграф графа  $G$ , отличный от него самого, обладает свойством  $P$ .

Два свойства  $P_1$  и  $P_2$  называются *эквивалентными*, если они равны как множества. Свойство  $P$  называется *объединением* свойств  $P_1$  и  $P_2$ , если  $P = P_1 \cup P_2$ . Наследственное свойство  $P$  называется *приводимым*, если существуют два наследственных свойства  $P_1$  и  $P_2$  такие, что ни одно из них не эквивалентно  $P$  и  $P = P_1 \cup P_2$ , и *неприводимым* в противном случае.

Рао была поставлена проблема характеристики приводимых наследственных свойств графов и высказана следующая гипотеза [1]:

**Гипотеза.** Любое наследственное свойство  $P$  представимо как конечное объединение неприводимых свойств  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , т.е.  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ .

Следующий результат [2, 3] дает ответ на проблему, поставленную Рао:

**Теорема 2.** Для любого наследственного свойства графов  $P$  следующие утверждения эквивалентны:

1.  $P$  неприводимо.
2. Для любых двух графов, обладающих свойством  $P$ , существует их суперграф, обладающий этим свойством.
3. Существует возрастающая последовательность графов  $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$  из  $P$  такая, что любой граф из  $P$  является индуцированным подграфом некоторого из  $G_k$ .

Следствием этой теоремы является следующий [3]:

**Критерий.** Наследственное свойство  $P$  является объединением  $n$  неприводимых свойств тогда и только тогда, когда из любых  $n + 1$  графов, обладающих свойством  $P$ , можно выбрать два графа так, что существует общий суперграф последних, обладающий этим же свойством.

На основании этого следствия в [3] была опровергнута приведенная гипотеза Рао.

## О ЗАМКНУТЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССАХ

В связи с последними работами в области декомпозиции графов, например [4], особый интерес представляет исследование наследственных классов графов, замкнутых относительно дизъюнктного объединения и соединения графов. В частности, в теории декомпозиции большое значение имеют  $(P, Q)$ -замкнутые классы графов.

Пусть  $P$  некоторое наследственное свойство и пусть  $MForb(P) = \{G_i \mid i \in I\}$ , где  $I$  некоторое множество индексов, характери-

зующее множество минимальных запрещенных индуцированных подграфов свойства  $P$ .

**Теорема 3.**

1. *Наследственный класс замкнут относительно дизъюнктного объединения тогда и только тогда, когда список его минимальных запрещенных индуцированных подграфов состоит только из связных графов.*
2. *Наследственный класс замкнут относительно соединения графов тогда и только тогда, когда список графов дополнительных к списку его минимальных запрещенных индуцированных подграфов состоит только из связных графов.*

*Доказательство:*

1. Пусть класс графов  $P$  замкнут относительно дизъюнктного объединения графов и пусть  $H$  – его несвязный минимальный запрещенный порожденный подграф, тогда  $H = \cup H_i$  представляется в виде объединения своих связных компонент. Из минимальности  $H$  следует, что  $H_1$  и  $H \setminus H_1$  принадлежат  $P$ . Так как  $P$  замкнут относительно дизъюнктного объединения графов, то  $H_1 \cup (H \setminus H_1) = H$  принадлежит классу  $P$ . Противоречие с тем, что  $H$  запрещенный подграф свойства  $P$ .

Пусть список минимальных запрещенных индуцированных подграфов свойства  $P$  состоит только из связных графов и пусть существуют такие графы  $G$  и  $H$  из  $P$ , что их дизъюнктное объединение  $S$  не обладает свойством  $P$ . Тогда существует такой индекс  $i$ , что  $G_i \leq S$ ,  $G_i \in MForb(P)$ . Но так как все  $G_i$  связны и не существует ребер между множествами вершин  $VG$  и  $VH$  в графе  $S$ , то либо  $G_i \leq G$ , либо  $G_i \leq H$ , противоречие с тем, что графы  $G$  и  $H$  обладают свойством  $P$ .

2. Пусть наследственный класс графов  $P$  замкнут относительно соединения графов. Положим  $\bar{P} = \{\bar{G} \mid G \in P\}$ . Очевидно, что  $\bar{P}$  – наследственное свойство и  $MForb(\bar{P}) = \{\bar{G}_i \mid G_i \in MForb(P)\}$ . Так как  $P$  замкнут относительно соединения графов, то  $\bar{P}$  замкнут относительно дизъюнктного объединения графов. Теперь утверждение 2 вытекает из утверждения 1 теоремы.

*Следствие 1.* Наследственный класс  $P$  одновременно замкнут относительно операций дизъюнктного объединения и соединения графов тогда и только тогда, когда оба графа  $G_i$  и  $\bar{G}_i$  связны для каждого графа  $G_i \in MForb(P)$ .

Обозначим через  $\text{sup}(G, H) : B_G \times B_G \rightarrow B_G$  – некоторое правило построения суперграфов для графов  $G$  и  $H$ .

*Следствие 2.* Если для любого индекса  $i$  граф  $G_i$  из  $MForb(P)$  связан, то  $P$  – неприводимое наследственное свойство.

*Доказательство:*

Пусть  $G$  и  $H$  обладают свойством  $P$  и пусть  $\text{sup}(G, H)$  – дизъюнктное объединение графов  $G$  и  $H$ ,  $S = \text{sup}(G, H)$ . Очевидно, что  $G = S(G) \leq S$  и  $H = S(H) \leq S$ . По предыдущей теореме граф  $S$  обладает свойством  $P$ . Следовательно, выполнены условия теоремы 2 и  $P$  – неприводимое свойство.

Заметим, что многие из известных теоретико-графовых свойств характеризуются именно связными запрещенными минимальными индуцированными подграфами: свойства графа быть реберным, планарным, ациклическим, совершенным и т.д.

Аналогично получается следующее:

*Следствие 3.* Если для любого индекса  $i$  граф  $G_i$  из  $MForb(P)$  имеет связанное дополнение, то  $P$  – неприводимое наследственное свойство.

*Следствие 4.* Если свойство  $P$  приводимо, то  $MForb(P)$  содержит не менее одного связного и одного несвязного графа.

Следствие 4 очевидным образом вытекает из трех предыдущих.

Наследственный класс графов называется  $(P, Q)$ -замкнутым, если любой граф из множества  $(P, Q)$  допускает разбиение множества вершин на два подмножества таких, что граф индуцированный одним из них обладает свойством  $P$ , а вторым –  $Q$ . При этом свойство  $P$  замкнуто относительно операции полного объединения графов, а  $Q$  – дизъюнктного объединения.

**Теорема 4.**  $(P, Q)$ -замкнутые наследственные классы графов неприводимы.

Утверждение очевидно, если определить  $\text{sup}(G, H)$  как композицию [4] графов  $G$  и  $H$ .

### Литература

1. Rao S. B. Combinatorics and Graph Theory. Lecture Notes in Computer Science. // Berlin, 1981. Vol. 885., P. 441-458
2. Алексеев В. Е. Исследование количественных и сложностных характеристик наследственных классов графов. Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук. Нижний Новгород, 2002.
3. Usha Devi N., Vijayakumar G.R. Hereditary properties of graphs. // Discrete Mathematics. 1999. Vol. 206. P. 213–215.
4. Суздаль С. В., Тышкевич Р. И. Декомпозиция графов. // Избранные труды Белорусского государственного университета, 2001. Т. 2. С. 482–504.

# ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ

А. В. Мотевич

Задача Гурса для двумерного гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с постоянными областями определения изучалась в [1]. В данной работе доказана теорема единственности и устойчивости сильных решений задачи Гурса в случае переменных областей определения операторного коэффициента.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $T = ]0, T_1[ \times ]0, T_2[$  – ограниченный прямоугольник на плоскости  $R^2$  переменных  $t = \{t_1, t_2\}$  и  $H$  – гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $|\cdot|$ . Рассмотрим в  $T$  уравнение

$$\mathcal{L}(t)u \equiv \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)u(t) = f(t), \quad (1)$$

с условиями Гурса:

$$l_1 u \equiv u|_{t_2=0} = \varphi_1(t_1), \quad l_2 u \equiv u|_{t_1=0} = \varphi_2(t_2), \quad (2)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – функции переменных  $t_1 \in ]0, T_1[$  и  $t_2 \in ]0, T_2[$  со значениями в  $H$  соответственно, удовлетворяющие условию согласования

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0). \quad (3)$$

Здесь  $u$  и  $f$  – функции переменной  $t$  со значениями в  $H$ ,  $A(t)$  – линейные неограниченные операторы в  $H$  с зависящими от  $t$  областями определения  $D(A(t))$ , удовлетворяющие следующим условиям.

I. При каждом  $t \in T$  операторы  $A(t)$  самосопряжены и положительно-определены на  $D(A(t))$  в  $H$ .

II. При каждом  $t \in T$  обратные операторы  $A^{-1}(t) \in L_\infty(T, L(H))$  в  $H$  сильно непрерывны по  $t \in T$  и имеют сильные частные производные  $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i \in L_\infty(T, L(H))$  такие, что справедливы неравенства

$$-\left( (\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)g, g \right) \leq c_2 \left( A^{-1}(t)g, g \right) \quad \forall g \in H, \quad c_2 \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Выведем априорную оценку сильных решений данной задачи Гурса.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначим  $\mathbb{H} = L_2(T, \mathbb{H})$ . Задаче Гурса (1) – (3) соответствует линейный неограниченный оператор  $L = \{\mathcal{L}(t), l_1, l_2\} : E \supset D(L) \rightarrow F$ , действующий из банахова пространства  $E$  – пополнения множества

$$D(L) = \{u \in \mathbb{H} : u(t) \in D(A(t)) \forall t \in [0, T_1] \times [0, T_2], \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial u}{\partial t_i}, A(t)u \in \mathbb{H}, i = 1, 2\}$$

по норме

$$\|u\|_E = \left( \sup_{t \in T} \left[ \int_0^{T_1} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(t)u \right|^2 \right) dt_1 + \int_0^{T_2} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(t)u \right|^2 \right) dt_2 \right] \right)^{1/2}$$

в гильбертово пространство  $F = \mathbb{H} \times H_1 \times H_2$  всех элементов  $\Phi = \{f(t),$

$\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_2)\}$  с нормой  $\|\Phi\|_F = \left( \int_T |f(t)|^2 dt + \|\varphi_1\|_{H_1}^2 + \|\varphi_2\|_{H_2}^2 \right)^{1/2}$ , где  $H_1$  –

замыкание  $D(L)$  по норме  $\|v\|_{H_1} = \left( \int_0^{T_1} \left( \left| \frac{\partial v}{\partial t_1} \right|^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(t_1, 0)v \right|^2 \right) dt_1 \right)^{1/2}$ ,  $H_2$  –

замыкание  $D(L)$  по норме  $\|w\|_{H_2} = \left( \int_0^{T_2} \left( \left| \frac{\partial w}{\partial t_2} \right|^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(0, t_2)w \right|^2 \right) dt_2 \right)^{1/2}$ .

Линейный оператор  $L$  допускает замыкание  $\bar{L} : E \supset D(\bar{L}) \rightarrow F$ .

**Лемма.** Если оператор  $A(t)$  удовлетворяет условию I и множество  $D(L)$  плотно в  $\mathbb{H}$ , то линейный оператор  $L$  замыкаем.

*Доказательство.* По критерию замыкаемости линейных операторов необходимо доказать, что если  $\{u_n\} \in D(L)$ ,  $u_n \rightarrow 0$  в  $E$  и  $Lu_n \rightarrow \Phi$  в  $F$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\Phi = (f, \varphi_1, \varphi_2) = 0$ .

Поскольку  $u_n \rightarrow 0$  в  $E$  и операторы следов  $l_1 : E \rightarrow H_1$  и  $l_2 : E \rightarrow H_2$  непрерывны, то  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ . Покажем, что  $f = 0$ . Для  $\forall v \in D(L)$

$$\int_0^{T_2} \int_0^{T_1} (f(t), v(t)) dt_1 dt_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{T_2} \int_0^{T_1} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)u_n, v \right) dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{T_2} \left( \frac{\partial u_n}{\partial t_2}, v \right) \Big|_{t_1=0}^{t_1=T_1} dt_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{T_2} \int_0^{T_1} \left[ - \left( \frac{\partial u_n}{\partial t_2}, \frac{\partial v}{\partial t_1} \right) + (u_n, A(t)v) \right] dt_1 dt_2 = 0,$$

так как  $u_n \rightarrow 0$  в  $E$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда, в силу плотности  $D(L)$  в  $\mathbb{H}$ , следует, что  $f = 0$ . Таким образом, получили, что  $\Phi = 0$ .

*Определение.* Решения операторного уравнения  $\bar{L}u = \Phi$ ,  $\Phi = (f, \varphi_1, \varphi_2) \in F$ , называются **сильными решениями** задачи Гурса (1) – (3).

### 3. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГУРСА

Установим априорную оценку сильных решений задачи Гурса.

**Теорема 1.** Если выполняются условия I, II и множество  $D(L)$  плотно в  $\mathbb{H}$ , то справедливо неравенство

$$\|u\|_E \leq c_3 \|\bar{L}u\|_F \quad \forall u \in D(\bar{L}), \quad c_3 = \sqrt{2 \exp\{c_4(T_1 + T_2)\}}, \quad c_4 = \max\{c_2, 1\}. \quad (5)$$

*Доказательство.* Введем в  $H$  семейство абстрактных операторов сглаживания  $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ ,  $\varepsilon > 0$ , со значениями в  $D(A(t))$ , которые обладают следующими свойствами:

1) для  $\forall t \in T$  и  $\forall v \in H$  норма  $|A_\varepsilon^{-1}(t)v - v| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

2) они имеют сильные производные  $\partial A_\varepsilon^{-1}(t)/\partial t_i \in L_\infty(\mathbb{H}, \mathcal{L}(H))$ ,  $\varepsilon > 0$ , и

$$\partial(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/\partial t_i = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) \left( \partial A(t)^{-1}/\partial t_i \right) A(t)A_\varepsilon^{-1}(t), \quad \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Уравнение (1) умножаем скалярно в  $H$  на  $A_\varepsilon^{-1}(t)e^\theta \left( \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right)$ , где  $\theta = c(\tau_1 - t_1 + \tau_2 - t_2)$ , и результат интегрируем по  $D_\tau = [0, \tau_1] \times [0, \tau_2]$ , где  $\tau = \{\tau_1, \tau_2\}$ ,  $T = \{T_1, T_2\}$ . В частности, интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_2} e^\theta (AA_\varepsilon^{-1}u, u) \Big|_{t_1=\tau_1} dt_2 &= 2 \operatorname{Re} \int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} e^\theta \left( AA_\varepsilon^{-1}u, \frac{\partial u}{\partial t_1} \right) dt_1 dt_2 + \\ &+ \int_0^{\tau_2} e^{c(\tau_1 + \tau_2 - t_2)} (AA_\varepsilon^{-1}u, u) \Big|_{t_1=0} dt_2 + \int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} e^\theta \Phi_{1,\varepsilon}(u, u) dt_1 dt_2 \quad \forall c \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где ввиду равенств (6) и неравенств (4) для формы  $\Phi_{1,\varepsilon}(u, u)$  верна оценка

$$\Phi_{1,\varepsilon}(u, u) = \left( \frac{\partial(AA_\varepsilon^{-1})}{\partial t_1} u, u \right) - c(AA_\varepsilon^{-1}u, u) = - \left( \frac{\partial A^{-1}}{\partial t_1} AA_\varepsilon^{-1}u, AA_\varepsilon^{-1}u \right) -$$

$$-c(AA_\varepsilon^{-1}u, u) \leq c_2(A^{-1}AA_\varepsilon^{-1}u, AA_\varepsilon^{-1}u) - c(AA_\varepsilon^{-1}u, u).$$

В силу этой оценки и предела при  $\varepsilon \rightarrow 0$  из (7) для  $\forall c \geq c_2$  получаем

$$\int_0^{\tau_2} e^{c(\tau_2-t_2)} \left| A^{\frac{1}{2}}(t)u \right|_{t_1=\tau_1}^2 dt_2 \leq 2 \operatorname{Re} \int_{D_\tau} e^\theta \left( Au, \frac{\partial u}{\partial t_1} \right) dt + \int_0^{\tau_2} e^{c(\tau_1+\tau_2-t_2)} \left| A^{\frac{1}{2}}(0, t_2)u \right|^2 dt_2.$$

Благодаря формулам (6), (4) и 1), аналогично находим неравенство

$$\int_0^{\tau_1} e^{c(\tau_1-t_1)} \left| A^{\frac{1}{2}}(t)u \right|_{t_2=\tau_2}^2 dt_1 \leq 2 \operatorname{Re} \int_{D_\tau} e^\theta \left( Au, \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dt + \int_0^{\tau_1} e^{c(\tau_1+\tau_2-t_1)} \left| A^{\frac{1}{2}}(t_1, 0)u \right|^2 dt_1.$$

Интегрированием один раз по частям выводится равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau_1} e^\theta \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 \Big|_{t_2=\tau_2} dt_1 + \int_0^{\tau_2} e^\theta \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 \Big|_{t_1=\tau_1} dt_2 = 2 \operatorname{Re} \int_{D_\tau} e^\theta \left( \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dt + \\ & + \int_0^{\tau_1} e^\theta \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 \Big|_{t_2=0} dt_1 + \int_0^{\tau_2} e^\theta \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 \Big|_{t_1=0} dt_2 - c \int_{D_\tau} e^\theta \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 dt - c \int_{D_\tau} e^\theta \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Складываем его с двумя последними неравенствами, в полученном неравенстве проводим элементарные оценки, берем точную верхнюю грань по  $t \in T$  и при  $\forall c \geq c_4$ ,  $c_4 = \max\{c_2, 1\}$ , приходим к оценке

$$\|u\|_E \leq \sqrt{2e^{c(T_1+T_2)}} \|Lu\|_F \quad \forall u \in D(L). \quad (8)$$

Априорная оценка (5) для сильных решений  $u \in D(\bar{L})$  получается предельным переходом из оценки (8) для гладких решений  $u \in D(L)$ .

Непосредственно из теоремы 1 вытекает следующая

**Теорема 2.** Если в предположениях теоремы 1 для данных  $f \in H$ ,  $\varphi_1 \in H_1$ ,  $\varphi_2 \in H_2$  сильное решение  $u \in E$  задачи Гурса (1)–(3) существует, то оно единственно и непрерывно зависит от  $\{f, \varphi_1, \varphi_2\} \in R(\bar{L})$ , где  $R(\bar{L})$  – множество всех значений оператора  $\bar{L}$ .

### Литература

1. Бриш Н. И., Юрчук Н. И. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, №6. С. 1017–1030.
2. Ломовцев Ф. Е. // Докл. НАН РБ. 2001. Т. 45, № 1. С. 3437.

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО СПЕЦПРОЦЕССОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Л. И. Петровская

Организация вычислений на многопроцессорных устройствах с заданной топологией соединений между отдельными процессорными элементами тесно связана с задачей построения специальных параллельных форм вычислительных алгоритмов, реализуемых на таких устройствах. При этом на этапе разработки параллельных алгоритмов необходимо учитывать как топологические и функциональные ограничения, накладываемые технологией производства, так и ограниченность количества имеющихся процессорных элементов. Решение первой из этих задач достигается использованием специальных (графовых) представлений разрабатываемых алгоритмов, решение второй – за счет построения параллельных форм алгоритмов фиксированной ширины.

В данной работе для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

с начальными  $u(x, 0) = f^{(0)}(x)$  и краевыми  $u(0, t) = f_0(t)$ ,  $u(1, t) = f_1(t)$  условиями, используя двухслойную явную разностную схему

$$y(i, 0) = f^{(0)}(ih), \quad y(0, j) = f_0(j\tau), \quad y(N, j) = f_1(j\tau),$$

$$y(i, j) = \left(1 - \frac{2a\tau}{h^2}\right)y(i, j-1) + \frac{a\tau}{h^2}y(i+1, j-1) + \frac{a\tau}{h^2}y(i-1, j-1) + f(i, j-1),$$

$$1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq M,$$

спроектирован линейный спецпроцессор с фиксированным числом  $\Delta$  процессорных элементов.

Для решения поставленной задачи применена локально параллельная глобально последовательная стратегия построения параллельного алгоритма фиксированной ширины [1]. Согласно этой стратегии алгоритм (или граф зависимостей алгоритма) решения исходной задачи разбивается на части. Полученные части отображаются на вычислительный граф с заданным числом вершин  $\Delta$ .

Обозначим  $V = \{(i, j) | 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq M\}$  – индексное пространство, множеству точек которого ставится во взаимно однозначное соответствие множество операций (макроопераций) алгоритма (1),  $E = \{(v_1, v_2) \in V \times V, v_2 = v_1 + \square, \square \in \Phi\}$  – множество дуг, соединяющих инфор-

мационно связанные вершины,  $\Phi = \{\varphi^{(1)} = (-1,1), \varphi^{(2)} = (0,1), \varphi^{(3)} = (1,1)\}$  – множество векторов зависимостей алгоритма таких, что каждая дуга графа задается одним из этих векторов. Таким образом, получим граф зависимостей алгоритма  $G = (V, E)$ . Этот граф является строго направленным [2], так как конус допустимых направлений  $K(G) = \{\tau \in Z^2 \mid \tau \cdot \varphi^{(k)} > 0, \forall \varphi^{(k)} \in \Phi\}$  не пуст и определяется системой неравенств  $\tau_2 \geq |\tau_1| + 1$ .

Зададим невырожденное отображение  $\pi : Z^2 \rightarrow Z^1$  где  $\pi(\varphi) \in \{(0), (1)\}$ ,  $\varphi \in \Phi$ . Этому условию удовлетворяет только оператор,  $\pi(i, j) = j$ . При отображении оператором  $\pi$  вершины ввода  $f_0(\frac{j}{M})$  и  $f_1(\frac{j}{M})$  отображаются во внутренние процессорные элементы. Для того чтобы они проектировались в граничные процессорные элементы, расширим индексное пространство  $V$  до  $V' = V_{-1} \cup V_0 \cup V_{+1}$ , где  $V_{-1} = \{(i, j) \in Z^2 \mid -M + 2 \leq i \leq 0, 1 \leq j \leq M\}$ ,  $V_0 = \{(i, j) \in Z^2 \mid 1 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq M\}$ ,  $V_{+1} = \{(i, j) \in Z^2 \mid N \leq i \leq N + M - 2, 1 \leq j \leq M\}$  – области, в которых осуществляется транспортировка краевых условий.

Так как область  $V'$  состоит из объединения областей  $V_{-1}, V_0, V_{+1}$ , в каждой из которых вершинам соответствуют различные типы макроопераций, и при отображении  $\pi$  в каждый процессорный элемент линейного спецпроцессора отображаются вершины трех типов, то для того, чтобы различать эти макрооперации при вычислении, введем дополнительные переменные – метки  $m_{-1}, m_0, m_{+1}$  для вершин из  $V_{-1}, V_0, V_{+1}$  соответственно.

$$\text{Определим } \Gamma = \left\lceil \frac{\max_{v \in V'} \pi(v) - \min_{v \in V'} \pi(v) + 1}{\Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil, \text{ где } \lceil a \rceil = \min\{z \in Z \mid z \geq a\},$$

$$U_\gamma = \{v \in V' \mid 1 + (\gamma - 1)\Delta \leq \pi(v) \leq \gamma\Delta\}, U^\delta = \bigcup_{\gamma=1}^{\Gamma} U_\gamma^\delta, U_\gamma^\delta = \{v \in U_\gamma \mid \pi(v) = (\gamma - 1)\Delta + \delta\}, 1 \leq \gamma \leq \Gamma, 1 \leq \delta \leq \Delta.$$

Кусочно аффинную таймирующую функцию определим равенством

$$t(v) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} (c_\gamma + \tau \cdot v) 1_{U_\gamma}(v), \text{ где константы } c_\gamma \text{ и } \tau \text{ выбираются из условий}$$

$0 < |\tau_1| \leq \tau_2 - 1$  и  $t(v + \varphi) > t(v)$ ,  $v, v + \varphi \in \Phi$ . Минимальная высота параллельной формы алгоритма при фиксированном  $\tau$  достигается при  $c_1, c_2, \dots, c_\Gamma$ , задаваемым рекуррентным соотношением

$$c_{\gamma+1} = c_{\gamma} + \max\{-x_{\gamma}, y_{\gamma}\}, \quad 1 \leq \gamma \leq \Gamma - 1,$$

$$x_{\gamma} = \min_{\varphi \in \Phi_{\gamma}} \tau \cdot \varphi - 1, \quad \Phi_{\gamma} = \{-e_1 + e_2, e_2, e_1 + e_2\},$$

$$y_{\gamma} = \max_{1 \leq \delta \leq \Delta} \{ \max_{v \in U_{\gamma}^{\delta}} \tau \cdot v - \min_{v \in U_{\gamma+1}^{\delta}} \tau \cdot v \} + 1 \quad [3].$$

Время решения задачи определяется функцией

$$\begin{aligned} T(|\tau_1|, \tau_2) &= \max_{v \in V'} t(v) - \min_{v \in V'} t(v) + \max_{1 \leq r \leq 3} \tau \cdot \varphi^{(r)} = \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil - 1 + \\ &+ \max \left\{ |\tau_1| \left( M + N + \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil - 1 \right) + \tau_2 \left( M - \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil + 2 \right), \right. \\ &\left. |\tau_1| \left( M + N - 2 + \left( \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil - 1 \right) (2M + N - 4) \right) + \tau_2 \left( M + 1 - \left( \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil - 1 \right) \Delta \right) \right\}. \end{aligned}$$

В силу линейности функции  $T(|\tau_1|, \tau_2)$  имеем  $\min_{0 < |\tau_1| \leq \tau_2 - 1} T(|\tau_1|, \tau_2) = T(1, 2) = M + 2\Delta + 3 + \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil (2M + N - 2\Delta - 3)$ . Тогда таймирующая функция примет вид  $t(i, j) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} (i + 2j + M - 3 + (\gamma - 1)(2M + N - 2\Delta - 3)) 1_{U_{\gamma}}(i, j)$ .

Вычислим задержки в вершине  $v \in V$  по дуге  $(v, v + \varphi^{(k)}) \in E$ ,  $\varphi^{(k)} \in \Phi$ ,  $1 \leq k \leq K$ . Если  $v, v + \varphi \in U_{\gamma}$ ,  $1 \leq \gamma \leq \Gamma$ , то и  $h_{\varphi^{(1)}} = 1$ ,  $h_{\varphi^{(2)}} = 2$ ,  $h_{\varphi^{(3)}} = 3$ . Если  $v \in U_{\gamma}$ ,  $v + \varphi \in U_{\gamma+1}$ ,  $1 \leq \gamma \leq \Gamma - 1$ , то

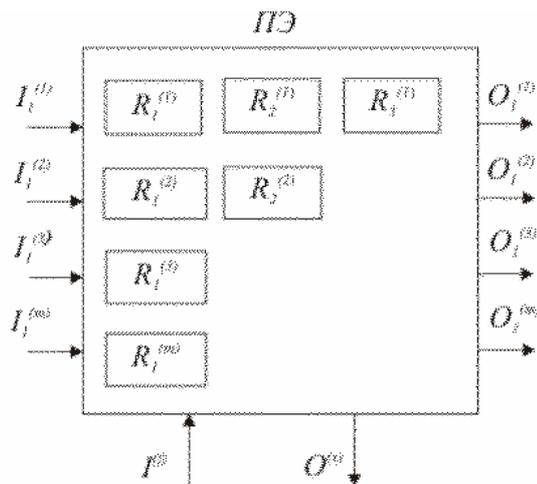


Рис. 1. Структурная схема процессорного элемента

$$h_{\varphi}(v) = c_{\gamma+1} - c_{\gamma} + \tau \cdot \varphi,$$

и

$$h_{\varphi^{(1)}} = 2M + N - 2\Delta - 2, \quad h_{\varphi^{(2)}} = 2M + N - 2\Delta - 1, \quad h_{\varphi^{(3)}} = 2M + N - 2\Delta.$$

Процесс приема, вычисления и передачи информации, происходящие в процессорном элементе, представим в виде описания функционирования локальной памяти процессорного элемента:

$$R_1^{(1)}(t) = \begin{cases} I_{(1)}^{(1)}, I_{(1)}^{(m)} = m_{-1}, \\ (1 - \frac{2aN^2}{M})I_{(1)}^{(2)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(1)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(3)} + f, I_{(1)}^{(m)} = m_0, \end{cases}$$

$$R_2^{(1)}(t+1) = R_1^{(1)}(t), R_3^{(1)}(t+2) = R_2^{(1)}(t+1), O_1^{(1)} = R_3^{(1)}(t+2),$$

$$R_1^{(2)}(t) = (1 - \frac{2aN^2}{M})I_{(1)}^{(2)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(1)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(3)} + f, I_{(1)}^{(m)} = m_0,$$

$$R_2^{(2)}(t+1) = R_1^{(2)}(t), O_1^{(2)} = R_2^{(2)}(t+1),$$

$$R_1^{(3)}(t) = \begin{cases} I_{(1)}^{(3)}, I_{(1)}^{(m)} = m_{+1}, \\ (1 - \frac{2aN^2}{M})I_{(1)}^{(2)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(1)} + \frac{aN^2}{M}I_{(1)}^{(3)} + f, I_{(1)}^{(m)} = m_0, \end{cases}$$

$$O_1^{(3)} = O_1^{(x)} = R_1^{(3)}(t),$$

$$R_1^{(m)}(t) = I_{(1)}^{(m)}, O_1^{(m)} = R_1^{(m)}(t).$$

Полное время решения задачи спроектированным линейным спецпроцессором  $M + 2\Delta + 3 + \left\lceil \frac{M}{\Delta} \right\rceil (2M + N - 2\Delta - 3)$  такта, где такт определяется временем выполнения одной макрооперации алгоритма (1).

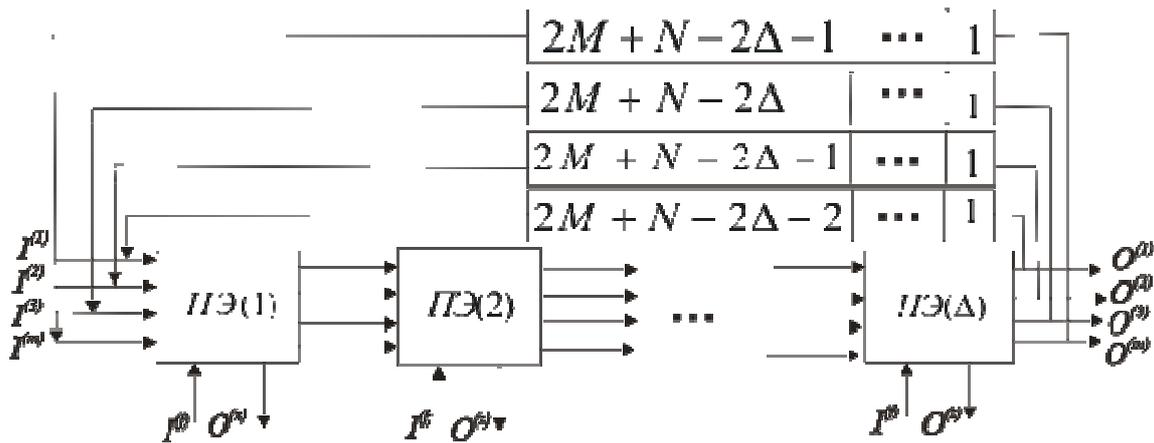


Рис. 2. Структурная схема спроектированного спецпроцессора

### Литература

1. Кун С. Матричные процессоры на СБИС: Пер. – М.: Мир, 1991.

2. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. Санкт-Петербург. 2002. 608 с.
3. Косьянчук В. В., Лиходед Н. А., Соболевский П. И., Тиунчик А. А. Смешанная стратегия построения параллельных форм алгоритмов. Май, 1996. Препринт №4(516).

## О КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

А. А. Платонов

Рассматривается многокритериальная линейная комбинаторная задача, принцип оптимальности которой задается способом разбиения частных критериев на группы так, что внутри каждой группы действует слейтеровский принцип оптимальности, а между группами – лексикографический. Получена формула радиуса квазиустойчивости задачи в метрике  $l_\infty$ . В качестве следствий приводится ряд результатов качественного характера.

В широком смысле под устойчивостью дискретной задачи понимают наличие такой окрестности исходных данных в пространстве параметров задачи, что по отношению к начальной всякая «возмущенная» задача с параметрами из этой окрестности обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности. В частности, свойство полу непрерывности сверху (снизу) по Хаусдорфу оптимального отображения эквивалентно свойству не появления новых (сохранения исходных) оптимальных решений задачи при «малых» возмущениях ее параметров. В этом контексте соответственно возникает понятие устойчивости и квазиустойчивости задач дискретной оптимизации (см., например, [1, 2]).

Рассмотрим типичную векторную ( $n$ -критериальную) комбинаторную задачу. Пусть на системе подмножеств (траекторий)  $T \in 2^E$ ,  $|T| \geq 2$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ,  $m \geq 2$ , задан векторный критерий

$$f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \dots, f_n(t, A_n)) \rightarrow \min_{t \in T},$$

частными критериями которого являются функции вида

$$f_i(t, A_i) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

где  $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$ ,  $A_i$  –  $i$ -я строка матрицы  $A = [a_{ij}] \in R^{n \times m}$ . Будем полагать, что  $f_i(\emptyset, A_i) = 0$ .

В пространстве  $R^p$  произвольной размерности  $p \in N$  определим три бинарных отношения строгого предпочтения согласно формулам

$$y \underset{Sl}{\succ} y' \Leftrightarrow y_i > y'_i, i \in N_p,$$

$$y \underset{Sm}{\succ} y' \Leftrightarrow y_i \geq y'_i, i \in N_p,$$

$$y \underset{lex}{\succ} y' \Leftrightarrow y_k \geq y'_k,$$

где  $k = \min\{i \in N_p : y_i \neq y'_i\}$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ ,  $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_p)$ .

Эти отношения порождают соответственно следующие широко известные объекты векторной оптимизации:

- множество Слейтера (слабо эффективных траекторий)

$$Sl^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T (f(t, A) \not\underset{Sl}{\succ} f(t', A))\},$$

- множество Смейла ( строго эффективных траекторий )

$$Sm^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T \setminus \{t\} (f(t, A) \not\underset{Sm}{\succ} f(t', A))\},$$

- лексикографическое множество траекторий

$$L^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T (f(t, A) \not\underset{lex}{\succ} f(t', A))\}.$$

Здесь, как обычно, символ  $\not\underset{\cdot}{\succ}$  означает отрицание отношения  $\underset{\cdot}{\succ}$ . Пусть  $s \in N_n$ ,  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_s\}$  – разбиение множества  $N_n$  на  $s$  непустых непересекающихся подмножеств (групп), т. е.  $N_n = \bigcup_{r \in N_s} I_r$ .

Каждому такому разбиению  $I$  в критериальном пространстве  $R^n$  поставим в соответствие бинарное отношение строгого предпочтения  $\Omega_I^n$  между различными векторами  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  и  $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ , полагая  $y \Omega_I^n y' \Leftrightarrow y_{I_k} \underset{Sl}{\succ} y'_{I_k}$ , где  $k = \min\{i \in N_s : y_{I_i} \neq y'_{I_i}\}$ ;  $y_{I_k}$  и  $y'_{I_k}$  – проекции соответственно векторов  $y$  и  $y'$  на координатные оси пространства  $R^n$  с номерами группы  $I_k$ .

Введенное бинарное отношение  $\Omega_I^n$  задает такой принцип упорядоченности сформированных групп критериев, в котором каждая предыдущая группа существенно важнее всех последующих. В результате это отношение порождает множество  $I$ -эффективных траекторий в соответствии с правилом

$$T^n(A, I) = \{t \in T : \forall t' \in T (f(t, A) \Omega_I^n f(t', A))\}.$$

Очевидно, что множество  $T^n(A, I_{Sl})$ , где  $I_{Sl} = \{N_n\}$  ( $s=1$ ), есть множество Слейтера  $Sl^n(A)$ , а множество  $T^n(A, I_L)$ , где  $I_L = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$  ( $s=n$ ), совпадает с лексикографическим множеством  $L^n(A)$ . Векторную задачу поиска множества  $T^n(A, I)$  будем обозначать через  $Z^n(A, I)$ .

Для произвольного числа  $\varepsilon > 0$  определим множество из возмущающих матриц  $\Psi(\varepsilon) = \{A' \in R^{n \times m} : \|A'\| < \varepsilon\}$ , где  $\|A'\| = \max\{|a'_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}$ ,  $A' = [a'_{ij}]$ .

**Определение 1.** Векторная задача  $Z^n(A, I)$ ,  $n \geq 1$ , называется квазиустойчивой (к возмущениям элементов матрицы  $A$ ), если существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что для любой возмущающей матрицы  $A' \in \Psi(\varepsilon)$  справедливо включение  $T^n(A, I) \subseteq T^n(A + A', I)$ .

**Определение 2.** Радиусом квазиустойчивости векторной задачи  $Z^n(A, I)$ ,  $n \geq 1$ , назовем число

$$\rho^n(A, I) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где  $\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall A' \in \Psi(\varepsilon) (T^n(A, I) \subseteq T^n(A + A', I))\}$ .

По двум различным траекториям  $t$  и  $t'$  определим пару чисел :  $\Delta(t, t') = |(t \cup t') \setminus (t \cap t')|$ ,  $d^n(t, t', A) = \max_{i \in I_1} \frac{f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)}{\Delta(t, t')}$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** При любом разбиении  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_s\}$  множества  $N_n$ ,  $n \geq 1$ , на  $s$  групп,  $s \in N_n$ , радиус квазиустойчивости  $\rho^n(A, I)$  задачи  $Z^n(A, I)$  имеет вид

$$\rho^n(A, I) = \min_{t \in T^n(A, I)} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} d^n(t, t', A).$$

Непосредственно из теоремы вытекает ряд следствий.

**Следствие 1.** Для радиуса квазиустойчивости задачи  $Z^n(A, I_{Sl})$ ,  $n \geq 1$ , поиска множества Слейтера  $Sl^n(A)$  справедлива формула

$$\rho^n(A, I_{Sl}) = \min_{t \in Sl^n(A)} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \max_{i \in N_n} \frac{f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)}{\Delta(t, t')}.$$

Формула радиуса квазиустойчивости, приведенная в следствии 1, легко превращается в формулу радиуса квазиустойчивости скалярной траекторной задачи с линейным критерием [3].

**Следствие 2.** Для радиуса квазиустойчивости задачи  $Z^n(A, I_L)$ ,  $n \geq 1$ , поиска лексикографического множества  $L^n(A)$  справедлива формула

$$\rho^n(A, I_L) = \min_{t \in L^n(A)} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \frac{f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)}{\Delta(t, t')}.$$

**Следствие 3.** При любом разбиении  $I$  множества  $N_n$ ,  $n \geq 1$ , на  $s$  групп,  $s \in N_n$ , задача  $Z^n(A, I)$ ,  $n \geq 1$ , квазиустойчива тогда и только тогда, когда  $\forall t \in T^n(A, I) \quad \forall t' \in T \setminus \{t\} \quad \exists i \in I_1 \quad (f_i(t', A_i) > f_i(t, A_i))$ .

Из следствия 3 получаем следующие сопутствующие результаты.

**Следствие 4.** Задача  $Z^n(A, I_{Sl})$ ,  $n \geq 1$ , поиска множества Слейтера  $Sl^n(A)$  квазиустойчива тогда и только тогда, когда множества  $Sl^n(A)$  и  $Sm^n(A)$  совпадают.

Легко понять, что для скалярной линейной траекторной задачи совпадение множеств Слейтера и Смейла эквивалентно существованию единственного оптимального решения.

Поэтому частным случаем следствия 4 является

**Следствие 5.** Однокритериальная (скалярная) линейная траекторная задача квазиустойчива тогда и только тогда, когда она имеет единственное решение.

**Следствие 6.** Для того чтобы задача  $Z^n(A, I_L)$ ,  $n \geq 1$ , поиска лексикографического множества  $L^n(A)$  была квазиустойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\left| L^n(A) \right| = \left| \text{Arg} \min_{t \in T} f_1(t, A_1) \right| = 1.$$

### Литература

1. *Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P.* Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. № 4. С. 645–676.
2. *Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М.* Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 79–92.
3. *Леонтьев В. К.* Устойчивость в линейных дискретных задачах // Сб.: Проблемы кибернетики. 1979. Т. 35. С. 169–184.

# АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

И. В. Погоцкая

Дифференциально-операторные уравнения второго порядка с постоянными областями определения операторных коэффициентов при нелокальных двухточечных условиях по времени изучались В. И. Чесалиным и Н. И. Юрчуком [1]. Гиперболические дифференциально-операторные уравнения с переменными областями определения операторных коэффициентов при локальных начальных условиях исследованы в [2]. В настоящей работе будет выведена априорная оценка сильных решений гиперболических уравнений второго порядка с переменными областями определения операторных коэффициентов в случае нелокальных двухточечных условий по времени.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На ограниченном интервале  $]0, T[$  задается дифференциально-операторное уравнение

$$\mathbb{L}(t)u \equiv \frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in ]0, T[ , \quad (1)$$

при нелокальных начальных условиях

$$\begin{aligned} l_0 u &\equiv u|_{t=0} - \mu u|_{t=T} = \varphi, \\ l_1 u &= \frac{du}{dt}\Big|_{t=0} - \mu \frac{du}{dt}\Big|_{t=T} = \psi, \quad |\mu| < 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $u$  и  $f$  – абстрактные функции переменной по  $t$  со значениями в некотором гильбертовом пространстве  $H$ , в котором скалярное произведение и норму будем обозначать  $(\cdot, \cdot)$  и  $|\cdot|$  соответственно. При каждом  $t \in [0, T]$  коэффициент  $A(t) : H \supset D(A(t)) \rightarrow H$  – линейный неограниченный оператор в  $H$  с зависящей от  $t$  областью определения  $D(A(t))$ , удовлетворяющий следующим условиям.

I. При каждом  $t \in [0, T]$  оператор  $A(t)$  на  $D(A(t))$  самосопряжен и положительно-определен в гильбертовом пространстве  $H$

II. Ограниченный обратный оператор  $A^{-1}(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$  к оператору  $A(t)$  сильно непрерывен по  $t$  в  $H$  и при почти всех  $t \in ]0, T[$  имеет в  $H$

ограниченную сильную производную  $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty([0, T[, \mathcal{L}(H))$ , для которой при почти всех  $t \in ]0, T[$  выполняется неравенство [2]

$$-\left(\left(dA^{-1}(t)/dt\right)g, g\right) \leq c_2 \left(A^{-1}(t)g, g\right) \quad \forall g \in H, \quad (3)$$

где постоянная  $c_2 \geq 0$  не зависит от  $g$  и  $t$ .

Выведем априорную оценку сильных решений поставленной задачи (1), (2).

## 2. ВЫБОР ПРОСТРАНСТВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Нелокальная задачи Коши (1), (2) порождает линейный неограниченный оператор  $L \equiv \{\mathcal{L}(t), l_0, l_1\}: E \supset D(L) \rightarrow F$  с плотной областью определения  $D(L)$ . Подпространством сильных решений  $u$  задачи (1), (2) будет банахово пространство  $E$ –замыкание множества

$$D(L) = \left\{ u \in L_2([0, T[, H) : u(t) \in D(A(t)) \quad \forall t \in ]0, T[; A(t)u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2} \in L_2([0, T[, H) \right\}$$

по норме  $\|u\|_E = \frac{1 - |\mu|^2}{1 + |\mu|^2} \left[ \sup_{0 < t < T} \left( \left| \frac{du(t)}{dt} \right|^2 + \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 \right) \right]^{1/2}$ .

Пространством правых частей  $\mathbf{F} = \{f(t), \varphi, \psi\}$  задачи (1), (2) будет гильбертово пространство  $F = L_2([0, T[, H) \times W(0) \times H$ , наделенное нормой

$$\|\mathbf{F}\|_F = \left[ \|f\|_0^2 + T^{-1} (|A^{1/2}(0)\varphi|^2 + |\psi|^2) \right]^{1/2}, \quad \|f\|_0^2 = \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

где  $W(t)$ –гильбертовы пространства, полученные наделением областей определения  $D(A^{1/2}(t))$  квадратного корня  $A^{1/2}(t)$  операторов  $A(t)$  эрмитовыми нормами  $|v|_{(t)} = |A^{1/2}(t)v|$ ,  $t \in [0, T]$ . Пусть пространства

$$W(0) = W(T), \quad \left| A^{1/2}(0)v \right| = \left| A^{1/2}(T)v \right| \quad \forall v \in W(0). \quad (4)$$

Линейный оператор  $L$  допускает сильное замыкание  $\bar{L}$  в произведении  $E \times F$ .

**Лемма.** Если выполняется условие I и множество  $D(L)$  плотно в  $L_2([0, T[, H)$ , то для оператора  $L$  существует сильное замыкание  $\bar{L}: E \supset D(\bar{L}) \rightarrow F$ .

*Доказательство.* По критерию замыкаемости линейных операторов убедимся в том, что если  $u_n \in D(L)$ ,  $\|u_n\|_E \rightarrow 0$  и  $\|Lu_n - F_0\|_F \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $F_0 = \{f_0, \varphi_0, \psi_0\} = 0$ . Ввиду предположения (4) из непрерывности операторов следа  $l_0: E \rightarrow W(0)$  и  $l_1: E \rightarrow H$  выводим, что  $\varphi_0 = 0$ ,  $\psi_0 = 0$ . Осталось доказать, что  $f_0 = 0$ . Проинтегрировав по  $t$  один раз по частям, для  $\forall v \in D(L)$  имеем

$$\int_0^T (f_0, v) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{du_n}{dt}, v \right) \Big|_0^T - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \frac{du_n}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (u_n, A(t)v) dt = 0.$$

Отсюда заключаем, что  $f_0 = 0$ , потому что множество  $D(L)$  плотно в  $L_2(]0, T[, H)$ .

*Определение.* Решения  $u \in D(\bar{L})$  операторного уравнения  $\bar{L}u = F$ ,  $F \in F$ , называются **сильными решениями** нелокальной задачи Коши (1), (2), то есть  $u \in D(\bar{L})$  – область определения замыкания  $\bar{L}$ , если существует последовательность  $u_n \in D(L)$  и элемент  $F \in F$  такие, что  $u_n \rightarrow u$  в  $E$  и  $Lu_n \rightarrow F$  в  $F$  когда  $n \rightarrow \infty$  и в этом случае полагаем  $\bar{L}u = \lim_{n \rightarrow \infty} Lu_n = F$ .

### 3. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

**Теорема.** Если выполняются условия I, II, (4) и множество  $D(L)$  плотно в  $L_2(]0, T[, H)$ , то для всех  $T \leq 1/(4c_2)$  и  $|\mu|^2 \leq \frac{1-4c_2T}{1+4c_2T}$  справедливо неравенство

$$\|u\|_E^2 \leq 16T \|\bar{L}u\|_F^2 \quad \forall u \in D(\bar{L}). \quad (5)$$

*Доказательство* проведем с помощью сглаживающих операторов  $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$ ,  $\varepsilon > 0$ , из [2], которые имеют следующие свойства.

1. Ограниченность нормы  $\|A_\varepsilon^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \forall \varepsilon > 0, \forall t \in [0, T]$ .
2. Равномерно по  $t$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  норма  $|A_\varepsilon^{-1}(t)h - h| \rightarrow 0 \quad \forall h \in H$ .
3. При почти всех  $t \in ]0, T[$  в  $H$  существует сильная производная  $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$ ,  $\varepsilon > 0$ , такая, что сильная производная

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt} = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} A(t)A_\varepsilon^{-1}(t), \quad \varepsilon > 0. \quad (6)$$

Интегрируя по  $t$  один раз по частям, для  $\forall u \in D(L)$  имеем равенство

$$\begin{aligned} \left( A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u \right) \Big|_{t=\tau} &= 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau \left( A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{du}{dt} \right) dt + \int_0^\tau \left( \frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt} u, u \right) dt + \\ &+ \left( A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Если в его правой части применить формулу (6), оценку (3) и в полученном неравенстве перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  то найдем неравенство

$$\left| A^{1/2}(t)u \right|^2 \Big|_{t=\tau} \leq 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau \left( A(t)u, \frac{du}{dt} \right) dt + c_2 \int_0^\tau \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 dt + \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 \Big|_{t=0}.$$

Складывая его с равенством, полученным интегрированием по частям,

$$\left| \frac{du}{dt} \right|^2 \Big|_{t=\tau} = 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau \left( \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{du}{dt} \right) dt + \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \Big|_{t=0},$$

получаем неравенство

$$\begin{aligned} \left( \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 + \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \right) \Big|_{t=\tau} &\leq 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau \left( L(t)u, \frac{du}{dt} \right) dt + c_2 \int_0^\tau \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 dt + \\ &+ \left( \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 + \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично интегрируя один раз по частям, имеем неравенство

$$\begin{aligned} -\frac{1+|\mu|^2}{2} \left( \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 + \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \right) \Big|_{t=\tau} &\leq \frac{1+|\mu|^2}{2} \left[ 2 \operatorname{Re} \int_\tau^T \left( L(t)u, \frac{du}{dt} \right) dt + c_2 \int_\tau^T \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 dt \right] - \\ &-\frac{1+|\mu|^2}{2} \left( \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 + \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \right) \Big|_{t=T}. \end{aligned} \quad (8)$$

Складывая почленно неравенства (7) и (8), используем лемму 1 из [1], делаем элементарные оценки и приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1-|\mu|^2}{2} \left( \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 + \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \right) \Big|_{t=\tau} &\leq (1+|\mu|^2) \left( \delta^{-1} \|L(t)u\|_0^2 + \delta \left\| \frac{du}{dt} \right\|_0^2 + c_2 \left\| A^{1/2}(t)u \right\|_0^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{1-|\mu|^2} \left( \left| A^{1/2}(0)l_0u \right|^2 + |l_1u|^2 \right) \right) \leq (1+|\mu|^2) \left[ \delta^{-1} \|Lu\|_F^2 + \delta \left( \left\| \frac{du}{dt} \right\|_0^2 + \left\| A^{1/2}(t)u \right\|_0^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

для  $\forall \delta > 0$ , если  $c_2 \leq \delta$ . Проинтегрируем неравенство (9) по  $\tau$  от 0 до  $T$ , результат разделим на  $T(1 + |\mu|^2)$  и при  $\delta = \delta_0 = \frac{1 - |\mu|^2}{4T(1 + |\mu|^2)}$  найдем оценку

$$\delta_0 \left( \left\| \frac{du}{dt} \right\|_0^2 + \left\| A^{1/2}(t)u \right\|_0^2 \right) \leq \delta_0^{-1} \|Lu\|_F^2. \quad (10)$$

Поскольку по предположениям теоремы  $c_2 \leq \delta_0$ , то в силу оценки (10) из неравенства (9) вытекает неравенство (5) для гладких решений  $u \in D(L)$ , которое затем предельным переходом распространяется на все сильные решения  $u \in D(\bar{L})$ .

*Следствие.* В предположениях теоремы для каждого  $F = \{f(t), \varphi, \psi\}$  из гильбертова подпространства  $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$  пространства  $F$  сильное решение  $u \in E$  нелокальной задачи Коши (1), (2) существует, единственно и непрерывно зависит от  $f$ ,  $\varphi$  и  $\psi$ , где  $R(\bar{L})$  – множество всех значений оператора  $L$  и  $R(L)$  – замыкание в  $F$  множества всех значений  $R(L)$  оператора  $L$ .

#### Литература

1. Чесалин В. И., Юрчук Н. И. Задача Коши с нелокальными условиями для абстрактных уравнений Лява // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1973. № 6. С. 30–35.
2. Ломовцев Ф. Е. Гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов // Докл. НАН Беларусі. 2001. Т. 45. № 1. С. 34 – 37.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ТАЙЛИНГА ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

**М. А. Урбанович**

Высокая латентность каналов связи влечет за собой большие накладные расходы на коммуникации между вычислительными узлами при работе параллельного приложения, что приводит к низкой эффективности программной реализации алгоритма. В работе [1] была предложена идея разбиения на супервершины, получившая название тайлинга. Способ разбиения на супервершины (их форма, размеры), способ отображения

множества супервершин на параллельную архитектуру определяют эффективность реализации алгоритма.

Перспективность тайлинга повлекла за собой ряд исследований с целью разработки методов построения оптимальных разбиений. Результатом этих исследований явился ряд методов оптимизации тайлинга [2-3]. Однако эти методы не затрагивают задачу отображения тайлов на целевую архитектуру.

Таким образом, остается актуальной задача разработки методов построения оптимального тайлинга, которые в полном объеме учитывали бы характеристики целевой параллельной архитектуры, включая ее размерность и размеры.

В данной работе рассмотрен метод оптимизации тайлинга при параллельной реализации численного решения одномерного уравнения теплопроводности на параллельной системе с распределенной памятью. Для отображения алгоритмов используется локально последовательная глобально параллельная (LSGP) стратегия [4]. Эта работа является начальным этапом в распараллеливании алгоритмов с использованием техники тайлинга на основе LSGP стратегии.

Рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности.

В области  $0 < x < 1$ ,  $0 < t < T$  нужно найти решение дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$U(0; t) = \mu_1(t), \quad U(1; t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

Функции  $u_0(x)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$ ,  $f(x; t)$  - считаются заданными.

Рассмотрим явную разностную задачу, которая имеет вид:

$$y_{i_1}^{i_2} = \frac{\tau}{h^2} \cdot (y_{i_1+1}^{i_2-1} + y_{i_1-1}^{i_2-1}) + (1 - \frac{\tau}{h^2}) \cdot 2y_{i_1}^{i_2-1} + \tau \cdot \varphi_{i_1}^{i_2}; \quad (4)$$

$$i_1 = 1, 2, \dots, N-1; \quad i_2 = 1, 2, \dots, K; \quad N \cdot h = 1; \quad K \cdot \tau = T;$$

$$y_0^{i_2} = \mu_1(t_{i_2}); \quad y_N^{i_2} = \mu_2(t_{i_2}); \quad i_2 = 0, 1, \dots, K;$$

$$y_{i_1}^0 = u_0(x_{i_1}); i_1 = 0, 1, \dots, N.$$

Алгоритм вида (4) характеризуется областью вычислений  $V$  и множеством векторов зависимостей  $\Phi$ . Область вычислений есть подмножество точек целочисленного пространства  $Z^2$ , которое определяется как  $V = \{v(i_1, i_2) \in Z^2 \mid 1 \leq i_m \leq I_m, m = 1, 2\}$ , где  $I_1 = N - 1$ ,  $I_2 = K$ . Каждой точке  $v(i_1, i_2) \in V$  в соответствии с алгоритмом приписана операция  $y_{i_1}^{i_2} = y(i_1, i_2)$ . Множество векторов зависимостей  $\Phi = \{e_2, e_2 - e_1, e_2 + e_1\}$ , где  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ , отражает информационные зависимости между операциями алгоритма.

С помощью техники тайлинга разобьем область вычислений алгоритма двумя семействами прямых с нормальными векторами  $h_1, h_2 \in Z^2$ . Получаемое при этом разбиение области  $V$  на тайлы должно удовлетворять следующим условиям:

1) тайлы должны быть одинаковы по форме и размеру (за исключением возможно граничных),

2) между тайлами не должно существовать обратных связей.

Нормальные векторы  $h_1$  и  $h_2$  определим из конуса допустимых направлений  $K_0 = \{h \in Z^2 \mid h \cdot \varphi \geq 0, \varphi \in \Phi\}$  [5]. Из всех возможных вариантов векторов  $h_1$  и  $h_2$  интерес представляет следующий:  $h_1 = e_2 + e_1$ ,  $h_2 = e_2 - e_1$ . При разбиении гиперплоскостями с такими нормальными векторами образуется регулярная структура с двумя векторами зависимостей между тайлами  $e_1$  и  $e_2$ . Тайл формально можно определить как

$$u(j_1, j_2) = \{v(i_1, i_2) \in V \mid \delta_{\min}^i + (j_i - 1) \cdot r_i \leq h_i \cdot v \leq \delta_{\min}^i + j_i \cdot r_i - 1\}$$

$$1 \leq j_i \leq J_i = \left\lceil \frac{N_i}{r_i} \right\rceil, i = 1, 2$$

где  $\delta_{\min}^i = \min_{v \in V} h_i \cdot v$ ,  $N_i = \max_{v \in V} h_i \cdot v - \delta_{\min}^i + 1 = N + K - 2$ ,  $i = 1, 2$ .

Вычисляя все параметры, получаем

$$u(j_1, j_2) = \{v(i_1, i_2) \in V \mid 2 + (j_1 - 1) \cdot r_1 \leq i_2 + i_1 \leq j_1 \cdot r_1 + 1,$$

$$1 - I_1 + (j_2 - 1) \cdot r_2 \leq i_2 - i_1 \leq j_2 \cdot r_2 - I_1, 1 \leq i_1 \leq N - 1, 1 \leq i_2 \leq K\}.$$

Параметры  $r_1$  и  $r_2$  используемые в определении тайла, задают его размеры и являются неизменными для всех тайлов. Также было обнаружено, что при выбранных  $h_1$  и  $h_2$ , когда хотя бы одно из чисел  $r_1$  или  $r_2$  является нечетным, количество вершин в тайле не одинаково. Поэтому будем рассматривать только четные  $r_1$  и  $r_2$ . В этом случае тайл содержит  $\frac{r_1 \cdot r_2}{2}$  вершин.

Отобразим алгоритм (4) на целевую одномерную параллельную архитектуру, состоящую из  $P$  вычислительных узлов, которые пронумерованы от 1 до  $P$ .

Зависимость между тайлами характеризуется прямоугольной областью вычислений  $U = \{(j_1, j_2) \in Z^2 \mid 1 \leq j_1 \leq J_1, 1 \leq j_2 \leq J_2\}$ , содержащей множество тайлов  $U^* = \{(j_1, j_2) \in Z^2 \mid 1 \leq j_1 \leq J_1, 1 \leq j_2 \leq J_2, 2 \cdot \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - r_2 + 2 \leq j_1 \cdot r_1 - j_2 \cdot r_2 \leq 2 \cdot \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + r_1 - 2, 2 \cdot \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 2 \leq j_1 \cdot r_1 + j_2 \cdot r_2 \leq 2 \cdot \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor + 2K + r_1 + r_2 - 4\}$  и множеством векторов зависимостей  $\Phi_u = \{e_1, e_2\}$ , где каждой точке  $u(j_1, j_2) \in U$  приписана макрооперация, состоящая из  $\frac{r_1 \cdot r_2}{2}$  операций  $y(v), v \in V$ .

Пусть  $J_1 = \left\lfloor \frac{N_1}{r_1} \right\rfloor = P$ , тогда возьмем  $r_1 = \left\lfloor \frac{N_1}{P} \right\rfloor$ .

Согласно LSGP стратегии функцию размещения определим следующим образом:  $f(u(j_1, j_2)) = j_1, u \in U$ .

Функция таймирования  $t: U \rightarrow Z_+$  в данном случае примет вид

$$t(u) = c_1 + \tau \cdot u, u \in U, \tau \in Z^2, c_1 \in Z.$$

Функция  $t$  определяет момент начала выполнения каждой макрооперации алгоритма. Функция включает в себя параметры  $c_1$  и  $\tau$ . Значение параметра  $c_1$  характеризует момент начала выполнения макроопераций на вычислительной системе. Вектор  $\tau$  в свою очередь определяет порядок выполнения макроопераций.

Введем ряд обозначений.

Пусть  $t_0$  — время, необходимое на выполнение операции  $y(i_1, i_2)$ . Тогда обозначим  $T_{comp} = t_0 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{2}$  — время на выполнение одной макрооперации. Далее, пусть  $a$  — время инициализации канала связи,  $b$  — время, необходимое на передачу данных, обусловленных информационной зависимостью между макрооперациями, приписанных точкам  $u, u + e_1 \in U$ . Тогда  $T_{comm} = a + b \cdot r_2$  — время на передачу результатов выполнения макрооперации по каналу связи.

В соответствии с введенными определениями и обозначениями вектор  $\tau$  имеет вид:  $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (T_{comp} + T_{comm}, \max\{T_{comp}, T_{comm}\})$  [6].

Момент начала выполнения макрооперации, соответствующей тайлу  $u(1, 1)$  есть момент начала выполнения алгоритма. Найдем константу  $c_1$  такую, чтобы установить этот момент в нулевое значение:

$$t(1, 1) = c_1 + \tau_1 + \tau_2 = 0. \text{ Следовательно, } t(1, 1) = 0 \text{ при } c_1 = -\tau_1 - \tau_2.$$

Тогда, время реализации алгоритма  $T(r_2), 1 \leq r_2 \leq N_2$  выражается как  $T(r_2) = \max_{u \in U} t(u) + \tau_1 = c_1 + \tau_1 \cdot J_1 + \tau_2 \cdot J_2 + \tau_1 = -\tau_1 - \tau_2 + \tau_1 \cdot J_1 + \tau_2 \cdot J_2 + \tau_1 =$

$$= \tau_1 \cdot J_1 + \tau_2 \cdot (J_m - 1) = \left\lfloor \frac{N_1}{r_1} \right\rfloor (T_{comp} + T_{comm}) + \left( \left\lfloor \frac{N_2}{r_2} \right\rfloor - 1 \right) \max\{T_{comp}, T_{comm}\} =$$

$$= P \cdot \left\lfloor \frac{N_1}{P} \right\rfloor \frac{t_0 r_2}{2} + P \cdot (a + b \cdot r_2) + \left( \left\lfloor \frac{N_2}{r_2} \right\rfloor - 1 \right) \cdot \max \left\{ \left\lfloor \frac{N_1}{P} \right\rfloor \cdot \frac{t_0 r_2}{2}, a + b \cdot r_2 \right\}$$

Полученная формула, описывающая полное время реализации алгоритма, зависит от переменной  $r_2$ . Таким образом, при заданных параметрах системы, можно минимизировать время реализации алгоритма, найдя оптимальное значение параметра  $r_2$ .

### Литература

1. Li G.J., Wah B.W. The design of optimal systolic algorithms // Proc. IEEE 7-th Int. Comput. Softw. and Appl. Conf., Chicago. 1983. - N.Y.: IEEE, 1983. - P.310-319.
2. Boulet P., Darté A., Risset T., Robert Y. // Integration, The VLSIJ. 1994. Vol.17.
3. Xue J. // J. of Parallel and Distributed Computing, 1997. Vol. 1, №42. P.42-59.
4. Кун С. Матричные процессоры на СБИС: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 672 с.
5. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. Санкт-Петербург. БВХ-Петербург. 2002. —608с.
6. Баханович С.В., Соболевский П.И. Отображение алгоритмов на вычислительные системы с распределенной памятью: оптимизация тайлинга для одно- и двумерных топологий. // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук, 2006, № 3.

# ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО- ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

С. П. Ходос

Гиперболические сингулярные дифференциально-операторные уравнений второго порядка с постоянными областями определения исследовались в [1]. Гиперболические несингулярные дифференциально-операторные уравнений второго порядка с зависящими от времени областями определения изучены в [2]. В настоящей работе выводится энергетическое неравенство сильных решений для гиперболического сингулярного дифференциально-операторного уравнений второго порядка с зависящими от времени областями определения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть  $H$  – гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\|$ . Рассматривается задача Коши:

$$Lu \equiv \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{B(t)}{t} \frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in ]0, T[, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad du/dt|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

где  $f(t)$  и  $u(t)$  — функции переменной  $t$  со значениями в  $H$  и  $A(t)$  – линейные неограниченные операторы в  $H$  с зависящими от  $t$  областями определения  $D(A(t))$ ,  $t \in [0, T]$ .

На операторы  $A(t)$  налагаются следующие условия.

A1. При каждом  $t \in [0, T]$  операторы  $A(t)$  самосопряжены в  $H$  и  $(A(t)u, u) \geq c_1 |u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad c_1 > 0$ .

A2. Обратные операторы  $A^{-1}(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$  к операторам  $A(t)$  сильно непрерывны по  $t \in [0, T]$  в  $H$  и при почти всех  $t \in ]0, T[$  имеют в  $H$  сильную производную  $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$ , которая при почти всех  $t \in ]0, T[$  удовлетворяет неравенству [2]

$$-((dA^{-1}(t)/dt)g, g) \leq c_2 (A^{-1}(t)g, g) \quad \forall g \in H, \quad c_2 \geq 0. \quad (3)$$

B1. При каждом  $t \in [0, T]$  для замкнутых операторов  $B(t)$  в  $H$  с зависящими от  $t$  областями определения  $D(B(t))$  выполняется оценка

$$-\operatorname{Re}(B(t)u, u) \leq c_3 t |u|^2 \quad \forall u \in D(B(t)), c_3 \geq 0. \quad (4)$$

Выведем энергетическое неравенство для сильных решений поставленной задачи Коши.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Сначала введем нужные пространства. Обозначим  $\mathcal{H} = L_2(]0, T[, H)$ . За пространство сильных решений задачи Коши (1), (2) возьмем гильбертово пространство  $E$ , получающееся замыканием множества

$$D(L) = \left\{ u \in \mathcal{H} : u(t) \in D(A(t)), du(t)/dt \in D(B(t)), u(t) \in D(B^*(t)), \right. \\ \left. \forall t \in [0, T]: \frac{du(t)}{dt}, \frac{d^2u(t)}{dt^2} \in \mathcal{H}, \frac{B(t)}{t} \frac{du}{dt}, \frac{B^*(t)}{t} u, A(t)u \in \mathcal{H}; u(0) = \frac{du(0)}{dt} = 0 \right\},$$

по эрмитовой норме  $\|u\|_E = \left[ \int_0^T \left( |du/dt|^2 + |A^{1/2}(t)u|^2 \right) dt \right]^{1/2}$ , где  $B^*(t)$  – сопряженные операторы к операторам  $B(t)$ ,  $D(B^*(t))$  – их области определения и  $A^{1/2}(t)$  – квадратный корень операторов  $A(t)$ . За пространство правых частей  $f$  уравнения (1) возьмем банахово пространство  $F$ , которое получается замыканием множества  $\mathcal{H}$  по норме

$$\|f\|_F = \sup_v \left\{ \left| \int_0^T (T-t)(f, v) dt \right| / \|v\|_0 \right\}, \quad v \in \mathcal{H}, \quad \|v\|_0 = \left( \int_0^T |v|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пространство  $F$  является множеством всех антилинейных непрерывных функционалов на гильбертовом пространстве  $E_1$  с эрмитовой нормой  $\|w\|_{E_1} = \left[ \int_0^T (T-t)^{-2} |w|^2 dt \right]^{1/2}$ .

Задача Коши (1), (2) эквивалентна линейному неограниченному оператору  $L : E \supset D(L) \rightarrow F$  с плотной областью определения  $D(L)$ , который допускает сильное замыкание  $\bar{L} : E \supset D(\bar{L}) \rightarrow F$ .

**Лемма.** Если операторы  $A(t)$  удовлетворяют условию A1 и множество  $D(L)$  плотно в  $\mathcal{H}$ , то оператор  $L$  замыкаем.

*Доказательство.* Согласно критерию замыкаемости линейных операторов требуется показать, что если  $u_n \in D(L)$ ,  $\|u_n\|_E \rightarrow 0$  и  $\|Lu_n - f\|_F \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $f=0$ . Значение функционала  $f$  на  $E_1$  для  $\forall v \in D(L)$  после однократного интегрирования по  $t$  по частям равно

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (T-t)(Lu_n, v) dt = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \frac{du_n}{dt}, \frac{d}{dt}(T-t)v \right) dt + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (T-t) \left( \frac{du_n}{dt}, \frac{B^*(t)}{t} v \right) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (T-t)(u_n, A(t)v) dt = 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что  $f = 0$ , так как из  $\overline{D(L)} = \mathcal{H}$  следует плотность множества функций  $\{w = (T-t)v : v \in D(L)\}$  в  $E_1$ .

По определению сильного замыкания  $\bar{L}$  функция  $u \in D(\bar{L})$  – область определения оператора  $\bar{L}$ , если существует такая  $u_n \in D(L)$  и  $f \in F$ , что  $\|u_n - u\|_E \rightarrow 0$  и  $\|Lu_n - f\|_F \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При этом полагают  $\bar{L}u = \lim_{n \rightarrow \infty} Lu_n = f$ .

*Определение.* Решения  $u \in D(\bar{L})$  операторного уравнения  $\bar{L}u = f$ ,  $f \in F$ , называются *сильными решениями* задачи Коши (1), (2).

### 3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Выведем энергетическое неравенство (5) для решений задачи (1), (2).

**Теорема.** Если выполняются условия A1, A2, B1 и множество  $D(L)$  плотно в  $\mathcal{H}$ , то имеет место неравенство

$$\|u\|_E \leq c_5 \|\bar{L}u\|_F \quad \forall u \in D(\bar{L}), \quad c_5 = 2 \exp(\max\{c_2, 2c_3\}T). \quad (5)$$

*Доказательство.* Воспользуемся сглаживающими операторами  $A_\varepsilon^{-1} = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , из [2] со следующими свойствами.

- Норма  $\|A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \forall t \in [0, T]$ .
- Равномерно по  $t$  в  $H$  операторы  $A_\varepsilon^{-1}g \rightarrow g$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для  $\forall g \in H$ .
- При почти всех  $t \in ]0, T[$  в  $H$  существуют сильные производные

$$dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H)), \quad \varepsilon > 0, \text{ и}$$

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt} A(t)A_\varepsilon^{-1}(t), \quad \varepsilon > 0. \quad (6)$$

Интегрируя по  $t$  один раз по частям, для  $\forall c \geq 0$  и  $\forall u \in D(L)$  находим

$$\begin{aligned} &\int_0^T e^{c(T-t)} \left( A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{du}{dt} \right) dt = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left( A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{du}{dt} \right) dt + \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \Phi_\varepsilon(u, u) dt, \end{aligned} \quad (7)$$

где в силу равенства (6) и неравенства (3) форма  $\Phi_\varepsilon(u, u)$  оцениваться

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(u, u) &= \left( (d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt)u, u \right) - c(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u) \leq \\ &\leq c_2(A_\varepsilon^{-1}(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)A(t)u) - c(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u).\end{aligned}\quad (8)$$

Из равенства (7) в силу (8) и свойства b) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем неравенство

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{c(T-t)} \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 dt &\leq 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left( A(t)u, \frac{du}{dt} \right) dt + \\ &+ (c_2 - c) \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 dt.\end{aligned}\quad (9)$$

Интегрируя по  $t$  один раз по частям, для  $\forall c \geq 0$  и  $\forall u \in D(L)$  получаем

$$\int_0^T e^{c(T-t)} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt \leq 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left( \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{du}{dt} \right) dt - c \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt.$$

Сложим это равенство с неравенством (9) и при  $\forall c \geq c_2$  придем к

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{c(T-t)} \left( \left| \frac{du}{dt} \right|^2 + \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 \right) dt &\leq 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left( Lu, \frac{du}{dt} \right) dt - \\ &- 2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left( \frac{B(t)}{t} \frac{du}{dt}, \frac{du}{dt} \right) dt - c \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt.\end{aligned}\quad (10)$$

Здесь левая часть оценивается снизу через  $\|u\|_E^2$ , а правая часть согласно неравенству (4) при  $\forall c \geq 2c_3$  оценивается сверху через

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Re} \int_0^T e^{c(T-t)} (T-t) \left( Lu, \frac{du}{dt} \right) dt &\leq 2 \left( \left| \int_0^T (T-t) \left( Lu, e^{c_6(T-t)} \frac{du}{dt} \right) dt \right| / \left\| \frac{du}{dt} \right\|_0 \right) \|u\|_E = \\ &= 2 \left( \left| \int_0^T (T-t) (Lu, v) dt \right| / \left\| e^{c_6(t-T)} v \right\|_0 \right) \|u\|_E \leq 2e^{c_6 T} \|Lu\|_F \|u\|_E, \quad c_6 = \max\{c_2, 2c_3\}.\end{aligned}$$

В результате из неравенства (10) получаем неравенство (5) сначала для гладких решений  $u \in D(L)$ , которое потом распространяется предельным переходом на все сильные решения  $u \in D(\bar{L})$ .

*Следствие.* Из неравенства (5) вытекает корректность в сильном смысле задачи Коши (1), (2) на подпространстве  $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$  пространства  $F$ , где  $R(\bar{L})$  — множество всех значений оператора  $\bar{L}$  и  $\overline{R(L)}$  — замыкание в  $F$  множества всех значений  $R(L)$  оператора  $L$ .

### Литература

1. Гаврилова Н.В., Юрчук Н.И. // Дифференц. уравнения. 1981. Т.17. №5. С.789–795.
2. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. №1. С.34–37.

**О КОНЕЧНОЙ ХАРАКТЕРИЗУЕМОСТИ  
ОДНОГО КЛАССА РЕБЕРНЫХ ГРАФОВ  
ГИПЕРГРАФОВ ОГРАНИЧЕННОГО РАНГА  
В КЛАССЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРАФОВ**

**К. Н. Щемелева**

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Множества *вершин* и *ребер* (гипер)графа  $H$  обозначаются  $VH$  и  $EH$  соответственно. Если  $N(v) = N_G(v)$  – *окружение* вершины  $v$  в графе  $G$ , то  $\deg(v) = \deg_G(v) = |N(v)|$  – *степень* вершины  $v$ ; если  $X \subseteq VG$ , то  $G(X)$  – подграф, порожденный множеством  $X$ .

*Клик* называется множество попарно смежных вершин графа; *максимальная* клика максимальна относительно включения. Конечное семейство  $Q = (C_1, C_2, \dots, C_q)$  клик графа  $G$  называется *покрытием* этого графа, если каждая вершина и каждое ребро графа  $G$  входит хотя бы в одну из клик  $C_i$ . При этом клики  $C_i$  называются *кластерами* покрытия  $Q$ . Покрытие  $Q$  графа называется  *$m$ -ограниченным*, если любые два кластера из  $Q$  имеют не более  $m$  общих вершин, и  *$r$ -покрытием*, если любая вершина графа входит не более чем в  $r$  кластеров из  $Q$ .

*Реберный граф*  $L(H)$  гиперграфа  $H$  определяется условиями:  $VL(H) = EH$ , и две вершины смежны в  $L(H)$ , если и только если соответствующие ребра гиперграфа  $H$  пересекаются.

*Рангом* гиперграфа  $H$  называется число  $\text{rank}(H) = \max_{E \in EH} |E|$ ; *кратность* пары вершин  $u, v$  гиперграфа  $H$  – это число  $m(u, v) = |\{E \in EH : u, v \in E\}|$ ;  $m(H) = \max_{u, v \in VH} m(u, v)$  – *кратность гиперграфа*.

Пусть  $r, m$  – произвольные целые числа,  $r \geq 2, m \geq 1$ . Введем обозначение  $L_r^m = \{L(H) : \text{rank}(H) \leq r, m(H) \leq m\}$ .

Класс  $L_r^m$  – наследственный, и, поэтому, может быть охарактеризован посредством списка (конечного или бесконечного) запрещенных порожденных подграфов. Известно, что для любого  $m$  класс  $L_2^m$  характеризуется конечным списком запрещенных порожденных подграфов. Следовательно, существует полиномиальный алгоритм распознавания графов из этого класса. Поэтому далее считаем, что  $r \geq 3$ .

Известно, что задача распознавания  $G \in L_r^1$  является *NP*-полной [1]. Поэтому для класса  $L_r^1$  не существует конечной характеристики в терминах запрещенных порожденных подграфов. Сложность задачи распозна-

вания  $G \in L_r^m$ ,  $m \geq 2$ , пока неизвестна. Однако в [2] доказано, что класс  $L_3^m$  для любого  $m \geq 2$  не характеризуется конечным списком запрещенных порожденных подграфов.

Граф  $G$  называется *расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин  $VG = C \cup S$  на клику  $C$  и независимое множество  $S$  (*полярное разбиение*). Далее считаем, что в полярном разбиении  $VG = C \cup S$  расщепляемого графа  $G$  клика  $C$  является максимальной.

В [3] доказано, что для каждого фиксированного  $r$  графы из  $L_r^1$  характеризуются конечным списком запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. Нами доказывается аналогичный факт для класса  $L_r^m$ .

Из теоремы Бержа [4], описывающей для заданного графа  $G$  все гиперграфы  $H$  такие, что  $L(H) = G$ , вытекает следующее утверждение:

**Теорема 1.** *Граф  $G$  принадлежит классу  $L_r^m$ , если и только если для него существует  $m$ -ограниченное  $r$ -покрытие.*

Обозначим  $f(r, m) = m(r^2 - r + 1) + 1$ . Клика  $C$  графа  $G$  называется  $(r, m)$ -*большой*, если  $|C| \geq f(r, m)$ .

**Лемма 1.** *Пусть  $G \in L_r^m$ ,  $C$  – максимальная  $(r, m)$ -большая клика графа  $G$ . Тогда  $C$  является кластером каждого  $m$ -ограниченного  $r$ -покрытия графа  $G$ .*

*Доказательство.* Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_k$  – кластеры  $m$ -ограниченного  $r$ -покрытия  $A$  графа  $G$ , пересекающиеся с кликой  $C$ , причем  $C$  не является кластером  $A$ . Тогда  $B = (B_1, B_2, \dots, B_k)$ , где  $B_i = A_i \cap C$ , есть  $m$ -ограниченное  $r$ -покрытие графа  $G(C)$ , и (согласно максимальной  $C$ )  $B_i \neq C$  для любого  $i = \overline{1, k}$ . Пусть, не ограничивая общности, вершина  $v$  из  $C$  входит в первые  $t$  кластеров  $B_1, B_2, \dots, B_t$  покрытия  $B$ ,  $t \leq r$ . Несложно показать, что  $|B_i| \leq mr$  и  $|B_i \setminus B_j| \leq m(r-1)$  для любых  $i, j = \overline{1, t}$ . Отсюда вытекает следующая цепочка неравенств:

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2 \setminus B_1| \leq mr + m(r-1),$$

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1 \cup B_2| + |B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)| \leq$$

$$\leq (mr + m(r-1)) + m(r-1) = mr + 2 \cdot m(r-1),$$

.....

$$\begin{aligned} |B_1 \cup \dots \cup B_t| &= |B_1 \cup \dots \cup B_{t-1}| + |B_t \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{t-1})| \leq \\ &\leq (mr + (t-2)m(r-1)) + m(r-1) = mr + (t-1) \cdot m(r-1). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $C = B_1 \cup \dots \cup B_t$  и  $t \leq r$ , имеем:  
 $|C| \leq mr + (r-1)m(r-1) = m(r^2 - r + 1) < f(r, m)$ .

Полученное противоречие и доказывает лемму.

*Замечание.* Легко показать, что значение  $f(r, m)$  не улучшаемо уже при  $r = 3$  и  $m = 1$ .

**Лемма 2.** *Существует конечный список  $F_1$  запрещенных порожденных подграфов такой, что расщепляемый граф  $G$  с плотностью  $\varphi(G) \geq (rm - 1)r + 2$ ,  $m \geq 2$ , принадлежит классу  $L_r^m$ , если и только если  $G$  не содержит порожденных подграфов из  $F_1$ .*

*Доказательство.* Пусть  $R_k$  – граф, полученный из полного графа  $H = K_{f(r, m)}$  добавлением новой вершины, смежной ровно с  $k$  вершинами из  $H$ . Положим  $F_1 = \{R_k : rm + 1 \leq k \leq f(r, m) - 1\} \cup \{K_{1, r+1}\}$ , где  $K_{1, r+1}$  – звезда с  $r + 1$  концевыми вершинами.

С помощью теоремы 1 и леммы 1 непосредственно проверяется, что никакой граф из  $F_1$  не принадлежит  $L_r^m$ . Поэтому необходимость утверждения вытекает из наследственности класса  $L_r^m$ .

Докажем достаточность. Пусть  $VG = C \cup S$  – полярное разбиение графа  $G$ ,  $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ . Поскольку  $C$  – максимальная клика и  $|C| = \varphi(G) \geq (rm - 1)r + 2 = mr^2 - (r - 1) + 1 \geq mr^2 - m(r - 1) + 1 = f(r, m)$ , то, в силу запрещенности графов  $R_k$ ,  $rm + 1 \leq k \leq f(r, m) - 1$ , имеем  $\deg(v) \leq rm$  для каждой вершины  $v$  из  $S$ . Согласно запрещенности  $K_{1, r+1}$ , имеем  $|N(u) \cap S| \leq r$  для каждой вершины  $u$  из  $C$ . Покажем, что на самом деле для каждой вершины  $u$  из  $C$  верно  $|N(u) \cap S| \leq r - 1$ . Пусть это не так. Допустим, не ограничивая общности, что вершина  $u$  из  $C$  смежна с вершинами  $v_1, \dots, v_r$  из  $S$ ,  $r \leq p$ . Так как  $\deg(v_i) \leq rm$  и  $u \in \bigcap_{i=1}^r N(v_i)$ , то

$$\left| \bigcup_{i=1}^r N(v_i) \right| \leq \sum_{i=1}^r (\deg(v_i) - 1) + 1 \leq (rm - 1)r + 1 < \varphi(G).$$

Следовательно, существует вершина  $u'$  из  $C$ , не смежная ни с одной из  $v_1, \dots, v_r$ . Но тогда  $G(u, u', v_1, \dots, v_r) \cong K_{1, r+1}$ , что невозможно.

Построим теперь  $m$ -ограниченное  $r$ -покрытие графа  $G$ . Поскольку  $\deg(v_i) \leq r m$  для любого  $i = 1, \dots, p$ , то существует разбиение  $N(v_i) = C_{i1} \cup \dots \cup C_{is_i}$ , где  $C_{ij} \cap C_{il} = \emptyset$ ,  $j, l \in \{1, \dots, s_i\}$ ,  $j \neq l$ ,  $|C_{ij}| \leq m$ ,  $s_i \leq r$ . Очевидно, что семейство клик  $(C_{ij} \cup \{v_i\} : i = \overline{1, p}, j = \overline{1, s_i})$  вместе с кликой  $C$  есть  $m$ -ограниченное  $r$ -покрытие графа  $G$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Существует конечный список  $F_2$  запрещенных порожденных подграфов такой, что расщепляемый граф  $G$  с плотностью  $\phi(G) \leq (mr - 1)r + 1$  принадлежит классу  $L_r^m$ , если и только если  $G$  не содержит порожденных подграфов из  $F_2$ .*

*Доказательство.* Пусть  $VG = C \cup S$  – полярное разбиение графа  $G$ . Занесем в список  $F_2$  граф  $K_{1, r+1}$ . В силу запрещенности  $K_{1, r+1}$ , имеем  $|N(u) \cap S| \leq r$  для любой вершины  $u$  из  $C$ . Следовательно,  $|G| = |C| + |S| \leq |C| + \sum_{u \in C} |N(u) \cap S| \leq ((r m - 1)r + 1)(r + 1)$ , т. е. порядок графа  $G$  ограничен константой, зависящей от  $r$  и  $m$ . Занесем в список  $F_2$  все не принадлежащие классу  $L_r^m$  расщепляемые графы  $H$  такие, что  $|H| \leq ((r m - 1)r + 1)(r + 1)$ . Очевидно, что построенный конечный список  $F_2$  является искомым. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение:

**Теорема 2.** *Существует конечный список  $F$  запрещенных порожденных подграфов такой, что расщепляемый граф  $G$  принадлежит классу  $L_r^m$ , если и только если  $G$  не содержит порожденных подграфов из  $F$ .*

*Доказательство.* В качестве искомого списка  $F$  можно взять объединение списков  $F_1$  и  $F_2$  из лемм 2 и 3. Теорема доказана.

### Литература

1. Hlineny P., Kratochvil J. Computational complexity of the Krausz dimension of graphs // Lecture Notes in Computer Sciences. № 1335. С. 214–228.
2. Левин А. Г., Тышкевич Р. И. Реберные гиперграфы // Дискретная математика. 1993. Т. 5. № 1. С. 112–129.
3. Метельский Ю. М. Расщепляемые реберные графы от гиперграфов ограниченного ранга // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 3. С. 117–122.
4. Berge C. Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. Amsterdam. 1989.

# ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАДЕЛАННОМ ПО КОНЦАМ ПЛОСКОМ КРИВОМ БРУСЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ МЕСТЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

С. С. Щербаков

Рассмотрим плоский кривой брус, представляющий собой арку радиуса  $R$ , концы которой заделаны в точках  $A$  и  $B$ , а радиальная  $P$  и касательная  $fP$  ( $f$  – коэффициент трения) нагрузки приложены в некоторой точке стержня, определяемой углом  $\varphi$  (рис. 1).

Система трижды статически неопределима, т.к. число неизвестных величин (реакций опор) на три единицы превышает число независимых уравнений статики, которые могут быть составлены для рассматриваемой модели.

Наиболее широко применимым в машиностроение общим методом раскрытия статической неопределенности упругой модели является метод сил [1, 2]. Он заключается в том, что заданная статически неопределенная модель освобождается от дополнительных внешних связей, а их действие заменяется активными силами. Величина активных сил в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на модель отброшенными связями.

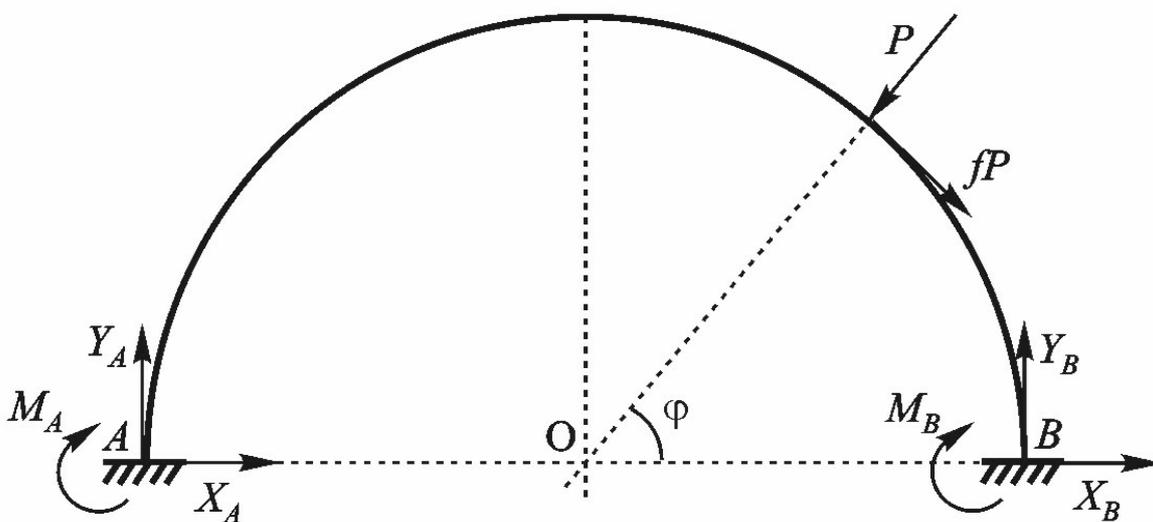


Рис. 1. Общий вид исследуемой модели

1. Шесть реакций опор  $X_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$ ,  $M_A$ ,  $M_B$  представлены на рис. 1.
2. Построим основную модель для исследуемого случая. Для этого заменим реакции  $X_B$ ,  $M_B$ ,  $M_A$  на активные нагрузки  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , соответствующим образом изменив закрепление бруса в точках  $A$  и  $B$  (рис. 2).

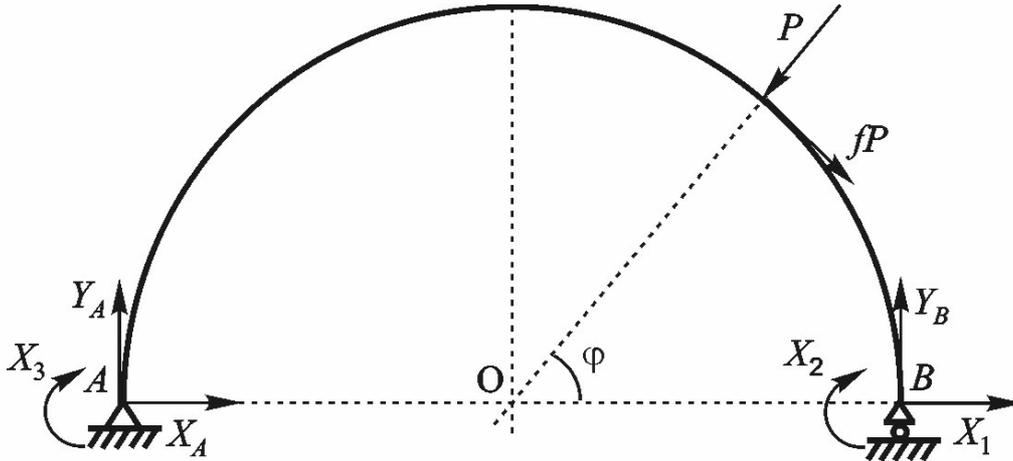


Рис. 2. Основная модель

Условия геометрической неизменяемости модели можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1P} = 0, \\ \delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2P} = 0, \\ \delta_3 &= \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3P} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\delta_1$  – перемещение точки  $B$  в направлении силы  $X_1$ , то есть горизонтальное перемещение шарнира,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  – изменения углов поворота балки по отношению к горизонтальной линии в точках  $B$  и  $A$  соответственно,  $\delta_{iP}$  ( $i=1,2,3$ ) – перемещение в направлении силы  $X_i$  под действием внешних нагрузок  $P$  и  $fP$ ,  $\delta_{ik}$  ( $i,k=1,2,3$ ) – взаимное смещение точек модели в направлении силы  $X_i$  под действием единичной нагрузки, приложенной в направлении  $X_k$ .

Для того чтобы получить значения  $\delta_{ij}$  и  $\delta_{iP}$  воспользуемся формулой Мора для упругих деформаций:

$$\delta_{ij} = \int_0^\pi \frac{M_i M_j}{EI} R d\psi, \quad \delta_{iP} = \int_0^\pi \frac{M_i M_P}{EI} R d\psi, \quad (2)$$

где  $M_i(\psi)$  – изгибающий момент в каждой точке балки при расчете, учитывая действие на модель лишь одной активной нагрузки – единичной силы, приложенной в направлении силы  $X_i$ ,  $M_P(\psi)$  – изгибающий момент в каждой точке балки, находящейся под действием активных сил  $P$  и  $fP$ ,  $\psi$  – координата точки в полярной системе координат, начало отсчета которой находится в точке  $O$ , нулевой угол соответствует горизонтальному направлению радиус-вектора  $OB$ .

Чтобы вычислить интегралы Мора необходимо определить значения изгибающих моментов  $M_i$  и  $M_P$ .

Решая уравнения равновесия для системы, одновременно нагруженной лишь одной единичной активной силой (при всех остальных активных силах равных нулю), получим выражения для  $M_i$ :

$$M_1 = X_1 R \sin \psi = R \sin \psi . \quad (3)$$

$$M_2 = Y_B R(1 - \cos \psi) + X_2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \psi), \quad (4)$$

$$M_3 = Y_B R(1 - \cos \psi) = -\frac{1}{2}(1 - \cos \psi), \quad (5)$$

Для изгибающего момента  $M_P$  получим:

$$M_P = Y_B R(1 - \cos \psi), \text{ при } 0 < \psi < \varphi, \quad (6)$$

$$M_P = Y_B R(1 - \cos \psi) - PR \sin(\psi - \varphi) - fPR(1 - \cos(\psi - \varphi)), \quad (7)$$

при  $\varphi < \psi < \pi$ .

Подставляя полученные выражения для моментов (3) – (7) в (2), после необходимых преобразований получим значения перемещений  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_{iP}$ :

$$\delta_{11} = \frac{1}{2} \frac{\pi R^3}{EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{R^2}{EI}, \quad \delta_{22} = \frac{3}{8} \frac{\pi R}{EI}, \quad \delta_{23} = \delta_{32} = -\frac{1}{8} \frac{\pi R}{EI}, \quad \delta_{33} = \frac{3}{8} \frac{\pi R}{EI},$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{R^2}{EI}, \quad \delta_{1P} = \frac{PR^3}{2EI} ((\pi - \varphi) \cos \varphi + (f\varphi - 1) \sin \varphi), \quad (8)$$

$$\delta_{2P} = \frac{PR^3}{8EI} (-4 - 3f\pi + 4f\varphi + (-4 + 3f\pi - 2f\varphi) \cos \varphi + (2f + 3\pi - 2\varphi) \sin \varphi),$$

$$\delta_{3P} = \frac{PR^3}{8EI} (-4 - f\pi + 4f\varphi + (-4 + f\pi + 2f\varphi) \cos \varphi + (-10f + \pi + 2\varphi) \sin \varphi).$$

Решив, учитывая (8), систему (1), найдем неизвестные активные силы  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ , и, следовательно, получим значения реакций опор  $X_B$ ,  $M_B$ ,  $M_A$ :

$$X_B = X_1, \quad M_B = X_2, \quad M_A = X_3. \quad (9)$$

Составим уравнения равновесия для исходной исследуемой модели и найдем другие три неизвестные реакции опор  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$ :

После определения реакций опор становится возможным расчет изгибающего момента  $M$ , продольного  $N$  и поперечного  $Q$  усилий в стержне:

$$M = \begin{cases} Y_B R(1 - \cos \psi) + X_B R \sin \psi + M_B, & \text{при } 0 < \psi < \varphi, \\ Y_B R(1 - \cos \psi) + X_B R \sin \psi - PR \sin(\psi - \varphi) - fPR(1 - \cos(\psi - \varphi)) + M_B, & \\ \text{при } \varphi < \psi < \pi, \end{cases}$$

$$N = \begin{cases} -Y_B \cos \psi + X_B \sin \psi, & \text{при } 0 < \psi < \varphi, \\ -Y_B \cos \psi + X_B \sin \psi - P \sin(\psi - \varphi) + fP \cos(\psi - \varphi), & \\ \text{при } \varphi < \psi < \pi, \end{cases} \quad (10)$$

$$Q = \begin{cases} Y_B \sin \psi + X_B \cos \psi, & \text{при } 0 < \psi < \varphi, \\ Y_B \sin \psi + X_B \cos \psi - P \cos(\psi - \varphi) - fP \sin(\psi - \varphi), & \text{при } \varphi < \psi < \pi, \end{cases}$$

Эпюры внутренних усилий представлены на рис. 3.

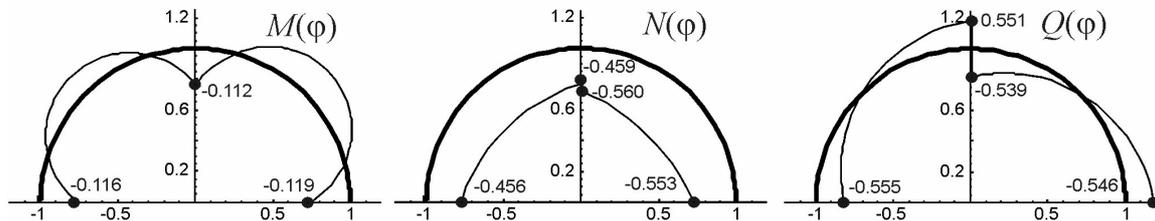


Рис. 3. Внутренние усилия в стержне при  $\varphi = \pi/2$ ,  $P=1$ ,  $R=1$  и  $f=0.05$

Для определения изгибных напряжений в кривом брус воспользуемся следующими формулами:

$$\sigma_{yy}^{(M)} = \frac{My}{eF(r_n - y)}, \quad \sigma_{yy}^{(N)} = \frac{N}{F}, \quad \sigma_{yz}^{(Q)} = \frac{QS_y(z)}{bJ_y}, \quad (11)$$

где  $e = R - r_n$ ,  $r_n$  – радиус нейтральной линии,  $R$  – радиус средней линии,  $F$  – площадь поперечного сечения бруса,  $J_y$  – момент инерции сечения бруса относительно его нейтральной линии,  $b=b(z)$  – ширина сечения на уровне, где определяют  $\sigma_{yz}^{(Q)}$ ,  $S_y(z)$  – абсолютная величина статического момента относительно нейтральной линии той части площади  $F(z)$ , которая заключена между линией, где определяют  $\sigma_{yz}^{(Q)}$ , и краем сечения.

Дальнейшее изучения силовых систем [3] производится на основе результатов полученных при исследовании данной модели.

### Литература

1. Пономарев С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении. Т.1. М., 1958.
2. Писаренко С. Г. Сопротивление материалов. К., 1986.
3. Журавков М. А., Щербаков С. С. Исследование опасных объемов при решении контактной задачи для системы ролик/кольцо. // Тр. 5-го Международного симпозиума по трибофатике. Иркутск, 2005. С. 375–390.

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ ДЛЯ ЗАПОЛНЕННЫХ И РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

**А. М. Дежурко, А. Е. Верхотуров**

При исследовании ряда физических проблем возникает необходимость решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности имеющих разреженную матрицу. На решение такой системы обычными методами может быть затрачено огромное количество времени. Для сокращения времени решения можно разработать специальный параллельный алгоритм, который, используя ресурсы мультипроцессорной системы, найдет необходимое решение достаточно быстро.

Метод сопряженных градиентов (МСГ) – это численный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Достоинством метода является быстрота работы при больших размерах матриц. Метод сопряженных градиентов – это методом первого порядка, в то же время скорость его сходимости квадратичная. Этим он выгодно отличается от обычных градиентных методов. При применении метода сопряженных градиентов огромное время занимают такие подзадачи как перемножение матрицы на вектор, умножение вектора на число, сложение векторов. Эти задачи можно выполнять параллельно, используя многопроцессорные системы. Основной целью данной научной работы и является поиск наилучшего способа распределения вычислений между процессами.

МСГ применяется к СЛАУ:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  ;  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in R^n$  с симметрической положительно-определенной  $[n \times n]$  – матрицей. Решение ищется в виде  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$  ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\alpha_k$  – параметр,  $\mathbf{p}_k$  – вектор сопряженного градиента,  $k$  – номер итерации. Причем, число итераций, необходимое для вычисления точного решения в отсутствие ошибок округления, известно и равно  $N$  – размерности системы [1–3].

Метод сопряженных градиентов хорошо распараллеливается с помощью слоистого распределения данных. Каждый процесс получает свою часть матрицы  $A$  и вычисляет свою часть вектора  $x$ . Так же для работы алгоритма необходимо обеспечить обмен данными между процессами. Очевидно, что чем более равномерно будут распределены вычисления и чем меньше будет объем пересылок, тем лучше будет параллельный алгоритм.

Описанный выше алгоритм был реализован на языке C++ в стандарте MPI. Результаты тестирования алгоритма для матриц различного размера приведены ниже, на *рис. 1*.

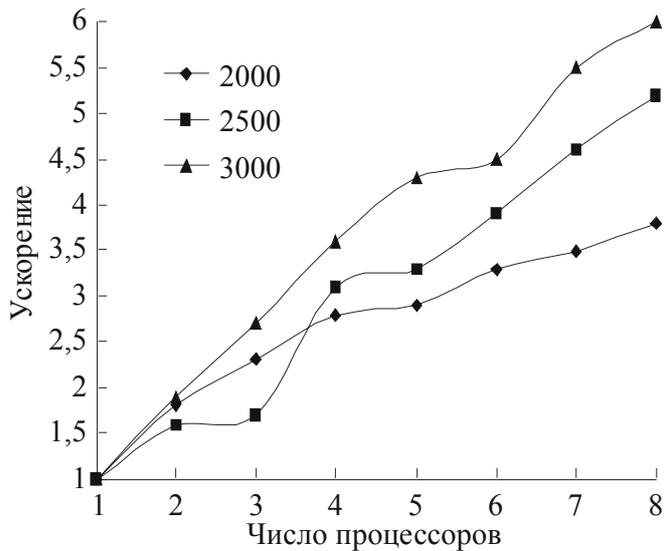


Рис. 1. Зависимость ускорения алгоритма от числа процессоров

Довольно часто на практике в ряде конкретных физических задач возникает необходимость решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицей специального вида. Одним из наиболее распространенных видов таких матриц является симметричная пятидиагональная матрица.

При решении СЛАУ с такой матрицей обычным методом сопряженных градиентов, много времени будет затрачено впустую на операции с нулевыми элементами.

Таким образом, для уменьшения времени решения СЛАУ следует разработать специальный МСГ. Новый параллельный алгоритм МСГ должен в первую очередь выполнять меньшее количество вычислений, а во вторую очередь у него должен сократиться объем пересылок.

Основной объем вычислений в МСГ занимает произведение матрицы СЛАУ на вектор сопряженного градиента. Для написания алгоритма расчета такого произведения для разреженной матрицы, прибегнем к небольшой хитрости, продлив диагонали b, c, d, e и вектор сопряженного градиента p, как это показано на рис. 2.

Дополнительные элементы диагоналей и вектора p заполним нулями. Тогда формулу для расчета произведения матрицы на вектор сопряженного градиента для любого процесса можно записать в следующем простом виде:

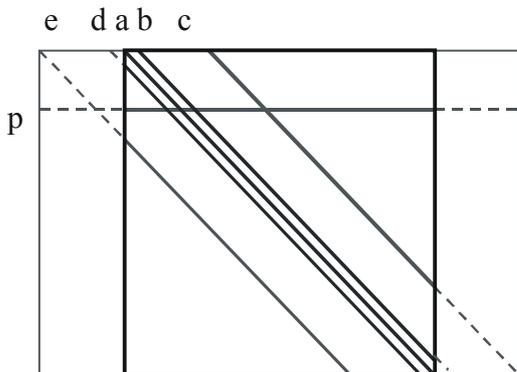


Рис. 2. Схема расчета произведения  $A \cdot p$  для пятидиагональной матрицы

$$A\_p[i]=p[i+a\_D]*a[i]+p[i+b\_D]*b[i]+p[i+c\_D]*c[i]+p[i+d\_D]*d[i]+p[i+e\_D]*e[i],$$

где  $a\_D, b\_D, c\_D, d\_D, e\_D$  некоторые смещения относительно начала вектора p, характерные для каждого процесса.

Основной целью уменьшения пересылок алгоритма является уменьшение пересылок векторов сопряженных градиентов, так как остальные пересылки по сравнению с этой

незначительны. Будем рассматривать класс матриц, ненулевые элементы которых сосредоточены в довольно узкой полосе около главной диагонали. Тогда, каждому процессу понадобится не весь вектор сопряженного градиента, а только его часть. Для каждого про-

Таблица

Анализ времени выполнения МСГ для разреженных матриц

Размер матрицы	Время, с (МСГ)	Время, с (МСГ_РМ)	(МСГ)/(МСГ_РМ)
100×100	0,008	0,0047	1,70
500×500	0,4	0,006	66,67
1000×1000	1,72	0,007	245,71
2000×2000	7,2	0,01	720,00
3000×3000	22,7	0,022	1031,82

цесса следует рассчитать массивы распределения, которые будут показывать, какую часть вектора сопряженного градиента нужно послать каждому из процессов. Далее с помощью операций коллективного обмена и этих массивов легко организовать пересылку необходимых данных.

Для оценки временных характеристик алгоритма был проведен сравнительный анализ времени решения СЛАУ для МСГ и МСГ для разреженных матриц. Результаты анализа отражены в таблице.

На рис. 3 отображена зависимость ускорения алгоритма от числа процессоров.

Таким образом, был разработан и реализован параллельный алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом сопряженных градиентов для заполненных и разреженных матриц. Данный алгоритм показал хорошие результаты при тестировании. Применение параллельного алгоритма МСГ может существенно сократить время решения громоздких задач, заключающих в себе большие СЛАУ.

### Литература

1. Шпаковский Г. И., Верхотуров А. Е., Стрикелев Д. А. Организации эффективных вычислений на локальных сетях в стандарте MPI. Пособие Мн.: БГУ, 2004.–180 с.
2. Мулярчик С. Г. Численные методы : Конспект лекций. Мн., БГУ, 2001.–127~с.
3. Шпаковский Г. И., Серикова Н. В. Программирование для многопроцессорных систем в стандарте MPI. Пособие Мн.: БГУ, 2002.–323 с. Интернет адрес: <http://www.parallel.ru>

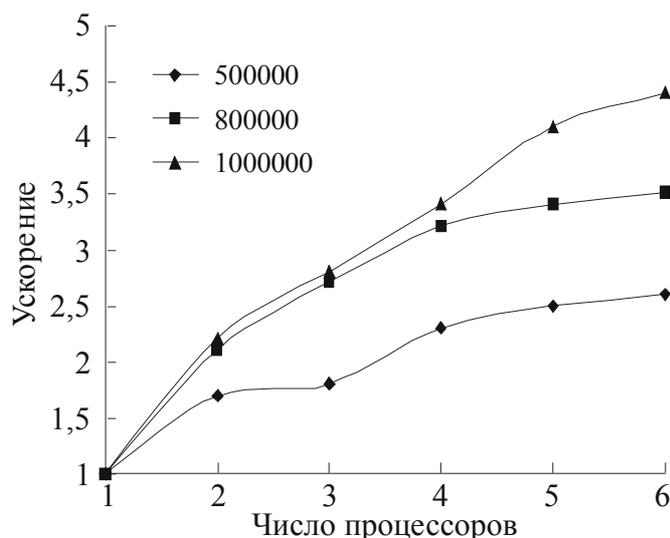


Рис. 3 Зависимость ускорения алгоритма от числа процессоров

# ОБНАРУЖЕНИЕ ПАТОЛОГИЙ ГОЛОСОВОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ АВТОМАТИЧЕСКОГО РАСПОЗНАВАНИЯ ДИКТОРОВ

С. В. Демидчик

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует достаточно большое количество профессиональных методов диагностики и выявления различных заболеваний и патологий голосового аппарата (ларингоскопия, стробоскопия и др.). Однако данным методам присущ ряд определенных недостатков. В связи с этим в последнее время стали интенсивно развиваться неинвазивные методы диагностики речевых заболеваний, основным из которых является акустический анализ. Данный метод обладает рядом преимуществ, которые дают возможности для его широкого применения. Среди преимуществ данного средства диагностики заболеваний следует отметить достаточно высокую скорость проведения обследования, а также отсутствие какого-либо дискомфорта для пациента, поскольку в данном случае анализируется лишь записанный речевой сигнал, произнесенный человеком.

## 2. ОБЩАЯ СХЕМА СИСТЕМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ БОЛЕЗНЕЙ

Как было показано в [1], из всего многообразия звуков наилучшим индикатором состояния голосового аппарата являются ударные гласные фонемы. Поэтому предложенная схема системы обнаружения патологий основана на анализе отдельно взятых гласных звуков. На *рис.1* приведена общая структура предложенной системы.

*Этап 1:* получение векторов-признаков на основе мел-кепстральных

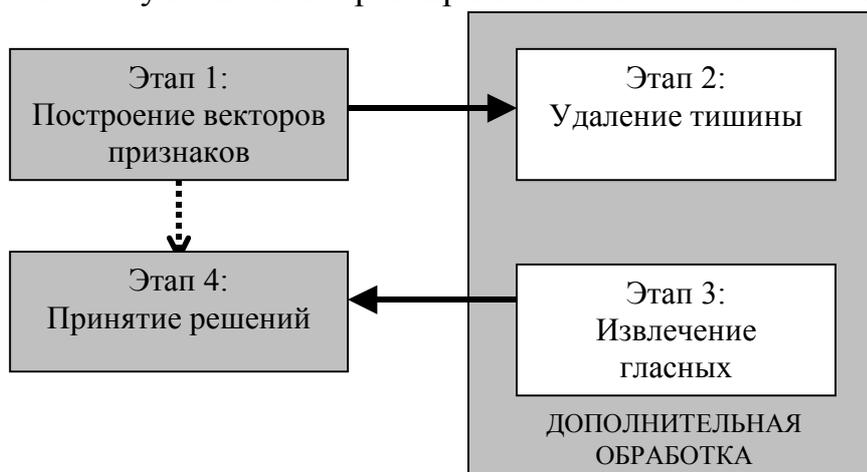


Рис.1. Структурная схема системы классификации

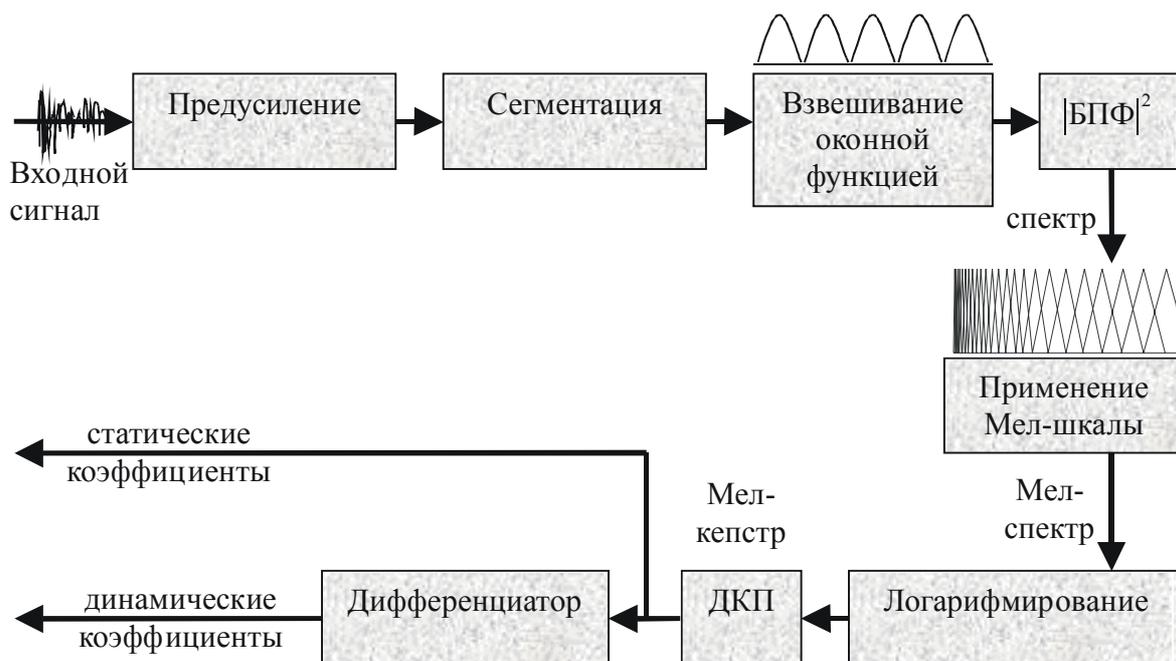


Рис.2.Схема получения мел-кепстральных коэффициентов [2]. Существует несколько методов получения мел-кепстральных коэффициентов. На рис. 2 приведены основные шаги, необходимые для их получения.

На основе данного алгоритма были получены векторы признаков, состоящие из 12 (MFCC12) и 24 (MFCC24) мел-кепстральных коэффициентов, а также векторы признаков, включающие значение энергии сигнала (MFCC+E).

*Этап 2:* на данном шаге из сигнала удалялись фреймы с тишиной. Определение фреймов с тишиной производилось при помощи сравнения порога ( $T_{TFE}$ ) и общей энергии фрагмента.  $T_{TFE}$  вычисляется адаптивно, чтобы учесть эффект естественного изменения громкости. В начале для всего аудио-фрагмента вычисляются минимальное ( $E_{min}$ ), максимальное ( $E_{max}$ ), и среднее ( $E_{\mu}$ ) значения энергии. Затем проверяются 2 условия:

1.  $E_{max} >$  минимального уровня энергии текущего фрейма;
2.  $E_{max} \gg E_{min}$ .

Если условия не выполняются, то считается, что фрагмент содержит только тишину и дальнейшая обработка прекращается. Иначе вычисляется  $T_{TFE}$ :

$$T_{TFE} = E_{min} + \lambda_s \psi(E_m - E_{min}) \quad (1)$$

где  $0 < \lambda_s \leq 1$ .  $\lambda_s$  – коэффициент тишины, который определяет пороговое значение между  $E_{min}$  и  $E_{\mu}$ , соответствующее тишине. Если общая энергия

фрагмента меньше  $T_{TFE}$ , то он классифицируется как тишина, иначе – как не-тишина.

*Этап 3:* поскольку гласные звуки являются хорошим индикатором состояния голосовых связок, на данном этапе производилось извлечение только гласных звуков из аудиосигнала. Их извлечению производилось путем оценки наибольшего значения энергии частотного диапазона (dominant band energy ratio – DBER) и оценки основной частоты [3]. Гласные звуки представляют собой последовательность гармонических тонов и их спектральная энергия достаточно сильно локализована. В согласных же звуках, в основном, преобладают шумовые компоненты, вследствие чего их спектральная энергия значительно рассеивается по частотному диапазону.

*Этап 4:* используя обработанные на предыдущих этапах данные, классификатор на основе статистик второго порядка [4] распределяет входные данные по трем классам: класс здоровых голосов, класс голосов с патологиями и неопределенный класс. В неопределенный класс попадали те записи, которые классификатор не смог отнести к первым двум классам.

Классификатор предварительно проходил процедуру обучения. Все записи произвольным образом были разбиты на два набора: обучающий набор и тестовый набор. Обучающий набор (1/3 всех записей) использовался для создания базы данных моделей здоровых голосов и голосов с патологиями. После обучения на классификатор подавались записи из тестового набора. С помощью различных мер расстояний классификатор принимал решение о принадлежности входной записи к одному из вышеупомянутых классов. Для каждого вида меры расстояния и типа вектора признаков эксперимент повторялся 20 раз. Файлы из базы случайным образом разбивались на эталонное и тестовое множества в пропорции 1:2.

### 3. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для проведения эксперимента совместно с фониатрами Республиканского центра патологий слуха голоса и речи была создана база записей речевых сигналов, где каждой записи сопоставлен диагноз врача-фониатра. В настоящее время база насчитывает свыше 300 записей общей длительностью более 20 часов.

В таблице приведены значения полученной точности классификации для различных мер подобия  $d_i$  [4], которые применялись в качестве классификатора при исключении блоков предварительной обработки сигнала (Этапы 2 и 3, *рис. 1*).

Таблица 1

**Зависимость точности  
классификации от типа  
векторов признаков**

Мера по- добия	Величина ошибки, %		
	MFCC12	MFCC+E	MFCC24
<b>d1</b>	23	32	24
<b>d2</b>	16	28	17
<b>d3</b>	24	41	22
<b>d4</b>	41	53	39
<b>d11</b>	22	31	21
<b>d12</b>	46	55	45
<b>d14</b>	34	43	35
<b>d15</b>	11	23	12
<b>d16</b>	41	54	42
<b>d17</b>	25	36	26
<b>d19</b>	21	32	22
<b>d23</b>	19	29	18

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного эксперимента была продемонстрирована возможность создания системы автоматического обнаружения патологий голосового аппарата. Были определены оптимальные параметры работы классификатора на основе статистик второго порядка. Получено значение точности классификации порядка 89% для предварительно необработанных фрагментов речи. При включении блока дополнительной обработки (Этапы 2 и 3, *рис. 1*) была достигнута точность 99% для некоторых случаев тяжелых патологий.

#### Литература

1. Демидчик С. В. Обработка биомедицинских сигналов для задач диагностики патологий речевого аппарата // Сб. работ 62 научн. конференции студентов и магистрантов БГУ, Ч.1, Минск, 2005, с. 122–126
2. Godino-Llorente J. I., Gomez-Vilda P. Automatic Detection of Voice Impairments by Means of Short-Term Cepstral Parameters and Neural Network Based Detectors // IEEE Trans. Biomedical Engineering, 51(2), 2004, 380–384.
3. Kiranyaz S., Aubazac M., Gabbouj M. Unsupervised Segmentation and Classification over MP3 and AAC Audio Bit-streams // WIAMIS Workshop, 338-345, London, 2003.
4. Bimbot F., Magrin-Chagnolleau I., Mathan L. Second Order Statistical Measures for Text Independent Speaker Identification // Speech Communication, 17:177–192, 1995.

## ВЛИЯНИЕ НИЗКОИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ТЕМПЕРАТУРУ ОБЛУЧАЕМОЙ ТКАНИ

**Т. А. Железнякова**

### ВВЕДЕНИЕ

Повышение эффективности лечения заболеваний кожи является важной задачей дерматологии. Одним из путей ее решения является разработка новых или совершенствование известных способов взамен традиционным (инъекции с помощью шприца, таблетки и микстуры, мази, компрессы и аппликации, лекарственный электро- и фонофорез).

Одним из перспективных методов является лекарственный лазерофорез (ЛЛФ), суть которого заключается в сочетанном воздействии на ор-

организм низкоинтенсивного лазерного излучения (НИЛИ) и лекарственного препарата. При проведении ЛЛФ лазерное излучение выступает и как самостоятельный лечебный фактор, и как средство для усиления эффективности лекарственной терапии. Биологические эффекты в живых тканях при воздействии НИЛИ в области длин волн 630...1300 нм проявляются [1]:

- в изменении мембранного потенциала клетки и рН межклеточной жидкости;
- в ускорении процессов метаболизма;
- в стимулировании регенеративного процесса в клетках;
- в усилении регионального кровотока и активизации обмена внутритканевой жидкости;
- в увеличении болевого порога восприятия нервных окончаний;
- в нормализации состояния иммунной системы.

Такое сочетание воздействий делает возможным снизить дозировку применяемого лекарственного препарата и сократить сроки лечения [1]. Кроме того, преимуществами НИЛИ являются безвредность, бесконтактность и минимальное фотохимическое воздействие на лекарственные соединения.

### **ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ОБЛУЧАЕМОЙ ОБЛАСТИ**

В экспериментах по исследованию влияния НИЛИ на проницаемость гидрофильной мембраны, которая моделирует кожный покров человека, для лекарственных препаратов было показано, что НИЛИ с длиной волны  $\lambda=0,78$  мкм (полупроводниковый лазер) более эффективно, чем НИЛИ с длиной волны  $\lambda=0,633$  мкм (He-Ne лазер) [2]. Однако в этом эксперименте отражалось действие лазерного излучения только на плотность структуры модельной мембраны.

Цель работы – математическое моделирование поглощения НИЛИ кожей и определение изменения перфузии (объем крови в мл на 100 г ткани в единицу времени) кожи при изменении ее температуры без учета теплообмена между организмом и окружающей средой.

При воздействии лазерного излучения на вещество поглощенная световая энергия преобразуется в энергию равновесного хаотического движения атомов и молекул. Выделение оптической энергии происходит неоднородно по объему взаимодействия, что приводит к пространственно неоднородному нагреву вещества и вызывает процессы теплопереноса между различными участками среды.

Для описания нагрева вещества справедливо линейное неоднородное уравнение параболического типа (неоднородное уравнение Фурье):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\chi \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c} Q,$$

где  $T$  – температура тела,  $\chi = \kappa / \rho c$  – температуропроводность (одинакова для большинства тканей и составляет примерно  $2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{с}$ ),  $\rho$  – плотность вещества,  $c$  – удельная теплоемкость,  $\kappa$  – теплопроводность,  $Q$  – удельная скорость теплообразования. При решении нашей задачи предполагаем, что изменение температуры тканей невелико и можно пренебречь температурной зависимостью величин  $\rho$ ,  $c$ ,  $\kappa$ ,  $Q$ .

Поскольку уравнение Фурье линейно, то оно справедливо и для приращения температуры тела  $dT = T - T_0$ , где  $T_0$  – температура тела в отсутствие оптического воздействия. У человека в норме температура тела поддерживается на уровне порядка  $37^\circ\text{C}$ . Физиологический предел колебаний не превышает  $1,5^\circ\text{C}$ . Изменение температуры крови и внутренних органов на  $2\text{--}2,5^\circ\text{C}$  от нормальных значений приводит к нарушению жизнедеятельности организма [3]. Терморегуляция в коже осуществляется за счет процессов испарения, конвекции, излучения и за счет увеличения перфузии крови в поверхностных слоях кожи. Кровообращение выравнивает температурные градиенты.

Физическая модель кожи представляет собой многослойную структуру, каждый слой которой имеет свои теплофизические и оптические параметры, значения некоторых из них представлены в таблице [3, 4]. Рассмотрим поглощение излучения в дерме, пронизанной капиллярами. Потери энергии на рассеяние и поглощение энергии в эпидермисе учтем в коэффициенте отражения.

При расчете были использованы следующие данные: температуропроводность тканей  $\chi = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{с}$ ; плотность ткани  $\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ; удельная теплоемкость ткани  $c = 3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$  соответственно; начальная мощность в центре коллимированного пучка.

Таблица

**Теплофизические и оптические параметры слоев кожи  
(для  $\lambda = 633 \text{ нм}$  над чертой и  $\lambda = 778 \text{ нм}$  под чертой)**

Вид ткани	Коэффициент поглощения $\alpha_a, (\text{см}^{-1})$	Коэффициент рассеяния $\alpha_s, (\text{см}^{-1})$	Параметр рассеяния $g$	Толщина слоя $d, (\text{см})$
Дерма	2,0	187,5	0,82	0,06
	1,7	175	0,87	
Капиллярное сплетение	2,5	400	0,98	0,01
	4,5	580	0,992	

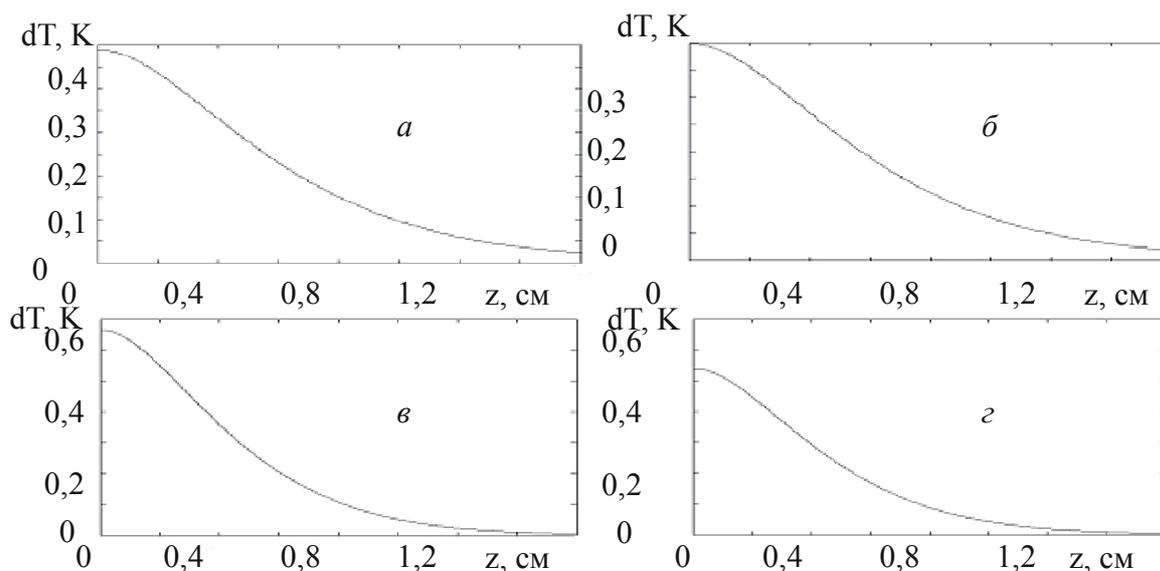


Рис.1. Изменение температуры среды в зависимости от расстояния до поверхности кожи  $z$  и расстояния до оси пучка излучения  $r$ :  
 $a, б$  –  $\lambda=0,633$  мкм для  $r=50$  мкм и  $r=5$  мм соответственно;  
 $в, г$  –  $\lambda=0,78$  мкм для  $r=50$  мкм и  $r=5$  мм соответственно

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Проведение численного эксперимента показало, что под действием лазерного излучения терапевтической мощности изменение температуры  $dT$  прямо пропорционально мощности облучения и достигает 0,45 К на глубине 2 мм под действием излучения с интенсивностью 20 мВт/см<sup>2</sup> с  $\lambda=0,633$  мкм в течение 20 минут (см. рис.1), а под действием излучения с  $\lambda=0,78$  мкм при тех же условиях изменение температуры достигает 0,6 К. В аналогичных исследованиях для излучения с интенсивностью 100 мВт/см<sup>2</sup> максимальное изменение температуры составило 2,5 К. Как уже отмечалось выше, такое изменение температуры приводит к нарушению процессов жизнедеятельности клеток [3], поэтому нужно либо сократить время проведения процедуры, либо уменьшить интенсивность излучения. Показано, что действие лазерного излучения с интенсивностью 60 мВт/см<sup>2</sup> является оптимальным для проведения облучения кожи с целью увеличения кровотока при условии, что время процедуры ЛЛФ будет не более 20 мин.

## ВЫВОДЫ

Для проведения процедуры ЛЛФ рекомендовано использование излучения с длиной волны с  $\lambda=0,78$  мкм интенсивностью до 60 мВт/см<sup>2</sup> при условии, что время проведения процедуры не более 20 мин.

## Литература

1. *Корепанов В. И., Федоров С. М., Шульга В. А.* Применение низкоинтенсивного лазерного излучения в дерматологии. Рос. мед. акад. последиплом. образования, Центр. кож.-вен. ин-т. М. 1996. 54 с.
2. *Лисенкова А. М., Железнякова Т. А., Сенчук В. В.* Экспериментальное исследование эффективности лазерного метода регуляции транспорта антибиотиков через модель кожного покрова // Спектральные приборы для аналитических применений. Перспективные разработки. Под. ред. Воропая Е. С. Мн.: БГУ, 2005. С. 174–192.
3. *Тучин В. В.* Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. Саратов. 1998. 384 с.
4. *Сетейкин А. Ю., Гершевич М. М., Еришов И. А.* Моделирование процессов взаимодействия низкоинтенсивных лазерных пучков с многослойными рассеивающими биоматериалами // ЖТФ. 2002. Т. 72. вып. 1. С. 100–104.

## СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ДЛИНОЙ ВОЛНЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ДВУХВОЛНОВОГО ЛАЗЕРА

**И. Н. Карчевская**

Создание полупроводниковых лазерных диодов на основе асимметричной квантоворазмерной гетероструктуры, обеспечивающих генерацию излучения на двух различных оптических длинах волн, позволило разработать структуры квантоворазмерных гетеролазеров, способных излучать оптические сигналы на двух или трех длинах волн одновременно со стабильной амплитудой и частотой повторения в гигагерцовом диапазоне. Появление таких лазеров дает широкие возможности для создания высокоэффективных двухволновых лазерных измерительных и диагностических систем нового типа, обеспечивающих большую точность измерений по сравнению с аналогичными одноволновыми лазерными структурами. Метрологические характеристики систем на основе двухволновых лазеров в значительной степени определяются точностью задания и возможностью перестройки длин волн лазерного излучения, поэтому разработка методов управления и стабилизации длины волны излучения двухволновых инжекционных лазеров является важной и актуальной проблемой.

Обеспечение стабильности и надежности работы полупроводникового лазера предполагает повышение временной когерентности, которое возможно путем подавления частотного шума и уменьшения ширины линии излучения. Частоту генерации лазера можно регулировать, подстраивая соответствующим образом ток и температуру. При этом отклик частоты лазера на изменения тока оказывается более широкополосным, чем отклик на изменения температуры. В установке, предназначенной для подавления частотного шума путем регулировки тока, для стабилизации

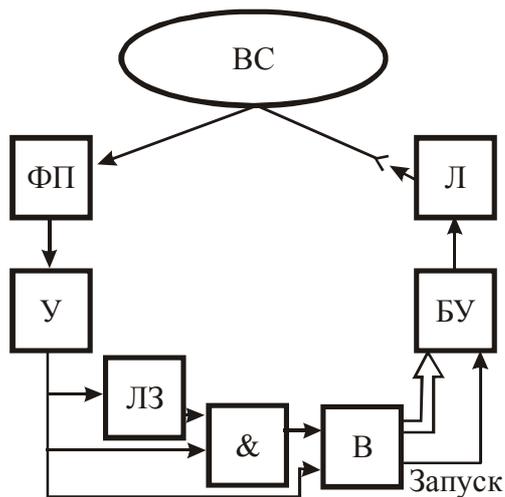


Рис.1. Функциональная схема системы измерения длины волны излучения полупроводникового инжекционного лазера

нового инжекционного лазера. Система содержит источник лазерного излучения Л, блок управления длиной волны излучения лазера БУ, дисперсионный волоконный световод ВС, фотоприемник ФП, усилитель У, вычислительный блок В, элемент «И» &, линию задержки ЛЗ. В качестве дисперсионного элемента используется волоконно-оптический световод.

Время распространения оптического излучения в световоде будет зависеть от длины волны излучения. Блок управления длиной волны излучения БУ формирует импульсы тока  $I_1$  и  $I_2$  для запуска лазера на длинах волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . При замкнутой петле оптической обратной связи в системе устанавливается процесс рециркуляции одновременно на двух оптических длинах волн, период  $\tau$  которой определяется оптической задержкой излучения в световоде при постоянной электрической задержке в блоках системы. Разность оптических задержек за один период рециркуляции равняется

$$\Delta t = \frac{L}{c}(n_1 - n_2), \quad (1)$$

где  $L$  – длина световода,  $c$  – скорость света в вакууме,  $n_1, n_2$  – коэффициенты преломления излучения в световоде на длинах волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Измеряя частоту (период) рециркуляции на первой длине волны определяется ее коэффициент преломления в световоде, а, следовательно, и длина волны излучения. Измеряя разность частот рециркуляции на первой и второй длинах волн, определяется вторая длина волны излучения. Перестройка и управление длиной волны осуществляется путем изменения тока инжекции лазера. Длину волоконного световода  $L$  следует выбирать таким

частоты используют отрицательную обратную связь, чтобы удерживать частоту вблизи необходимого эталонного значения [1].

Для решения задачи измерения и управления длиной волны лазерного излучения предлагается система, в которой реализуется режим оптико-электронной рециркуляции одновременно на двух оптических длинах волн [2]. На рис.1 представлена функциональная схема системы измерения длины волны излучения двухвол-

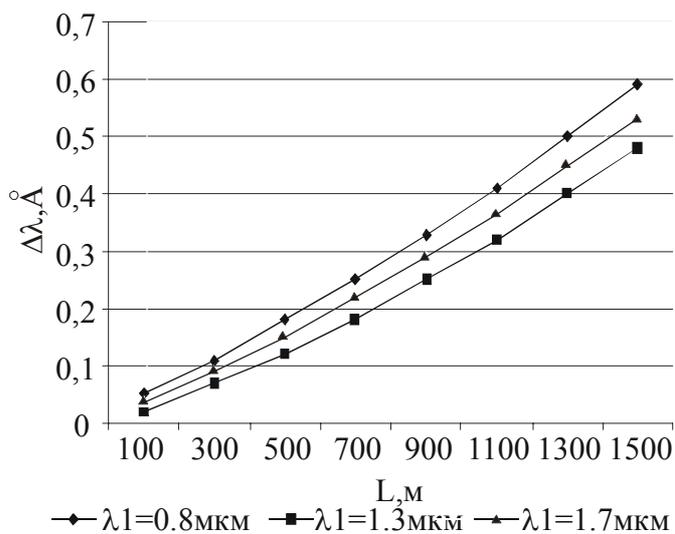


Рис. 2. Зависимость чувствительности изменения  $\delta\lambda$  от длины оптоволокна  $L$  для оптоволокна из  $\text{SiO}_2$

и управления длинами волн излучения двухволнового полупроводникового лазера для различных видов оптоволокна и световодов различной длины в диапазоне длин волн от 0,6 мкм до 1,7 мкм. На рис. 2 представлена зависимость разрешения системы  $\delta\lambda$  от длины волокна для волокна, изготовленного из оксида кремния. Результат показал, что чувствительность измерения одной из длин волн тем выше, чем меньше длина оптоволокна.

На рис. 3 показана зависимость разрешения системы  $\delta\lambda$  от длины волны излучения лазера для световода из 9,1% $\text{GeO}_2$ , 7,7% $\text{B}_2\text{O}_3$ , 83,2% $\text{SiO}_2$ . Как видно из графика при длине оптоволокна 100 метров чувствительность изменяется от 0,04 Å до 0,02 Å, а при  $L=200\text{м}$  чувствительность находится в пределах 0,09 – 0,04 Å. Данные графики в общем повторяют зависи-

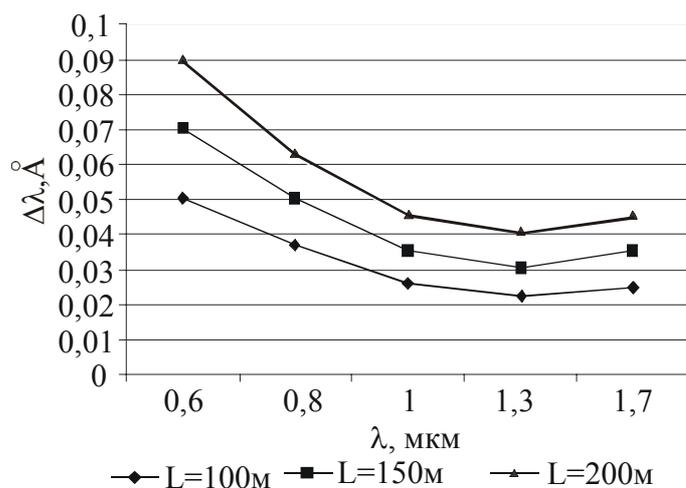


Рис. 3. Зависимость чувствительности измерения  $\delta\lambda$  от  $\lambda$  для различных длин оптоволокна  $L$

образом, чтобы время задержки в нем оптического излучения было больше времени электрической задержки в функциональных блоках системы. Диапазон рабочих длин волн  $\Delta\lambda$  определяется спектром пропускания волоконно-оптического световода и полосой приемника излучения.

Было выполнено математическое моделирование работы системы изме-

мости изменения дисперсии от длины волны.

На рис. 4 представлена зависимость изменения числа периодов рециркуляции от изменения одной из длин волн излучения двухволнового лазера. Для оптоволокна, изготовленного из оксида кремния на длинах волн 1,3 мкм при изменении длины одной из

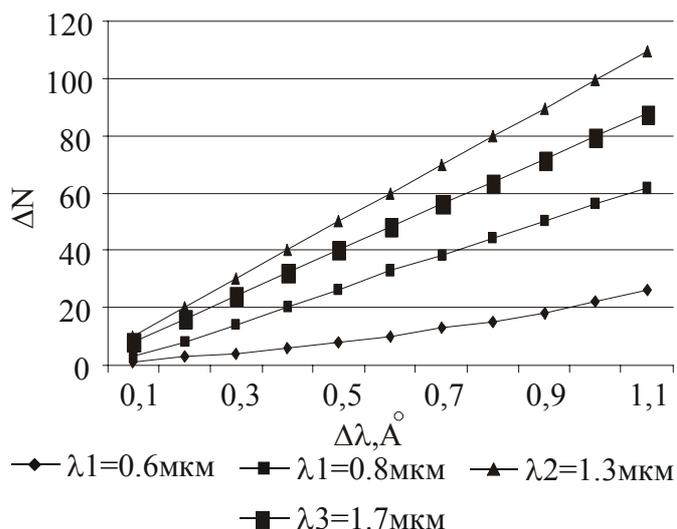


Рис. 4. Зависимость числа периодов рециркуляции от изменения  $\lambda_1 - \lambda_2$  для различных длин волн в оптоволокне из  $\text{SiO}_2$

волн на  $0,1 \text{ Å}$  количество периодов рециркуляции изменяется на 10 периодов.

Таким образом, по результатам математического моделирования работы системы можно сделать вывод, что наилучшая чувствительность наблюдается на длине волны  $1,3 \text{ мкм}$ . При длине оптоволокна  $100 \text{ метров}$  система чувствительна к изменению длины волны излучения одного из лазеров на  $0,02 \text{ Å}$ , а с увеличением длины оптического волокна

до двухсот метров чувствительность ухудшается до  $0,04 \text{ Å}$ .

Таким образом, реализация режима оптико-электронной рециркуляции одновременно на двух оптических длинах волн позволяет одновременно измерять обе длины волны излучения и управлять каждой длиной волны генерации двухволнового лазера, а результаты математического моделирования показывают высокую эффективность и высокие точностные характеристики системы.

### Литература

1. Физика полупроводниковых лазеров: пер. с японск./ Под ред. Х. Такумы. – М.: Мир, 1989. – 310с., ил.
2. Патент РФ №4388 Устройство измерения длины волны когерентного оптического излучения / В.Л. Козлов, С.И. Чубаров. Оpubл 22.11.2001.

## АНАЛИЗ ИНЖЕКЦИОННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ В КВАНТОВОКАСКАДНЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ

Д. В. Квартальный

### ВВЕДЕНИЕ

Захват носителей в квантовые ямы из нелокализованных состояний (состояний непрерывного спектра) может быть обусловлен двумя механизмами. Первый – это захват носителя в результате испускания им оптического фотона и перехода на один из уровней ямы [1]. Такой вид захвата характерен для случая, когда энергетический зазор между свобод-

ным состоянием носителя над ямой и ближайшим уровнем энергии в квантовой яме больше энергии оптического фонона. В случае же, если энергетический зазор меньше энергии оптического фонона, а также при высоких концентрациях носителей заряда существенную роль играет межчастичное электрон-электронное (е-е) рассеяние [2–5].

Данная работа представляет собой результат исследования процесса захвата носителей в полупроводниковые квантовые ямы при кулоновском электрон-электронном взаимодействии. Целью работы являлось получение оценки для скорости переходов электронов из свободного состояния над ямой на уровни энергии в самой яме.

## РАСЧЕТ СКОРОСТИ ПАРНОГО ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННОГО РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим захват носителей из состояний над ямой на уровни прямоугольной полупроводниковой ямы. Из-за ортогональности волновых функций волновую функцию наиболее низко расположенных энергетических состояний над ямой с двумя подзонами можно приближенно считать подобной волновой функции третьей подзоны более глубокой ямы. Для данной модели применима теория межподзонного электрон-электронного рассеяния в полупроводниковых квантовых ямах.

Теория межчастичного рассеяния дает аналитическую формулу для полного темпа  $\alpha$ - $\beta$ -рассеяния в борновском приближении. В используемой в [6] модели частица  $\alpha$  с двумерным волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  находится в энергетической подзоне  $i$ , а частица  $\beta$  с волновым вектором  $\mathbf{k}_2$  — в подзоне  $j$  ( $\alpha, \beta \in \{e, h\}$ ). В результате кулоновского взаимодействия частица  $\alpha$  рассеивается в подзону  $f$  с волновым вектором  $\mathbf{k}_1'$ , а частица  $\beta$  — в подзону  $m$  с волновым вектором  $\mathbf{k}_2'$ . В итоге скорость рассеяния при кулоновском взаимодействии частиц запишется как:

$$R_{ijfm}^{\alpha\beta} = \frac{2\pi R_y}{\hbar} \frac{2m_r}{m_0 \varepsilon^2} \int \left\{ \int_0^{2\pi} \eta \frac{|F_{ijfm}^{\alpha\beta}(q)|^2}{q^2} d\theta \right\} f_i^\alpha(\mathbf{k}_1) f_j^\beta(\mathbf{k}_2) \frac{2d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{2d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^2}, \quad (1)$$

где  $f(\mathbf{k})$  — функция распределения носителей по состояниям;  $E$  — энергия частицы;  $q$  — модуль переданного первой частице  $\alpha$  импульса  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_1$ ;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды;  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{g}'$ ;  $R_y \approx 13.6$  эВ — ридберговская энергия;

$$q^2 = \left( g_0^2 + 2g^2 - 2g\sqrt{g_0^2 + g^2} \cos\theta \right) / 4; \quad g_0^2 = 8m_r E_S^{\alpha\beta} / \hbar^2; \quad \mathbf{g} = 2m_r \left( \frac{\mathbf{k}_1}{m_\alpha} - \frac{\mathbf{k}_2}{m_\beta} \right),$$

$$\mathbf{g}' = 2m_r \left( \frac{\mathbf{k}}{m_{\alpha 1}} - \frac{\mathbf{k}}{m_{\beta 2}} \right) = 2\mathbf{k}' - 2m_r \left( \frac{\mathbf{k}_1}{m_{\beta}} + \frac{\mathbf{k}_2}{m_{\beta}} \right); \quad m_r = m_{\alpha}m_{\beta}/(m_{\alpha} + m_{\beta}) - \text{приве-}$$

денная масса двух частиц;  $m_{\alpha}$ ,  $m_{\beta}$  — эффективные массы частиц; коэффициент  $\eta$  для е-е-рассеяния равен 1/4.

Форм-фактор  $F_{ijfm}^{\alpha\beta}(q)$ , определяющий степень перекрытия огибающих волновых функций  $\varphi_n(z)$ , согласно [2]:

$$F_{ijfm}^{\alpha\beta}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_f^{\alpha}(z_1) \varphi_m^{\beta}(z_2) e^{-q|z_1-z_2|} \varphi_i^{\alpha}(z_1) \varphi_j^{\beta}(z_2) dz_1 dz_2, \quad \alpha, \beta \in \{e, h\}. \quad (2)$$

Отметим, что носители заряда в квазиравновесном состоянии в основном сосредоточены у дна своей энергетической подзоны с кинетической энергией порядка  $kT$ . Изменение же кинетической энергии в результате рассеяния (которое соответствует изменению волнового вектора  $q$ ) имеет порядок  $E_s^{\alpha\beta}$ . Таким образом, если  $E_s^{\alpha\beta} \gg kT$ , то можно пренебречь величиной  $g$  по сравнению с  $g_0$  и тогда  $q \approx g_0/2$ . В этом случае формула (1) упрощается [6]:

$$R_{ijfm}^{\alpha\beta} = (2\pi)^2 \eta \text{Ry} \hbar \frac{n_i^{\alpha} n_j^{\beta}}{m_0 \varepsilon^2} \frac{|F_{ijfm}^{\alpha\beta}(g_0/2)|^2}{E_s^{\alpha\beta}} \quad (3)$$

где  $E_s^{\alpha\beta} = E_i^{\alpha} + E_j^{\beta} - E_f^{\alpha} - E_m^{\beta}$ ;  $E_i^{\alpha}$ ,  $E_f^{\alpha}$ ,  $E_j^{\beta}$ ,  $E_m^{\beta}$  — энергии подзон для частиц  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $n_{i(j)}^{\alpha(\beta)}$  — двумерная концентрация частиц  $\alpha$  ( $\beta$ ) в подзоне  $i$  ( $j$ ).

Рассмотрим взаимодействия и переходы между тремя указанными выше подзонами в нашей модели. Под  $n_3$  будем понимать концентрацию носителей в состоянии непрерывного спектра над ямой. Получим выражения для скорости перехода электронов из третьего уровня на два нижних в результате е-е-рассеяния. Анализ форм-фактора (2) для случая симметричной квантовой ямы показывает, что в такой системе разрешены только межподзонные переходы, сохраняющие суммарную четность номеров подзон. Таким образом, нам достаточно рассмотреть е-е-рассеяние по схеме 3122, 3322, 3221 и 3311. При этом нужно учесть, что при е-е-рассеянии 3311 и 3322 за один акт рассеяния из третьей подзоны уходят сразу два электрона. С учетом сказанного для скоростей перехода электрона в результате указанных выше процессов в прямоугольной квантовой яме  $d$  с бесконечными барьерами ( $E_i^{\alpha} = (\pi\hbar i)^2/2m_{\alpha}d^2$ ) на основе приближенной формулы (3) получим следующие выражения:

$$R_{3322}^{ee} = \frac{Ry}{5\hbar} \frac{m_e n_3^2 d^2}{m_0 \varepsilon^2} \left| F_{3322}^{ee} (g_0/2) \right|^2, \quad (4)$$

$$R_{3311}^{ee} = \frac{Ry}{4\hbar} \frac{m_e n_3^2 d^2}{m_0 \varepsilon^2} \left| F_{3311}^{ee} (g_0/2) \right|^2, \quad (5)$$

$$R_{3221}^{ee} = \frac{Ry}{4\hbar} \frac{m_e n_2 n_3 d^2}{m_0 \varepsilon^2} \left| F_{3221}^{ee} (g_0/2) \right|^2, \quad (6)$$

$$R_{3122}^{ee} = \frac{Ry}{\hbar} \frac{m_e n_1 n_3 d^2}{m_0 \varepsilon^2} \left| F_{3122}^{ee} (g_0/2) \right|^2. \quad (7)$$

Для такой ямы форм-фактор  $F_{ijfm}^{\alpha\beta} (g_0/2)$  находится точно аналитически:

$$F_{3322}^{ee} (g_0/2) = \frac{91\pi - 72e^{-\pi} - 72}{169\pi^2} \approx 0.126366,$$

$$F_{3311}^{ee} (g_0/2) = \frac{9\sqrt{2}\pi + e^{-2\sqrt{2}\pi} - 1}{36\pi^2} \approx 0.109725,$$

$$F_{3221}^{ee} (g_0/2) = \frac{2(1885\pi - 768e^{-2\pi}\sqrt{2}\pi + 1885)}{9425\pi^2} \approx 0.110781,$$

$$F_{3122}^{ee} (g_0/2) = \frac{65\pi - 48e^{-\pi} - 48}{130\pi^2} \approx 0.120127.$$

Из выражений (5)—(8) видно, что скорость переходов растет пропорционально квадрату ширины квантовой ямы.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Воспользуемся рассмотренной выше теоретической моделью для нахождения обратного времени жизни электронов  $\tau^{-1} = R/n$  на третьем уровне, связанного с межподзонным рассеянием. Рассмотрим переходы на две нижние подзоны в прямоугольной квантовой яме с больцмановским распределением носителей по состояниям в пределах каждой подзоны (эффе́ктивная масса электрона  $m_e = 0,067m_0$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 13,1$ ,  $n_1 = n_2 = n_3 = n_s = 10^{-10}$  см<sup>-2</sup>, температура  $T=300$  К). На рис. 1 представлены зависимости обратного времени жизни электронов  $\tau^{-1}$  при e-e-рассеянии для переходов 3122, 3322, 3221, 3311 как функции толщины идеальной квантовой ямы, построенные с использованием приближенных формул (4)-(7) и точной (1).

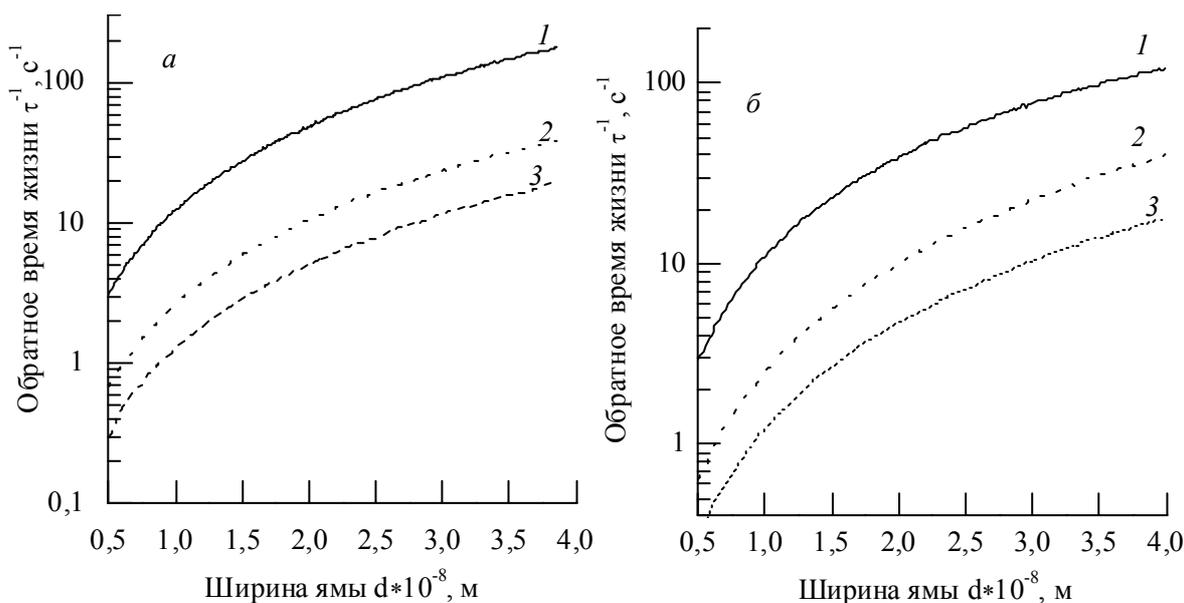


Рис.1. Зависимости обратного времени жизни электронов при е-е-рассеянии как функции ширины идеальной квантовой ямы: 1 - переход 3122, 2 - 3322, 3 - 3221, 4 - 3311, - вычисленные по приближенным формулам – (а) и точно – (б)

Из рис. 1 видно, что переходы на второй уровень осуществляются гораздо интенсивнее, чем на первый. Численный расчет позволяет говорить о хорошем приближении, даваемом формулами (4)–(7). Расхождение заметно только при больших значениях толщины ямы  $d$ , когда расстояние между подзонами становится сравнимо с  $kT$  (т. е. когда нарушается условие применимости указанных формул). При типичных толщинах ям ( $<30$  нм) ошибка не превышает 15 % при комнатной температуре, а с уменьшением температуры становится еще меньше. Такой точности скорости рассеяния достаточно для оценки пороговых и мощностных характеристик лазерных излучателей на основе скоростных уравнений. При приемлемой величине погрешности достоинствами выражений (4)–(7) являются их простота и явный вид зависимости скорости межподзонных переходов от параметров квантовой ямы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обоснована применимость модели межчастичного рассеяния к анализу инжекционной эффективности в квантовых ямах. Показано, что в рассмотренной модели скорость межподзонных переходов, обусловленных кулоновским взаимодействием носителей, увеличивается пропорционально квадрату ширины квантовой ямы и произведению концентраций частиц, участвующих в соударениях; при рассмотрении двухуровневой ямы переходы из свободного состояния на второй уровень осуществляются гораздо интенсивнее, чем на первый.

## Литература

1. *Козырев С. В., Шук А. Я.* Захват носителей в квантовые ямы гетероструктур // Физика и техника полупроводников. 1983. 19. № 9. С. 1667–1670.
2. *Goodnick S. M., Lugli P.* // Phys. Rev. B. 1988. 37. № 5. P. 2578–2588.
3. *Dür M., Goodnick S. M., Lugli P.* // Physica B. 1999. № 272. P. 230–233.
4. *Hartig M., Ganiere J. D., Selbmann P. E.* // Phys. Rev. 1999. B. 60. № 3. P. 1500–1503.
5. *Lee S.-C., Galbraith I.* // Physica E. 2000. № 7. P. 229–232.
6. *Дрозд А. Н., Афоненко А. А.* Скорость межподзонных переходов в полупроводниковых квантовых ямах при кулоновском взаимодействии носителей заряда // Журнал прикладной спектроскопии. 2005. 72. № 6. С. 782–787.

## РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ ФОТОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРИБОРОВ С ЗАРЯДОВОЙ СВЯЗЬЮ

**Л. И. Кравцевич, В. Л. Потоцкий**

В современной науке, технике и производстве широко используются оптические методы контроля различных физических параметров. Для преобразования оптического излучения в электрические сигналы в таких устройствах часто применяются приборы с зарядовой связью, такие как ПЗС-линейки и ПЗС-матрицы.

Название ПЗС (прибор с зарядовой связью) определяется способностью прибора переносить заряд из одной зоны ПЗС в соседнюю зону. Такие приборы были изобретены Бойлом и Смитом в Лаборатории АТ&Т в 1970 г. Ими было показано, что между близко расположенными МОП-конденсаторами возможен обмен зарядами – зарядовая связь. Манипулируя смещениями, прикладываемыми к таким конденсаторам, можно накапливать заряды, перемещать их, разделять, объединять, т.е. осуществлять аналоговую и цифровую обработку информации на дискретных, но связанных между собой объектах. [1]

Среди всех видов ПЗС наибольшее распространение получили преобразователи излучения в электрический сигнал – фоточувствительные ПЗС (ФПЗС). Далее под ПЗС подразумевается датчик изображения ФПЗС, а не только лишь прибор с переносом заряда. Датчики изображения могут быть линейными или матричными. Современные матричные датчики изображения на ПЗС классифицируются по способу переноса информации. Основными являются следующие три типа [1, 3]:

- строчный перенос;
- кадровый перенос;
- строчно-кадровый перенос.

Такие приборы нашли широкое применение в области автоматизированного контроля и управления технологическими процессами, при изготовлении изделий машиностроения, электронной техники, оптико-механики, спектроскопии, дефектоскопического контроля изделий, для считывания и обработки графической и символьной информации. Они используются для зрительного очувствления различных манипуляторов, составляющих основу робототехнических комплексов нового поколения, при решении задач идентификации объектов и полей электромагнитного излучения, астроориентации и навигации, для автоматизации научного эксперимента и т. д. [2]

Важным этапом создания регистраторов оптического излучения на основе ФПЗС является тестирование общих параметров регистратора, а также контроль параметров ПЗС-датчика на соответствие данным, указанным фирмой-производителем. Для решения этой задачи необходимо разработать специальное программное обеспечение, позволяющее не только получать численные данные от прибора, но и обрабатывать их, а также производить графическую визуализацию, что позволяет более наглядно представлять тестовую информацию и значительно облегчает работу пользователя с тестируемым прибором.

В данной работе предпринята попытка создания программного обеспечения для контроля параметров ПЗС-матриц. При разработке программных средств основное внимание было уделено визуализации полученных от регистратора данных, в частности графическому представлению распределения амплитуды действующего на ПЗС-матрицы оптического излучения.

Обзор литературы [1, 2, 3] и анализ ПЗС-матриц, предлагаемых промышленностью [4, 5, 6], позволили выделить параметры, подлежащие первостепенному контролю. К ним относятся:

Среднеквадратичный шум темнового сигнала. Включает в себя все шумовые параметры характерные для ПЗС прибора, а также шумовые характеристики видеоусилителя и АЦП.

Динамический диапазон. Определяется как отношение сигнала насыщения к среднеквадратичному шуму.

Неравномерность темнового сигнала. Рассчитывается как отношение разницы максимального и минимального значения сигнала при отсутствии освещенности к среднему значению сигнала.

Неравномерность фоточувствительности. Рассчитывается также как и неравномерность темнового сигнала, при освещенности составляющей 50% от сигнала насыщения.

Таблица 1

**Параметры матрицы MT9V403 производства фирмы Micron [4]**

Параметр	Значение	Единицы измерения
Чувствительность	1800	Отсчеты АЦП/лк*с
Неравномерность темнового сигнала	0,5	%
Увеличение темнового сигнала	100	мВ/с
Внутренний динамический диапазон	60	дБ
Неравномерность чувствительности	1	%
Емкость потенциальной ямы	110000	Электроны
Шум чтения	98	Электроны

Таблица 2

**Параметры матрицы ICX415AL производства фирмы Sony [5]**

Параметр	Значение	Единицы измерения
Чувствительность	820	мВ
Сигнал насыщения	375	мВ
Неравномерность видеосигнала	25	%
Темновой сигнал	2	мВ
Неравномерность темнового сигнала	1	мВ

Таблица 3

**Параметры матрицы P22 производства НИИ «Электрон» [6]**

Параметр	Значение	Единицы измерения
Интегральная чувствительность	15	мВ/лк
Неравномерность темнового сигнала	2	%
Относительная неравномерность свет-сигнальной характеристики	±8	%
Среднеквадратичный шум чтения	<10	Отсчеты АЦП

Линейность свет-сигнальной характеристики. Зависимость выходного сигнала ПЗС-датчика при увеличении освещенности отклоняется от идеальной линии. Отклонение возникает из-за колебаний напряжения на затворе МОП-транзистора, преобразующего заряд в напряжение, которые вызывают изменения крутизны коэффициента преобразования МОП-транзистора.

Для тестирования программного обеспечения использовались датчики фирм Micron (MT9V403, табл. 1), Sony (ICX415AL, табл. 2) со строчно-кадровым переносом, а также датчик производства НИИ «Электрон», Санкт-Петербург P22 (табл. 3) со строчным переносом.

Программа работает под управлением операционной системы Microsoft Windows XP. В качестве среды разработки было решено выбрать Microsoft Visual C++. Так как предварительный анализ показал необходимость создания программы со сложной структурой, было решено использовать библиотеку Microsoft Foundation Class library (MFC). Для

отображения двухмерной графики (зависимость амплитуды излучения от положения по столбцу или строке матрицы) был использован интерфейс Graphic Device Interface (GDI), который обеспечивает поддержку аппаратно-независимой графики. Для отображения картинки непосредственно на матрице использовалась технология DirectDraw. На рис. 1 представлено окно работающей программы. Окна Row: {} и Column: {} отображают распределение амплитуды вдоль строки и столбца соответственно, окно 2D: {} отображает картинку, принимаемую прибором.

Анализ ПЗС-приборов показал, что они широко используются в различных областях науки, техники и промышленности. ПЗС-приборы обладают множеством параметров, однако контролю подлежат только некоторые из них. Задача написания программы для визуализации данных поступающих от регистратора была выполнена. Программа протестирована с помощью класса эмуляции камеры и на реальных приборах.

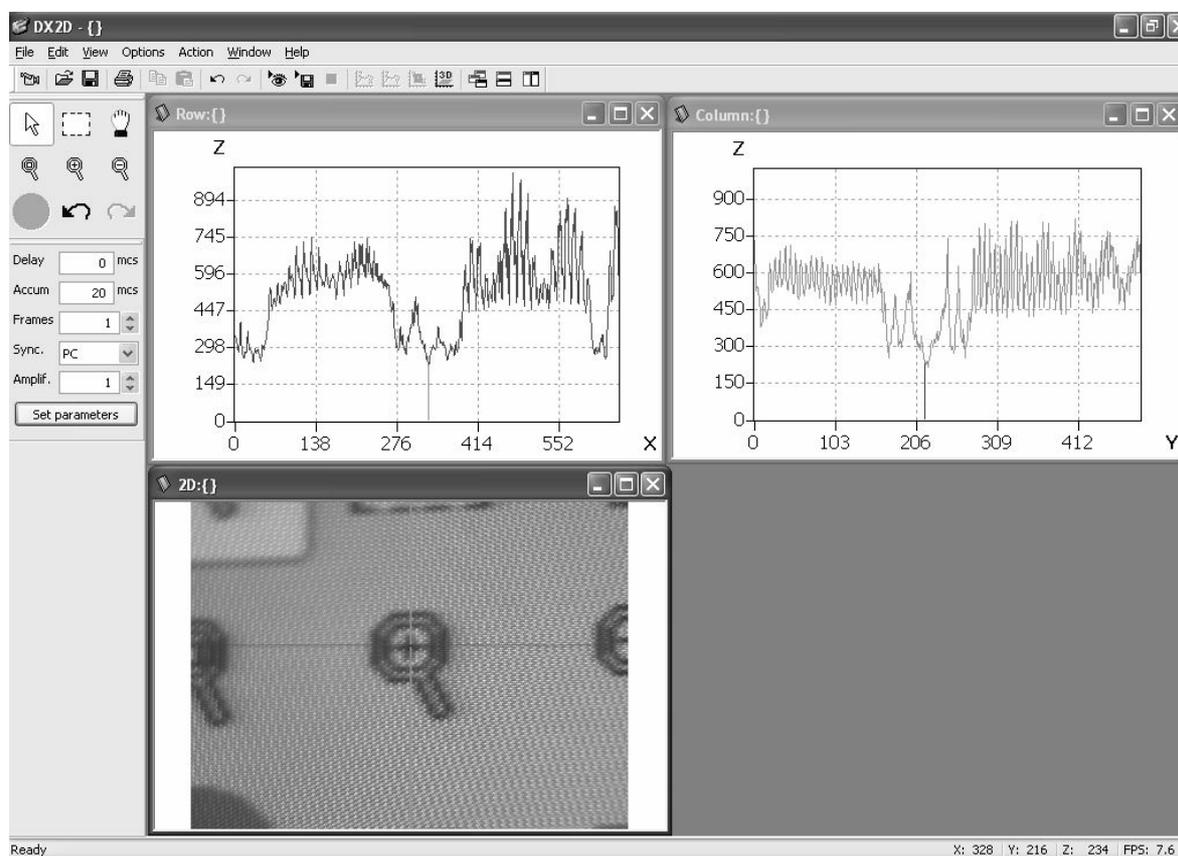


Рис. 1. Работа программы с регистратором на основе матрицы MT9V403 фирмы Micron

### Литература

1. Пресс Ф. П. Фоточувствительные приборы с зарядовой связью. М., 1991.
2. Писаревский А. Н., Чернявский А. Ф. Системы технического зрения. Ленинград, 1988.

3. *HAMAMATSU PHOTONICS K. K., Solid State Division.* Characteristics and use of FTT-CCD area image sensor. Technical information. 2003.
4. *Micron Technology Inc.* 1/2-INCH CMOS ACTIVEPIXEL DIGITAL IMAGE SENSOR MT9V403. 2004.
5. *Sony.* Diagonal 8mm (Type 1/2) Progressive Scan CCD Solid-state Image Sensor ICX415AL with Square Pixel for CCIR B/W Cameras. 2004.
6. *НИИ «Электрон».* Датчик оптического излучения Р22. Технический паспорт. Санкт-Петербург, 2004.

## **АЛГОРИТМ МЕНДЕНХОЛЛА-ВЕЛЛЕРА ДЛЯ РАСЧЕТА УГЛА РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СЦМ**

**А. А. Масленков**

### **1. ВВЕДЕНИЕ**

Одним из основных методов численного моделирования взаимодействия заряженных частиц с твердым телом является метод Монте-Карло (МК). Наиболее известными программами, реализующими метод МК в применении к задачам ионного легирования, являются TRIM(SRIM) [1] и Geant4 [2]. В основе любой программы, моделирующей движение заряженной частицы в твердом теле, лежат физические приближения, упрощающие описание процессов взаимодействия заряженных частиц с электронной и ядерной подсистемами мишени. Одним из таких упрощений является расчет угла рассеяния ( $\Theta$ ) в системе центра масс (СЦМ) по “магической формуле” (МФ), предложенной Бирзаком с соавторами [3] более 25 лет назад. Применение МФ связано со сложностью многократного расчета классического интеграла рассеяния при использовании реалистичных потенциалов ион-атомного взаимодействия. Физика TRIM-алгоритма заложена в то время, когда быстродействие компьютеров было весьма ограниченным, и многие прямые расчеты заменялись подгонными формулами для экономии расчетного времени. Поэтому сегодня необходим тщательный пересмотр давних упрощений и дополнение пакета более строгими физическими формулами.

Целью настоящей работы является тестирование и модернизация предложенного в [4] алгоритма расчета  $\Theta$  для различных потенциалов ион-атомного взаимодействия и сравнение результатов вычислений с аналогичными данными, полученными с использованием МФ.

### **2. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Основные приближения и расчетные формулы, используемые при вычислении угла рассеяния по методу Менденхолла-Веллера (МВ) пред-

ставлены в [4]. В программе Scattering заменена формула для расчета угла рассеяния  $\Theta = \pi \left( 1 - \frac{\beta\alpha(\epsilon, \beta)}{x_0} \right)$  на формулу из алгоритма TRIM:

$$\sin(\theta_C / 2) = \cos(\pi\beta\alpha / 2x_0) .$$

Было замечено, ссылаясь на первое равенство, что для малых углов потеря в точности проистекает из разности двух членов с величиной около единицы. Мной была разработана и написана программа Scattering, которая позволяет рассчитать угол рассеяния по «магической формуле» и методу МВ. Входными данными являются безразмерные значения прицельного параметра и энергии заряженной частицы. В качестве выходных параметров имеем безразмерную величину расстояния наибольшего сближения и угол рассеяния в СЦМ, представленный в градусах и радианах.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для проверки полной адекватности расчетов угла рассеяния и расстояния наибольшего сближения, программа Scattering была протестирована для всех случаев, представленных в [4], где приведена таблица для углов рассеяния в СЦМ в зависимости от приведенной энергии и прицельного параметра. Для сравнения расчетов  $\Theta$  по «магической» формуле МФ и МВ было решено расширить таблицу, приведенную в [4], добавив в нее расчеты для ФЭМ, ФЭУ, ФЭС-Кг и по МФ (также для трех типов потенциалов). Результаты расчетов угла рассеяния в СЦМ приведены в *таблице 1*.

Первые две колонки содержат входные данные. В четвертую, пятую и шестую колонки внесены углы рассеяния в СЦМ, рассчитанные по методу Менденхолла-Веллера для трех функций экранирования. Соответственно, седьмая, восьмая и девятая колонки содержат углы, рассчитанные по «магической» формуле.

Сначала надо отметить, что в некоторых случаях невозможны расчеты по МФ (соответствующие графы помечены как «-»). Видно, что такие расчеты отсутствуют для следующих пар: значение приведенного прицельного параметра меньше значения приведенной энергии. За исключением единственного случая – когда для расчета по МФ используется ФЭУ, предложенная авторами МФ [3]. Объяснение такого неоднозначного поведения МФ требует ее дальнейшего исследования. Углы, представленные в таблице 1 в четвертой колонке являются наиболее близкими к экспериментальным, как было указано в [4]. Поэтому целесообразно оценивать отклонения всех остальных рассчитанных углов от значений углов, представленных в четвертой колонке. Видно, что значения углов в

четвертой (ФЭМ) и шестой (ФЭС-Kr), седьмой (ФЭМ) и девятой (ФЭС-Kr) колонках очень близки между собой. При сравнении этих расчетов с универсальным потенциалом видно, что в некоторых случаях имеем сильное отклонение от ФЭМ. Было замечено, что «магическая» формула дает близкие к экспериментальным результаты лишь при больших углах отклонения, т.е. при обратном рассеянии.

Существует немало литературы, демонстрирующей экспериментальные угловые распределения проникающих через пленку ионов. Так, например, в работе [5] представлены данные проведенного эксперимента и моделирования по рассеянию низкоэнергетических протонов на алюминиевой фольге толщиной 20нм. Энергия протонов 10 кэВ.

Для сравнения экспериментальных данных с теорией была разработана программа Transmit. Программа SRIM 2003 выдает результаты углов рассеяния частиц в файл Transmit.txt. Программа Transmit обрабатывает эти данные и по ним строит график углового распределения протонов. Так как в файле выведены значения косинусов углов рассеяния, то программа Transmit пересчитывает их в значения углов в градусах. Для сортировки полученных данных был использован метод сортировки вставкой. Отсортированный массив представлен в виде графика (рис 1.).

Таблица 1

Углы рассеяния в СЦМ для трех функций экранирования

$\varepsilon$	$\beta$	$x_0$ ФЭМ	$\Theta$ , ФЭМ	$\Theta$ , ФЭУ	$\Theta$ , С- Сг	$\Theta_{\text{мф}}$ ,ФЭМ	$\Theta_{\text{мф}}$ , ФЭУ	$\Theta_{\text{мф}}$ , С- Сг
0,00	0,5	11,416	173,61	175,02	173,01	173,210	174,889	173,584
1			4	2	3			
0,00	20	20,389	6,943	24,410	5,782	22,213	40,723	16,065
1								
0,1	0,2	2,209	163,91	167,51	164,36	162,106	169,538	169,104
			3	9	7			
0,1	0,05	2,201	175,96	176,87	176,07	173,500	179,682	178,637
			2	2	7			
0,1	8	8,153	4,756	8,826	3,621	19,671	26,785	14,958
1,0	0,85	1,076	35,682	46,768	37,083	-	-	-
1,0	0,9	1,118	33,256	43,938	34,589	-	63,078	28,830
1,0	5	5,039	1,715	2,921	1,540	13,202	17,704	11,307
5,0	0,5	0,561	16,797	22,080	17,633	-	-	-
5,0	10	10,001	0,069	0,126	0,056	2,390	3,777	1,964
7,5	7	7,002	0,120	0,203	0,099	-	-	-
7,5	8	8,002	0,088	0,151	0,072	8,178	12,054	6,901
10,0	0,02	0,095	123,54	133,92	124,41	-	-	-
	5		5	2	7			
10,0	1	1,021	3,444	4,791	3,614	-	-	-

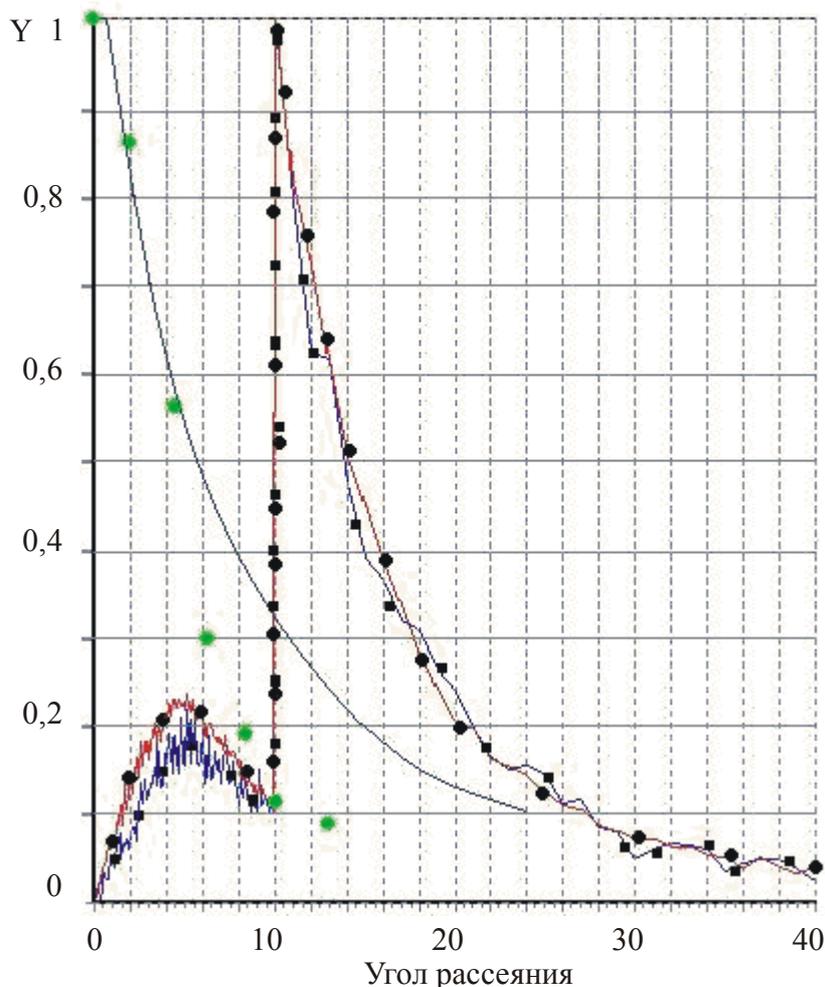


Рис. 1. Нормированное угловое распределение (Y) протонов с энергией  $E=10\text{кэВ}$ , прошедших алюминиевую пленку толщиной 20 нм. Точками обозначены экспериментальные данные. Кривая, помеченная кружками — распределение для  $10^5$  событий, квадратами — для  $10^4$  событий. Сплошная линия — аппроксимация полиномом 10 порядка расчета через импульсное приближение.

численного расчета угла рассеяния заряженных частиц в СЦМ. В дальнейшем эту программу можно использовать для работы с различными пакетами программ, реализующих метод Монте-Карло.

2. Анализ углов рассеяния при прохождении протонов через тонкие пленки показал, что при использовании программы SRIM 2003 полученные профили углового распределения существенно отличаются от экспериментальных (рис 1). Это связано с некорректным расчетом угла рассеяния при использовании приближений, заложенных в пакете SRIM 2003.

Отчетливо видно, как отличается профиль кривой, помеченной кружками от кривой, помеченной квадратами. На первой отсутствуют плечи и изломы, характерные для графика, изображающего  $10^4$  событий. Кроме того, существует видимое расхождение результатов программы SRIM 2003 с экспериментальными данными и теоретической аппроксимацией через импульсное приближение.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана процедура и написана программа SCATTERING для

#### Литература

1. [WWW.SRIM.ORG](http://WWW.SRIM.ORG)

2. *Mendenhall M. H., Weller R. A.* / An Algorithm for Computing Screened Coulomb Scattering in GEANT// Nuclear Instruments and methods (B), 2004, 1 –19.
3. *Biersack J. P., Haggmark L. G.* / A Monte Carlo computer program for the transport of energetic ions in amorphous targets // Nuclear Instruments and methods – 1980. – 174 – pp.257–269.
4. *Mendenhall M. H., Weller R. A.* / Algorithms for the rapid computation of classical cross section for screened Coulomb collisions // Nuclear Instruments and methods. – 1991 – B58 – pp.11–17.
5. *Archubi C. D. et al.* Angular dispersion of protons passing through thin metallic films // Nuclear Instruments and methods. – 2005.– B230 – p.53.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОЧАСТИЧНЫМ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРОНОВ В АРСЕНИДЕ ГАЛЛИЯ**

**А. В. Михайлик, Д. П. Чиж**

Исследование взаимосвязи электрофизических свойств полупроводников с их зонной структурой, наличием тех или иных механизмов рассеяния носителей заряда, концентрацией примесей, температурой, наличием и видом электрических полей остается на сегодняшний день актуальной задачей, особенно для получения точных количественных оценок. Еще более важным является прогнозирование статических и динамических вольт-амперных характеристик разрабатываемого прибора в зависимости от указанных свойств используемого полупроводника, внешних условий и его реальной геометрии.

Первая задача может быть решена аналитически или итерационным численным анализом кинетического уравнения Больцмана, а вторая — решением электродинамических уравнений при соответствующих граничных условиях или методом эквивалентных схем. Однако получение, например, точных количественных оценок указанными методами для полупроводников  $A^{III}B^V$ , так же как и анализ гетероструктур или субмикронных приборов, сопряжено с большими сложностями даже при введении ряда существенных упрощений. Для таких случаев огромным преимуществом обладает метод Монте-Карло, позволяющий весьма эффективно решать обе упомянутые выше задачи.

Целью данной работы явилась разработка численной модели переноса электронов в объемном GaAs на основе одночастичного метода Монте-Карло [1,2] и расчет зависимости их дрейфовой скорости в этом материале от величины приложенного электрического поля и температуры.

Идея подхода состоит в том, чтобы моделировать движение электрона в  $\vec{p}$ -пространстве. Рассматривается пролет свободного электрона, пре-

рываемый процессами рассеяния [1]. Между актами рассеяния изменение импульса электрона определяется электрическим полем  $\vec{E}$ :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + q\vec{E}t. \quad (1.1)$$

Моменты времени, в которые происходят акты рассеяния, определяются случайным числом  $r$ , генерируемым датчиком случайных чисел. Эти моменты времени зависят от полной частоты рассеяния:

$$\Gamma(E) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(E), \quad (1.2)$$

где  $\lambda_i(E)$  – частота для разных механизмов рассеяния, энергия  $E = \frac{\vec{p}^2}{2 \cdot m_{\text{эф}}}$ .

Полная частота  $\Gamma(E)$  является сложной функцией энергии, что создает трудности при попытке воспроизвести распределение вероятностей актов рассеяния с помощью датчика случайных чисел. Эти трудности легко преодолеть путем включения в рассмотрение дополнительного фиктивного процесса саморассеяния. Функция выбирается таким образом, чтобы  $\Gamma(E) + \lambda_0 = \Gamma = \text{const.}$

Полная вероятность рассеяния электрона в интервале времен от  $t$  до  $t + dt$  равна:

$$Pdt = \Gamma e^{-\Gamma t} dt. \quad (1.3)$$

После того, как вычислено время свободного пролета  $t$ , необходимо установить процесс рассеяния, ответственный за прерывание пролета. Вероятность выпадения  $i$ -ого процесса зависит от энергии электрона и пропорциональна  $\lambda_i(E)$ , причем  $\lambda_i(E)$  удовлетворяют условию:

$$\frac{1}{\Gamma} \sum_{i=0}^n \lambda_i(E) = 1. \quad (1.4)$$

Для упрощения процедуры выбора рассеяния необходимо сгенерировать таблицу значений вероятности процесса рассеяния от энергии, нормированных на единицу. Далее сгенерировать случайное число  $s$  между 0 и 1 и проверить выполнение неравенства:

$$s < \frac{1}{\Gamma} \sum_{i=0}^m \lambda_i(E), \quad (1.5)$$

для  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$  и заданной энергии. Следующий шаг состоит в определении конечного состояния после рассеяния. Для саморассеяния ко-

нечное состояние известно, так как при этом направление вектора  $\vec{p}$  не изменяется. Для всех же реальных процессов рассеяния необходимо генерировать дополнительные, случайные числа, чтобы смоделировать распределение вероятностей конечных состояний.

В GaAs для рандомизирующих актов рассеяния, таких, как акустическое или междолинное все состояния, соответствующие конечному состоянию, равновероятны. Поэтому для углов  $\theta$  и  $\varphi$  определяющих направление рассеяния, можно записать:

$$Pd\theta = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta \quad (1.6)$$

$$q(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi} d\varphi, \quad (1.7)$$

Для полярного оптического рассеяния углы  $\theta$  близки к 0, т.е. отклонения от первоначального положения будут небольшими, и для розыгрыша угла необходимо использовать процедуру Неймана [3], как для генерации заданного распределения угловой величины.

При построении нашей модели переноса была использована 2-х зонная модель объемного GaAs и учитывались следующие механизмы рассеяния:

Зона 1: а) полярное оптическое рассеяние, б) акустическое рассеяние, в) междолинное рассеяние.

Зона 2: а) полярное оптическое рассеяние, б) акустическое рассеяние в) междолинное рассеяние, г) внутримолекулярное рассеяние.

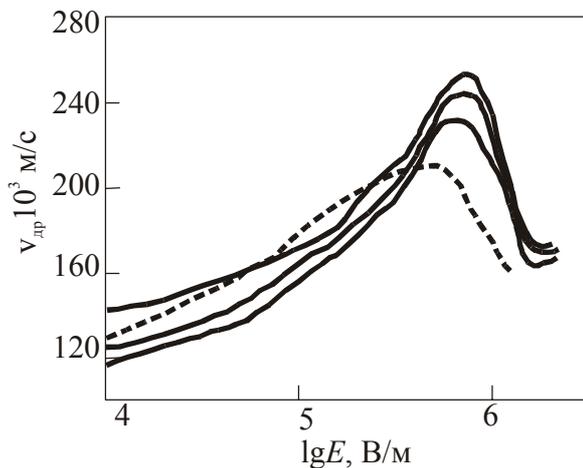


Рис. 1. Зависимость средней дрейфовой скорости  $v_{др}$  от приложенного электрического поля  $\xi$  при  $T_1 = 150$  К,  $T_2 = 200$  К и  $T_3 = 300$  К ; график пунктиром взят из аналогичных расчетов, выполненных в [1].

С использованием разработанной модели и реализующей ее компьютерной программы были рассчитаны зависимости средней дрейфовой скорости от напряженности приложенного электрического поля при трех различных температурах. Эта зависимость представлена на рис 1. Для сравнения, на этом же графике приведены результаты, аналогичных расчетов при тем-

пературе  $T = 300$  К, взятые из работы [1].

Анализируя график средней дрейфовой скорости, можно отметить, что при понижении температуры средняя дрейфовая скорость увеличивается. Это связано с уменьшением вероятности рассеяния на акустических и оптических фононах, которые являются следствием тепловых колебаний решетки. Также на графике хорошо просматривается достаточно резкое уменьшение скорости при полях больших  $10^6$  В/м. Этот эффект, как известно, связан с переходом большинства электронов из зоны 1 в зону 2, где их масса значительно возрастает и включается механизм междолинного рассеяния.

Таким образом, в данной работе были рассчитаны интенсивности основных механизмов рассеяния в GaAs, разработана программа для расчета средней дрейфовой скорости электронов с использованием одночастичного метода Монте-Карло, получены зависимости величины дрейфовой скорости от напряженности электрического поля в интервале его изменения ( $10^4 - 10^7$ ) В/м при температуре 150К и 300К. Показано, что результаты расчета относительно хорошо согласуются с известными в литературе данными.

#### Литература

1. *Шур М.* Современные приборы на основе арсенида галлия / Пер. с англ.-М.: Мир, 1991.-632 с., ил.
2. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц / Пер. с англ.-М.: Мир, 1987. – 640 с.
3. *Иващенко В., Митин В. В.* Моделирование кинетических явлений в полупроводниках методом Монте-Карло. / Отв. Ред. Грибников З. С.; АН УССР. Институт полупроводников. - Киев : Наук. Думка, 1990. – 192 с.

## КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАННЫЕ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЯ

**П. В. Петров, А. В. Дымович, П. В. Янкович**

Любое современное образовательное учреждение активно и в обязательном порядке использует новые информационные технологии в своем учебном процессе. Использование компьютера, компактных информационных носителей, сети Интернет помогают расширить сферу образовательных услуг и радиус их действий, оперативно актуализировать учебные курсы. Сегодня в Республике Беларусь в активном порядке внедряются различные системы тестирования, методические и учебные пособия переводятся в электронный вид. Однако для образования в области естественных наук наличие электронных учебных материалов является не достаточным. Учащийся в процессе обучения должен на своем опыте

оценить свойства объектов учебной дисциплины, почувствовать их взаимосвязи, получить навыки работы с ними. Поэтому для целей обучения в области естественных наук необходимо создавать виртуальные лаборатории, способные проводить демонстрации опытов с изучаемыми объектами. Создание виртуальной лаборатории подразумевает наличие всевозможного исследовательского оборудования, подключенного к компьютеру через порты ввода/вывода, с возможностью его управления и приема данных для дальнейшей обработки в среде Windows[1, 2].

Для связи компьютера с периферией используют такие порты как PS/2, LPT, RS232, USB, VGA, DVI, FIREWIRE и другие. Все они характеризуются своей скоростью обмена данными. Скорость обмена данными LPT от 40 Кбайт/с до 1 Мбайт/с и выше. Параллельный порт типа PS/2 имеет скорость передачи данных 80...300 Кбайт/с и зависит от производительности и пропускной способности подключенного устройства и драйвера программного обеспечения. Универсальная последовательная шина (Universal Serial Bus) обеспечивает большую скорость обмена данными между компьютером и периферийным устройством по сравнению со стандартными портами ввода-вывода. Максимальная пропускная способность USB 1.1 составляет 12Мбит/с и 480Мбит/с для следующего поколения этого стандарта USB 2.0. Шина USB позволяет одновременно подключать последовательно до 127 устройств. Для FIREWIRE характерна скорость передачи 400 Мбит/с. Сравнительный анализ пропускной способности (9600 бод), а так же просторы реализации архитектуры порта RS232 показал целесообразность использования данного интерфейса связи для выполнения класса задач, поставленных перед нами.

Одним из методов решения создания компьютеризированных измерительных устройств, это оснащение уже имеющегося в лабораториях оборудования средствами связи с персональными компьютерами через выше описанные порты[3]. Ряд имеющегося в лабораториях оборудования содержит аналого-цифровые преобразователи и систему цифровой индикации. В качестве такого экспериментального подключаемого оборудования использовался широкодоступный цифровой мультиметр серии DT830. Существует два решения проблемы компьютеризации данного мультиметра.

Первое, путем создания системы анализа выводов цифровых индикаторов. Для этих целей нами был разработан блок сопряжения, построенный на базе сдвиговых регистров и микроконтроллера PIC16F877[4, 5]. Входы параллельной загрузки сдвиговых регистров подключаются непосредственно к выводам аналого-цифрового преобразователя, идущим к индикатору мультиметра. Дальнейшую обработку полученных с выводов

данных и отсылку в компьютер через порт RS-232 осуществляет универсальный приемо-передатчик USART микроконтроллера PIC16F877. Использование микроконтроллеров в разрабатываемом блоке сопряжения позволяет сократить число внешних компонент устройства, что в свою очередь снижает стоимость конечного изделия, повышает надежность системы и уменьшает энергопотребление.

Второе решение проблемы получения данных с мультиметра на компьютер, это считывание цифровых значений с индикатора мультиметра при помощи web-камеры[6]. Для этих целей, в среде Delphi было разработано специальное программное обеспечение (Рис. 1), позволяющее захватить изображение с web-камеры через USB шину и распознать изображение на картинке путем попиксельного считывания информации с заданных меток.

С помощью аналогов данной программы можно производить контроль выполнения различных процессов, к примеру, на заводском оборудовании. Предотвращение перегрузок (наблюдение за сигнальной лампой), неисправностей и т.д. станет возможным без присутствия мастера.

Анализ совокупности требований к разрабатываемому комплексу поддержки учебного процесса поставил задачу построения учебно-исследовательского многофункционального измерительного блока (Рис. 2), представляющего собой набор функциональных программируемых модулей: измерителей напряжения и тока, источников напряжения и тока, модулей термостата и шагового двигателя.

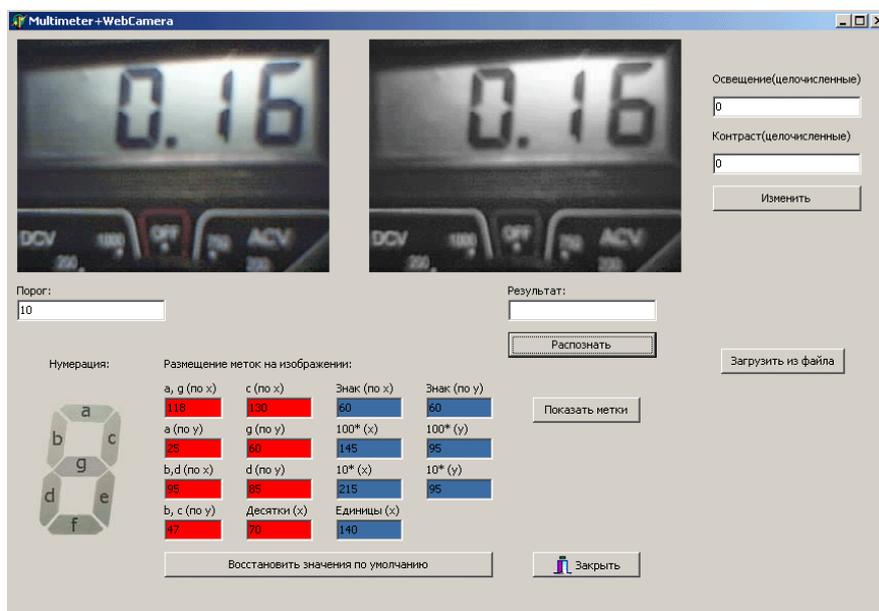


Рис. 1 Программа распознавания цифровых значений мультиметра



Рис. 2 Фотография рабочего места, содержащего учебно-исследовательский измерительный блок, лабораторный стенд, и персональный компьютер

Связь данных функциональных модулей с центральным компьютером осуществляет микроконтроллерное устройство управления (системный контроллер). Данную связь наиболее просто осуществлять на основе последовательного интерфейса RS232, пропускной способности которого вполне достаточно для рассматриваемого класса задач. Системный контроллер представлен в виде жестко встроенного модуля, построенного на базе широко распространенного и дешевого 8-разрядного микроконтроллера типа AT89S8251, имеющего в своем составе встроенные средства поддержки интерфейса RS232.

Разработанный лабораторный стенд предназначен для подключения к измерительному блоку. Стенд позволяет собирать различные виды измерительных схем для исследования двух-, трех-, и четырех-электродных полупроводниковых элементов и представляет собой набор разъемов типа «тюльпан», DB-15, DHR-15.

Программная оболочка «Лабораторный комплекс» реализована на языке программирования Delphi и взаимодействует с контроллером аппаратной части блока измерения на уровне специальных драйверов связи, посредством интерфейса RS232 (Рис. 3). Визуально оболочка представляет собой схему соответствующую реальной схеме на лабораторном стенде. Изначально контакты на схеме не замкнуты, пользователь по своему усмотрению расставляет виртуальные устройства на схеме, каждому виртуальному устройству в оболочке соответствует реальный прибор установленный в аппаратном измерительном модуле. Из виртуальных устройств в оболочке присутствуют, например: амперметры, вольтметры, источники питания, переключки. При правильной расстановке виртуальных устройств, программная оболочка инициализирует необходимые модули в измерительном блоке, после чего пользователь может переходить к монтажу схемы на реальном стенде и проведению измерений.

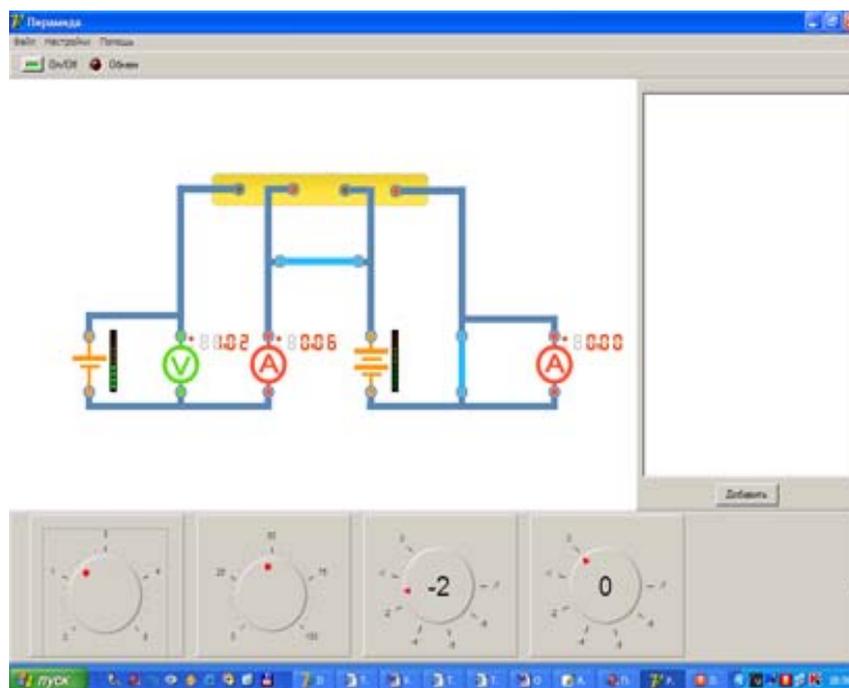


Рис. 3 Изображение управляющей программы «Лабораторный комплекс»

В ходе проведенной работы разработаны технологии подключения к компьютеру цифрового оборудования, не оснащенного компьютерными портами. Разработанный учебно-исследовательский многофункциональный лабораторный стенд содержит программируемые блоки: измерения напряжения и тока, управления шаговым двигателем, источников напряжения, термостата. Персональный компьютер выполняет функции управления лабораторным стендом в автоматическом режиме, считывания и хранения полученной информации, обработки экспериментальных данных. Данные разработки используются для автоматизации измерений электрофизических параметров электронных приборов и пригодны для представления в среде Internet.

### Литература

1. Кольчевский Н. Н., Петров П. В., Бобров Д. В., Евграфов О. Ю., Комаров Ф. Ф. «Extreem – платформа для систем управления содержанием сайта (СМФ) \\\ сб. V международной конференции «Дистанционное обучение» БГУИР, Минск 2005
2. Кольчевский Н. Н., Петров П. В., Бобров Д. В., Евграфов О. Ю., Комаров Ф. Ф. «Компьютеризированный измерительный стенд» \\\ сб. докладов «Методологии и технологии образования в 21 веке» БГПУ, Минск 2005
3. Кольчевский Н. Н., Петров П. В., Бобров Д. В., Евграфов О. Ю., Комаров Ф. Ф. «Сопряжение цифрового мультиметра с компьютером» \\\ сб. V международной конференции «Дистанционное обучение» БГУИР, Минск 2005
4. Data Sheet: DS33023 «PICmicro Mid-Range Referens Manual».
5. Интернет-адрес: <http://www.microchip.ru>.
6. Шарыгин М. «Сканеры и цифровые камеры», БХВ, Петербург, 2001 год.

# БУМАГА НА ОСНОВЕ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

А. А. Пугач

## ВВЕДЕНИЕ

Нанотрубки - это протяженные цилиндрические структуры диаметром от одного до нескольких десятков нанометров и длиной до нескольких микрон, состоящие из одного или нескольких свернутых в трубку гексагональных графитовых слоев и заканчивающиеся обычно полусферической головкой, которая может рассматриваться как половина молекулы фуллерена [1, с. 401]. Яркий пример использования углеродных нанотрубок – ультратонкий проводящий материал, называемый углеродной бумагой.

## ПОЛУЧЕНИЕ БУМАГИ ИЗ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Для получения бумаги из материала нанотрубок использовались очищенные одностенные углеродные нанотрубки (ОУНТ), поставляемые компанией Carbon Nanotechnologies Inc. в форме мелких шариков, так называемых BuckyPearls. Данные ОУНТ диспергировались в водном растворе поверхностно-активного вещества Triton X-100 с помощью ультразвуковой обработки и затем фильтровались с использованием процедуры вакуумной фильтрации. Под действием вакуума дисперсия ОУНТ пропусклась через политетрафторэтиленовый мембранный фильтр (Millipore LS, диаметр пор 5 мкм). Получившиеся после высыхания листы бумаги снимались с фильтра и тщательно промывались в больших количествах воды и метанола для удаления поверхностно-активных веществ и затем высушивались. Полученные листы бумаги, состоящие из нанотрубок, затем отжигались при температуре до 1000°C в течение 9 часов в потоке аргона для удаления остатков растворителей и поверхностно-активных веществ.

## ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Снятие вольтамперной характеристики (ВАХ) проводилось при помощи ячейки, созданной на пластинке из фольгированного текстолита. Контакты были изготовлены на основе посеребренных элементов контактных групп стандартных реле и медных дорожек вытравленных на текстолитовой пластинке. Результаты измерения представлены на *рисунке 1*.

Результаты измерения можно объяснить следующим образом: перенос электронов в бумаге определяется только металлическими УНТ. Между некоторыми металлическими УНТ не омический контакт, обусловлен-

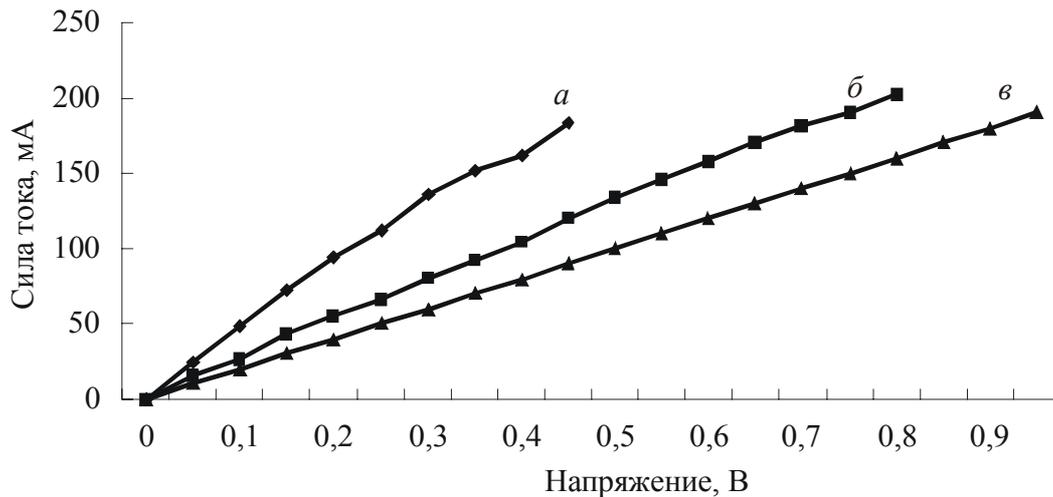


Рис 1. Вольтамперная характеристика бумаги на основе УНТ выращенных разными методами: а NiPCO, б лазерный (после отжига), в лазерный (без отжига)

ный, по-видимому, различными загрязнениями, что создает между некоторыми УНТ потенциальный барьер на загрязнениях, что и приводит к нелинейной зависимости на ВАХ. Причем при отжиге данные загрязнения удаляются, и практически между всеми трубками устанавливается омический контакт.

Существует несколько методов измерения эффекта Холла, но наиболее подходящим оказался метод, рекомендованный Ван дер Пау. В соответствии с этим методом по краю образца произвольной формы необходимо расположить четыре контакта. Магнитное поле направлено перпендикулярно образцу.

Измерения эффекта Холла в комбинации с измерениями слоевого сопротивления позволяют получать информацию о концентрации носителей заряда и их подвижности. Для проведения этих исследований создана ячейка на пластинке из фольгированного текстолита. Контакты были изготовлены на основе посеребренных элементов контактных групп стандартных реле.

В случае симметричной конфигурации слоевое сопротивление определяется по Ван дер Пау выражением:

$$R_S = \frac{\pi U_{3,4}}{\ln 2 \cdot I_{1,2}}, \quad (1)$$

где  $U_{3,4}$ ,  $I_{1,2}$  — измеряемое напряжение и задаваемый ток на соответствующих контактах 3–4 и 1–2.

Слоевой коэффициент Холла  $R_{H,s}$  вычисляют по формуле:

$$R_{h,S} = \frac{\Delta U_{H1,3}}{2I_{2,4}B}, \quad (2)$$

где  $U_H$  - напряжение Холла,  $B$  – напряженность магнитного поля.

На практике, чтобы снизить влияние несимметрии структуры и помех, связанных с магнитоэлектрическими эффектами, и уменьшить погрешности измерений при низких напряжениях, измерения проводят также при двух направлениях тока. Значения  $R_S$  и  $R_{H,S}$  находят усреднением измеренных значений. Используя формулы (1) и (2) можно найти эффективную поверхностную концентрацию носителей  $N_{S\text{eff}}$  и эффективную холловскую слоевую подвижность  $\mu_{S\text{eff}}$ :

$$N_{S\text{eff}} = \frac{r}{qR_{H,S}}, \quad (3)$$

$$\mu_{S\text{eff}} = \frac{R_{H,S}}{rR_S} = \frac{1}{N_{S\text{eff}} \cdot qR_S}, \quad (4)$$

где  $q$  - заряд электрона,  $r$  – холл-фактор – коэффициент, учитывающий механизм рассеяния.

Результаты холловских измерений приведены в таблице.

Мы получили хорошее согласие теории и эксперимента для изолированных УНТ. Однако построить строгую теорию для описания на микроуровне электронного транспорта в таком сложном объекте как бумага на основе УНТ не представляется пока возможным.

Таблица

**Результаты холловских измерений**

Образец бумаги	Слоевое сопротивление $R_S$ , Ом/□	Слоевая концентрация носителей $N_S$ , см <sup>-2</sup>	Холловская подвижность $\mu$ , см <sup>2</sup> /(В*с)
Laser-SWNT paper (Unannealed)	2,42	2-5x10 <sup>17</sup>	5,2-13,1

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Бумага на основе углеродных нанотрубок – материал будущего. Он в 10 раз легче, но в 250 прочнее стали. Этот материал может использоваться в авиации или при создании легких, эффективных бронезилетов. Бумага также может использоваться в качестве защитного слоя транспорта или при конструировании прочных, надежных и очень тонких дисплеев. Данный материал может найти свое применение в структурных и электрохимических системах, основанных на потенциальных механических

свойствах бумаги, в приводах, конденсаторах, электродах и устройствах с полевой эмиссией [2].

В результате проделанной работы были измерены электрические свойства бумаги на основе УНТ. Снята вольтамперная характеристика бумаги, вычислены холловская подвижность носителей, слоевая концентрация носителей, слоиое сопротивление.

#### **Литература**

1. *Елецкий А. В.* Углеродные нанотрубки и их эмиссионные свойства // Успехи физических наук. 2002. №4. С. 401–417
2. <http://amos.indiana.edu/library/scripts/buckypaper.html>

## **РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ПРОВЕРКИ СЕРИЙНЫХ НОМЕРОВ ДЛЯ ЗАЩИТЫ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ**

**А. Н. Сидоревич**

### **ВВЕДЕНИЕ**

С целью защиты программного обеспечения используется метод серийных номеров для регистрации или активации программного продукта. Как правило, серийный номер высылается пользователю, прошедшему этап регистрации и оплатившему ее стоимость.

Различают статические серийные номера (одинаковые для всех пользователей) и динамические (различные для разных пользователей, разных конфигураций компьютеров и т.п.). Статический номер не обеспечивают надежной защиты – его можно подсмотреть у соседа или знакомого, а затем дома ввести и зарегистрировать продукт. Сложнее подобрать динамический номер – последовательность байт, зависящую от имени пользователя, параметров операционной системы, номера сетевой карты, а также программных и аппаратных средств. Пользователь может самостоятельно выбрать имя, под которым регистрируется продукт и в этом случае регистрационный ключ зависит от заданного логина. Иногда для получения ключа требуется вместе с некоторой суммой предать производителю значение, сгенерированное программой (это может быть зашифрованный номер винчестера, сетевой карты и т.п.).

### **ПРОСТОЕ СРАВНЕНИЕ С ЭТАЛОНОМ**

Одной из первых реализаций этого метода было непосредственное сравнение с эталоном – байт за байтом, в этом случае регистрационный номер можно без труда извлечь из самой программы.

Наиболее простым способом является поиск строковых констант в исполнимом файле, возможно среди них и будет правильный пароль.

Если же программа была упакована, то поиск в файле ничего не даст. Тем не менее, все еще остается возможность поиска строк в памяти запущенного приложения или исследование при помощи отладчика.

Таким образом, в действительности данный метод не обеспечивает реальной защиты

### **СРАВНЕНИЕ ЧЕРЕЗ ХЕШ-ОБРАЗ**

Усложним процедуру проверки так, чтобы не использовалось явное представление эталонной строки. Сравнение должно происходить через некий характерный признак, присущий строке. Таким признаком может служить хеш-образ строки. Код должен содержать функцию расчета хеш-значения от входной строки и процедуру проверки ключа.

Теперь в таблице ссылок на текстовые строки дизассемблер не обнаружит ничего подозрительного. Однако если обратить внимание на участок кода в дизассемблере, который проверяет правильность введенного ключа, то можно обнаружить операцию сравнения рассчитанного хеш-значения с эталонным. В случае выполнения равенства условный переход передаст управление на блок, выводящий сообщение об успешной регистрации, в противном случае мы увидим сообщение типа «Wrong password!!!».

Таким образом, достать значение серийного номера, не получилось. Можно попробовать обратить функцию расчета числового значения от серийного номера, но это не всегда возможно.

Можно сделать вывод – использование хеш-функций позволяет производить проверку вводимого ключа без необходимости хранения непосредственного его значения в программе.

В теории это выглядит хорошо. Но, как и в большинстве защищаемых систем, слабость находится в другом месте. Конечная цель взломщика – получить работоспособную копию программы. Гораздо проще подменить, например, эталонное значение, с которым происходит сравнение хеш-образа или просто изменить условный переход так, чтобы управление попадало на нужную ветвь программы.

Проиллюстрируем сказанное. Пусть взломщик хочет, чтобы правильным паролем программа считала строку «hacker». Для этого ему нужно найти ее хеш-образ. Далее используя шестнадцатеричный редактор необходимо заменить эталонное значение на полученное.

Еще один способ изменения кода программы – это замена условного перехода на безусловный или вообще отключение его. Можно отключить

условный переход, исправив байты команды JNZ SHORT на JMP SHORT. Управление передается сразу на ту часть программы, отвечающую за выполнение действий при правильной регистрации.

Из рассмотренного видно, что использование хеш-функций само по себе еще не обеспечивает защиты. Необходимы некоторые дополнительные меры, которые не позволят взломщику так просто модифицировать код программы.

### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ШИФРОВАНИЯ**

Пусть в программе происходит вычисление хеш-образа для предварительной проверки введенного ключа. Если выбрана хорошая хеш-функция свободная от коллизий и результат ее выполнения совпал с эталонным, то можно гарантированно утверждать, что был введен истинный ключ. Это дает нам право использовать введенное значение ключа в некоторых вычислениях, например шифровании. Взломщик же может повлиять на процедуру сравнения хеш-значения с эталоном, но узнать само значение ключа ему не удастся.

В результате успешного прохождения этапа предварительной проверки ключа происходит передача управления в процедуру шифрования, иначе происходит выдача предупреждающего сообщения. В вызываемой процедуре происходит шифрование исполняемого кода и последующая передача на него управления. При правильно введенном ключе, в результате шифрования на месте выбранных разработчиком байт должны оказаться истинные команды. Если взломщик изменит процедуру предварительной проверки, то при неправильно введенном ключе могут появиться неправильные машинные инструкции, которые могут привести к краху программы, но в любом случае не к выполнению того, что положено.

Использование шифрования является несколько затратным делом, по сравнению с прочими приемами логических защит, зато гораздо надежнее и практически неуязвимо.

Какие атаки может предпринять взломщик? Если ему не известен правильный серийный номер и зашифрованный код имеет значительный объем, то при условии надежности алгоритма шифрования и достаточной длине ключа шифрования взлом подобной системы эквивалентен взлому криптоалгоритма и не представляется возможным.

Можно предложить еще один способ защиты программы. Суть заключается в шифровании правильным ключом самой процедуры проверки вводимого ключа. Разумеется, пока пользователь не введет правильный ключ, никакой процедуры проверки он не получит. А если введет правильный, то является очевидным, что процедура проверки уже не нужна.

На процедуру проверки возлагаются такие обязанности, как расшифрование защищенного исполнимого кода, проверка целостности некоторых участков или всей программы, инициализация ряда важных для работы переменных и т.п. Именно по вышеперечисленным причинам изъять процедуру проверки не получится.

### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Одним из наиболее качественных методов защиты программ является криптографическое преобразование информации. Согласно правилу Кирхгофа, стойкость криптозащит определяется исключительно стойкостью секретного ключа. Даже если алгоритм работы такой защиты известен, это не сильно упрощает его взлом. При условии правильного выбора длины ключа, криптозащиты не ломаемы в принципе

При реализации процедуры проверки серийного номера наиболее уязвимые места – это операция сравнения и передача управления на определенную ветвь кода. Однако операцию сравнения нужно использовать для предварительной проверки введенного ключа, так что ее результат является лишь защитой от ошибочного набора номера. Чтобы исключить возможность передачи управления на участок кода, отвечающий за последствия правильного ввода номера, необходимо использовать шифрование этого кода на основе ключа, генерируемого из введенного серийного номера.

## **УСТРОЙСТВО КАРДИОМОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ МОБИЛЬНОГО ТЕЛЕФОНА КЛАССА «SMARTPHONE»**

**А. В. Столяров**

На протяжении многих лет различные заболевания, связанные с сердечно-сосудистой системой, держат печальную пальму первенства в списке болезней человека и приводят к существенному сокращению продолжительности его жизни. Всем хорошо известно, что для любых болезней, наряду с профилактикой, исключительно важным является их раннее обнаружение и диагностика. Это обуславливает значительное внимание, уделяемое вопросам создания и развития современных средств автоматизированного инструментального исследования сердечно-сосудистой системы человека.

Наиболее распространенным и доступным для широкого круга людей методом инструментального исследования сердечно-сосудистой системы была и остается электрокардиография, основу которой составляет реги-

страция биопотенциалов, возникающих в сердце, точнее – электрических потенциалов, возникающих при сокращении сердечной мышцы. Имеется зависимость между электрической активностью сердца и его функциональным состоянием, что открывает возможности для диагностики заболеваний сердца. Анализируя направление и скорость распространения волн поляризации в сердце, оказывается возможным определять не только его функциональное состояние, но и выявлять очаги повреждений миокарда.

Несмотря на достаточную сложность интерпретации информации, получаемой с помощью электрокардиографии, имеются относительно простые методики, позволяющие с ее помощью оценить состояние сердечно-сосудистой системы, а также организма в целом.

В настоящее время существует много разновидностей и моделей электрокардиографов. Однако до сих пор эти приборы не преодолели некоторый рубеж по своей стоимости и удобству применения, когда они могли бы стать массовыми приборами медицинского назначения, используемыми человеком в его повседневной жизни. А это весьма актуально, поскольку даже не очень занятые люди могут позволить себе регулярные, лучше ежедневные, посещения врача для снятия и анализа кардиограммы. Более того, даже если удастся такие процедуры делать регулярно, далеко не все нарушения сердечной деятельности могут быть выявлены, поскольку многие сбои в работе сердца происходят в период напряженной физической нагрузки или высокого психоэмоционального напряжения человека, а не в расслабленном состоянии на приеме у врача.

Не так давно появились и получили активное развитие так называемые «Холтеровские кардиографы». Эти устройства достаточно малогабаритны, автономно работают от встроенного аккумулятора и способны производить регистрацию кардиограммы в буферной памяти, например, в течение суток. Однако для расшифровки полученных результатов необходимо подключение в стационарных условиях к компьютеру врача.

Для обеспечения удобной непрерывной регистрации и экспресс-анализа электрокардиограмм (ЭКГ) автором разработано автономное устройство, работающее под управлением мобильного телефона с расширенными возможностями класса Smartphone, представляющим собой гибрид портативного компьютера (PDA) и мобильного телефона. Для улучшения комфортности применения устройства в качестве интерфейса его электронной измерительной части с управляющим телефоном использована технология беспроводной передачи данных Bluetooth. Это обеспечивает работу устройства в режиме непрерывного кардиомониторинга пользователя при отсутствии жесткой привязки измерительного

блока к телефону – последний может находиться на расстоянии до 100 м (на открытой местности) от пользователя – и сохранении обычной функциональности телефона. Кроме того, в роли управляющего компьютера для устройства может выступать любой другой переносной (типа «ноутбук») либо стационарный (офисный) компьютер с подключенным к нему Bluetooth адаптером.

Устройство состоит из двух основных компонент: блока регистрации и блок управления на основе компьютера (телефона «Smartphone»). Блок регистрации выполнен в виде малогабаритного автономного электронного модуля, носимого на поясе. Он имеет встроенный источник питания, использующий Li-Ion аккумулятор, в котором реализована возможность контроля потребления и отключения аналогового входного тракта блока регистрации во время ожидания команд. Блок регистрации имеет на входе пять электродов, используя четыре из шести грудных отведений Вильсона (Рис. 1) и пятый опорный электрод [1, 2]. Так как сигнал, поступающий с электродов, достаточно слабый (2–8 мВ), то для усиления его применяются инструментальные усилители. Схема на усилителях реализована таким образом, что с помощью пятого опорного электрода удается практически избавиться от синфазной помехи в 50 Гц. Для борьбы с шумами, возникающими при сокращении мышц, и иными, то есть получить максимально «чистый» электрокардиосигнал (рис. 2), использовались три стадии фильтрации:

- 1) аналоговый фильтр собранный после усилителей;
- 2) цифровые фильтры встроенные в АЦП и способные самостоятельно определять верхнюю граничную частоту входного сигнала;
- 3) цифровой полосовой фильтр низких частот, реализованный в процессоре блока регистрации (полосовой фильтр Баттерворта) с частотами среза 0,05 Гц снизу и 100 Гц [3].

Для оцифровки сигнала использовалось 22-разрядное  $\Sigma$ - $\Delta$  АЦП фирмы Analog Devices, специально разработанное для применения в биомедицинских системах, имеющее встроенный цифровой ФНЧ, выполненное по LC<sup>2</sup>MOS технологии и потребляющее 35 мВт. Блок регистрации содержит также цифровой процессор с архитектурой ARM7, общей производительностью 54 MIPS при тактовой частоте 60 МГц, который осуществляет приём данных от АЦП, их сохранение в кольцевом буфере и

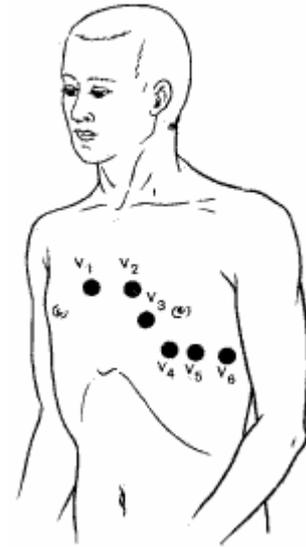


Рис. 1. 6 грудных отведений Вильсона

предварительный анализ электрокардиосигнала, например, на предмет наличия последнего в случае плохого контакта электродов с поверхностью кожи. Кроме того, процессор производит сжатие данных с помощью аудиокодека, реализованного программно, и поддерживает передачу сжатого потока данных с помощью модуля беспроводного интерфейса Bluetooth класса 1.



Рис. 2. Усиленный и оцифрованный сигнал

Блок управления на основе мобильного телефона класса «Smartphone» осуществляет общее управление устройством, прием, оперативное и долговременное хранение и экспресс-анализ электрокардиосигнала. Телефон имеет встроенный процессор архитектуры ARM9, имеющий общую производительность 220 MIPS при тактовой частоте 200 МГц. Он работает под управлением операционной системы (ОС) Windows Mobile, являющейся 32-битной ОС реального времени, позволяющей, используя предоставляемый пользовательский интерфейс WinAPI, создать достаточно сложное приложение.

Работа и структура приложений в Windows Mobile схожа с настольными версиями Windows, в частности, каждому процессу выделяется четырех гигабайтное адресное пространство виртуальное адресное пространство, определяются приоритеты процесса и т.д. Но есть и отличия, которые свойственны только мобильным устройствам. Windows Mobile имеет двухуровневую архитектуру. Верхний уровень – это ядро системы, включающее модули, обслуживающие аппаратную часть, так называемые драйвера, и процессы, занимающиеся высокоприоритетными задачами. Нижний уровень – это прикладные программы, интерфейсная и пользовательская часть.

В Windows Mobile, как и в настольной версии Windows, ядро выполняет основной цикл и обработку всех запросов, приходящих от драйверов и процессов верхнего уровня, либо от активных процессов нижнего уровня. Аппаратная часть Windows Mobile не доступна для пользователя с нижнего уровня напрямую, с ней можно работать через драйвера посредством интерфейса WinAPI.

Использование Windows Mobile и учет вышеописанных нюансов позволили разработать достаточно эффективную программу кардиоанализа

«Cardio». Программа состоит из основного модуля анализа и обработки данных, модуля сбора данных, графического модуля и блока, работающего с радиомодулем телефона. Кроме того, в программе реализованы модули управления питанием блока регистрации, блока формирования сигнальных данных отправляемых через службу коротких сообщений SMS, блока формирования ЭКГ передаваемой через Internet с помощью услуги GPRS и другие. Результат анализа выводится непосредственно на экран мобильного телефона «Smartphone», либо сохраняются на карту памяти.

Следует отметить также, в качестве существенного достоинства разработанной программы, реализацию в ней алгоритма определения местоположения пользователя с помощью технологии GSM, что очень важно для пользователя, оказавшегося в критической ситуации.

### Литература

1. Суворов А. В. Клиническая электрокардиография.- НГМИ. Нижний Новгород, 1993.– с 5.-34
2. Ripley K. L., Bump T. E., and Arzbaecher R. C. Evaluation of techniques for recognition of ventricular arrhythmias by implanted devices. / *IEEE Trans. Biomed. Eng.* – Vol. 36, 1989/ – p. 618–624
3. Крекрафт Д., Джерджли С. Аналоговая электроника. Схемы, системы, обработка сигнала. – М., 2005. с. 34–101

## СПОСОБЫ И АЛГОРИТМЫ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

### В. А. Трофимчук

В процессе интенсивного развития беспроводных коммуникационных технологий возникает необходимость обеспечения безопасности при передаче данных. Одним из методов реализации конфиденциального трафика является применение криптографических преобразований. При реализации криптопреобразований, особенно несимметричных, возникают проблемы, связанные малым быстродействием используемых алгоритмов. В данной работе рассматриваются несколько способов вычисления произведения  $k \cdot P$ , где  $k$  – большое целое число,  $P$  – точка на плоскости. Данная операция является основной при реализации криптосистем на основе эллиптических кривых [1].

При создании криптографических систем нужно учитывать, что все вычисления производятся по модулю некоторого целого числа  $p$ . В частности, это означает, что используются не произведения и суммы чисел, а остатки от деления этих произведений и сумм на данный модуль. При

этом сохраняются все известные свойства арифметических операций (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность) и у всех чисел от нуля до  $p$  существуют противоположные элементы:  $x+(-x)=0 \pmod p$ . Если же используемый модуль  $p$  — простое число, то во множестве целых чисел  $0, \dots, p$  можно задать операцию инверсии: для любого  $x$  кроме нуля существует  $x^{-1} < p$  такое, что  $xx^{-1}=1 \pmod p$ . Таким образом, рассматриваемое множество представляет собой поле (поле Галуа  $GF(p)$ ).

Существуют вычисления, представляющие собой многократное выполнение некоторой базовой ассоциативной операции. Например, вычисление произведения может быть сведено к многократному сложению, для модулярной экспоненты базовой операцией является умножение и т. д. В общем случае имеются два множества:  $GF(p)$  и некоторая группа  $H$  (в частности,  $H = GF(p)$  или  $H = GF(p) \setminus \{0\}$ ). В группе  $H$  задана операция  $\circ$ . Требуется вычислить  $kP = P \circ P \circ \dots \circ P$  ( $k$  раз),  $k \in GF(p)$ ,  $P \in H$ . Здесь важно представить множитель  $k$  таким образом, чтобы число выполнений базовых операций было как можно меньшим.

Одним из вариантов представления множителя является следующий [2]:

$$k = k_0 + 2(k_1 + 2(\dots)),$$

где  $k_i$  равны нулю или единице. В результате  $kP$  запишется, например, в таком виде:

$$kP = P \circ 2 \cdot 2(P \circ 2 \cdot (\dots)).$$

В итоге количество выполнений базовых операций не превышает  $2m-2$ , где  $m$  — количество бит числа  $k$ .

Однако такое представление не является оптимальным. Оно опирается на двоичный вид числа  $k$ , но можно использовать систему счисления с основанием  $2^n$ . Тогда  $k$  запишется в виде

$$k = k_0 + 2^n(k_1 + 2^n(\dots)),$$

где  $k_i$  принимают значения в диапазоне от 0 до  $2^n - 1$ . При этом должны быть предвычислены значения  $2P, 3P, \dots, 2^n - 1$  — всего  $2^n - 2$  предвычислений. Очевидно, что при увеличении  $n$  затраты на предвычисления быстро возрастают. Однако переход к другому основанию оправдан, так как максимальное число выполнений базовых операций, соответствующих знаку «+» («+—вычислений») в разложении числа  $k$  уменьшается. Следует сказать, что более интересно не максимальное, а среднее число этих вычислений. В случае двоичной системы счисления «+—вычисление» пропускается (за счет нулевого бита) с вероятностью 0,5. Таким образом, в данном случае среднее число «+—вычислений» равно  $0,5m-1$ . В случае основания  $2^n$  вероятность пропуска равна  $0,5^n$ . Предположим, что  $m$  делится на  $n$ . Тогда среднее число «+—вычислений» равно

$(m/n)(1-0,5^n)-1$ . Коэффициент при  $m$  уменьшается с ростом  $n$ : 0,5 для  $n=1$ , затем 0,375, 0,292, 0,234 и т. д.

Оптимальное значение  $n$  выбирается для каждого конкретного  $m$ . Оно может быть выбрано и более точно — для каждого конкретного  $k$ .

Можно отметить, что благодаря применению метода, использующего разложение множителя, для вычисления произведения автоматически исчезает проблема вычисления остатка от деления числа двойной длины на модуль  $p$ , так как выполнение сложения по модулю  $p$  как базовой операции приводит к получению результата в нужном виде.

Самой сложной операцией является вычисление инверсии. Для выполнения этой операции может быть использован расширенный алгоритм Эвклида. Он основан на алгоритме Эвклида для нахождения наибольшего общего делителя.

Пусть  $a$  и  $b$  положительные целые числа и  $a > b$ .  $a$  можно представить как

$$a = bq_0 + r_1,$$

где  $q_0 = [a/b]$  и  $0 \leq r_1 < b$ . Затем то же самое можно сделать для пары  $b$  и  $r_1$  и далее:

$$b = r_1q_1 + r_2,$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n,$$

$$r_{n-1} = r_nq_n + 0$$

Наибольший общий делитель здесь равен  $r_n$ .

Приведенный алгоритм можно использовать для решения Диофантова уравнения

$$by - ax = 1,$$

где, как нетрудно видеть,  $y = b^{-1} \pmod{a}$ . Здесь  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , иначе обратный элемент отсутствует. Значит, предпоследнее уравнение, получающееся при нахождении  $\text{НОД}(a, b)$  с помощью алгоритма Эвклида, можно переписать как

$$r_{n-2} - r_{n-1}q_{n-1} = 1,$$

а затем выразить  $r_{n-2}$  и  $r_{n-1}$  через предыдущие равенства. Входящие в эти выражения  $r_i$  представляются аналогичным образом. Таким образом, в самом конце остаются только  $a$ ,  $b$  и коэффициенты, выраженные через  $q_i$ .

Очевидно, что алгоритм Эвклида требует выполнения большого числа элементарных операций. Это число зависит, в частности, от количества выполняемых делений с остатком. Можно найти максимальное количество этих делений.

Пусть используются числа, меньшие  $2^m$ . Построим последовательность  $x_i$ , где  $x_1$  равно модулю,  $x_2$  – то число, инверсию которого требуется найти,  $x_{i+1} = x_{i-1} \bmod x_i$ . Последнее число  $x_n = 1$ . Задачу поиска максимального  $n$  при заданном  $x_1$  можно заменить задачей поиска минимального  $x_1$  при заданном  $n$ . Очевидно, что  $x_{i-1} = k_i x_i + x_{i+1}$ .  $x_1$  будет минимальным, если все  $k_i = 1$ , т. е. если числа от  $x_n$  до  $x_1$  образуют последовательность чисел Фибоначчи  $F_k$ , начиная со второго номера. Известно, что

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} \approx \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда

$$k = \log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}(F_k \sqrt{5}) < \log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} F_k + 2.$$

Таким образом, для максимального количества делений  $N$  можно записать

$$N < m \log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} 2 - 1 = \frac{m}{\log_2(1+\sqrt{5}) - 1} - 1.$$

Таким образом, в данной работе предложен и разработан способ проведения вычислений (модулярное умножение и инверсия), представляющих собой многократное выполнение базовой ассоциативной операции, основанный на специальном представлении одного из аргументов и предвычислениях.

#### Литература

1. ГОСТ Р 34.10-2001. Информационная технология. Криптографическая защита информации. Процессы формирования и проверки электронной цифровой подписи. – Официальное издание (03.04.2001). – с. 4–12.
2. *Lim C. H., Hwang H. S., Lee P. J.* Fast modular reduction with precomputation. – Information & communication research center, Future systems; Pohang univ. of science & technology, Korea, 2003, p. 1–6.

### ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ДЕФЕКТОВ, СОЗДАНЫХ ИМПУЛЬСНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ В ОПТИЧЕСКИ ПРОЗРАЧНЫХ МАТЕРИАЛАХ

С. А. Циер

Практически одновременно с созданием мощных лазеров было выяснено, что под действием лазерного излучения возникают разрушения прозрачных твердых тел. На основе этого эффекта был предложен метод

создания с помощью сфокусированного лазерного импульсного излучения растрового изображения внутри прозрачного материала, представляющего собой совокупность микродефектов [1; 2]. Ведутся также работы по формированию многоцветных изображений в стекле, открываются перспективы создания трехмерных оптических запоминающих устройств со сверхвысокой плотностью упаковки [3]. Однако для развития этих направлений следует детально изучить процесс пробоя, построить математическую модель и научиться воспроизводить результаты эксперимента.

Разрушения, возникающие в прозрачных твердых телах под действием лазерного излучения, наиболее целесообразно разделить на разрушения, возникающие в идеально чистых средах, и разрушения, обусловленные примесями [4]. В этих случаях различны механизмы, приводящие к разрушению. В чистой среде это оптический пробой.

Процесс пробоя состоит из следующих этапов:

Мощное лазерное излучение создает свободные электроны. Ионизация атомов может происходить за счет многофотонного поглощения.

Действующее лазерное излучение ускоряет электроны, которые способны выбить связанный электрон из атома. Энергия, которую необходимо набрать электрону, должна превышать потенциал ионизации атома.

Развивается электронная лавина.

Происходит быстрый локальный нагрев и плавление среды.

Возникают механические напряжения между модифицированной областью и областью, в которой не происходило поглощение энергии лазерного импульса, что приводит к разрушению твердого тела и возникновению микродефекта.

При наличии в прозрачной среде локальных макроскопических примесей или дефектов с большим коэффициентом поглощения излучения эти локальные области быстро нагреваются, что и служит, в конечном счете, причиной разрушения прозрачной среды. Таким образом, при наличии примесей идет речь о тепловом разрушении прозрачных сред.

В результате поглощения энергии лазерного излучения этими локальными областями, в них очень быстро (за время лазерного импульса) увеличивается температура, соответственно, увеличивается давление, приводящее к растрескиванию стекла в небольшой области вокруг примеси.

Теоретическое описание теплового разрушения основано на решении уравнения теплопроводности для среды с примесями. Кроме теплофизических свойств среды (чистой и содержащей примеси) необходимо учесть размер локальных областей, среднее расстояние между ними и коэффициент поглощения излучения. В наиболее простой модели можно

пренебречь зависимостью коэффициента поглощения от температуры нагреваемой области. В качестве критерия разрушения среды принимается критическая температура области, при которой возникают необратимые изменения среды (например, плавление).

В лаборатории кафедры физической электроники на базе универсального автоматизированного лазерного комплекса и установки лазерной гравировки ELS-03 были проведены эксперименты по определению критической плотности мощности, необходимой для создания



Рис. 1. Увеличенная фотография микродефекта в стекле

микродефекта, измерены линейные размеры модифицированных областей. Анализ зависимости процесса образования дефектной области в стекле от энергии лазерного импульса показывает, что пробой носит пороговый характер; размер области разрушения зависит от параметров фокусирующей системы, энергии и длительности импульса лазерного излучения, а также марки стекла.

Изображение внутри стекла формируется из совокупности микродефектов, представляющих собой пробой в стекле. От того, какую форму и размер имеет пробой, будет зависеть качество изображения. Поэтому необходимо критически отнестись к параметрам лазерного излучения.

Контроль пробоя осуществлялся визуально и в оптический микроскоп. Проведённые измерения показали, что форма микродефекта соответствует эллипсоиду с размерами 0.1 – 0.2 мм в горизонтальном направлении и 0.15 – 0.3 в вертикальном направлении (Рис. 1). Размеры микродефекта возрастают с увеличением фокусного расстояния линзы. Дополнительные исследования показали, что если расстояние между дефектами не превышает размеров дефекта, то моделированные области можно рассматривать как независимые, а если расстояние между ними сравнимо или меньше размера дефекта, то может наступить расстеклование (разрушение) материала.

Для того чтобы определить зависимость линейных размеров микродефекта от плотности мощности лазерного импульса, была сформулирована математическая модель процесса пробоя в стекле. Моделирование проводилось в программной среде Mathematica 4.1.

В силу того, что длительность лазерного импульса порядка  $10^{-8}$  с, предполагается, что поглощение энергии лазерного импульса в стекле происходит почти мгновенно. Затем тепло распространяется по объёму из области, в которой поглощается энергия.

Численное решение этой задачи предполагает разностную дискретизацию уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k\nabla T), \quad (1)$$

где  $k$  – температуропроводность материала.

В итоге можно получить двумерное стационарное распределение температуры.

Зная распределение температуры в области поглощения энергии лазерного импульса, а также температуру и теплоту плавления стекла, можно определить линейные размеры микродефекта, созданного лазерным излучением.

В качестве граничных условий при моделировании процесса пробоя использовались следующие параметры:

- Температура плавления стекла –  $T_{\text{плав.}} = 1973 \text{ К}$ ;
- Размер области моделирования –  $0.1 \times 0.1 \text{ см}$  ( $1000 \times 1000 \text{ мкм}$ );
- Радиус пятна фокусировки –  $r_f = 12.9 \text{ мкм}$ ;
- Высота начальной области мгновенного поглощения –  $60 \text{ мкм}$ .
- Для дискретизации задачи (1) было принято:
- Шаг дискретизации –  $s = 3 \text{ мкм}$ ;
- Абсолютная погрешность определения температуры –  $\varepsilon = 10 \text{ К}$ .

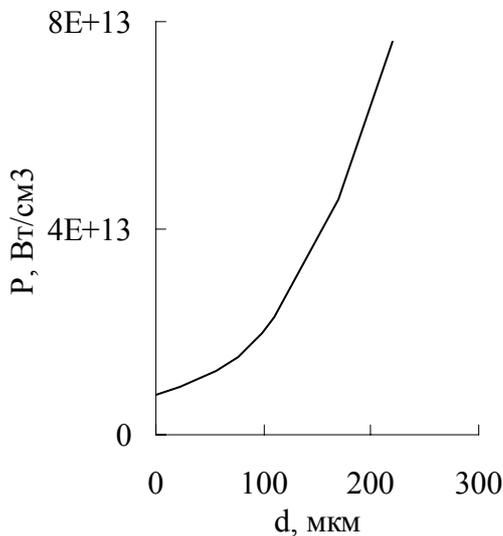


Рис. 2. Зависимость размера пробоя от плотности мощности лазерного импульса

Допустим, что энергия лазерного импульса  $75 \text{ мДж}$ . Доля поглощенной энергии составляет  $20\%$ , т.е.  $Q_{\text{погл.}} = 15 \text{ мДж}$ . В этом случае решение уравнения (1) дает почти сферическую форму области расплава (микродефекта) с диаметром  $108 \text{ мкм}$  и максимальную температуру в области пробоя, равную  $3179 \text{ К}$ . На Рис. 2 приведены результаты расчетов диаметра микродефекта для разных плотностей мощности лазерного излучения.

Из результатов моделирования видно, что область пробоя имеет форму, близкую к сферической, в то время как в эксперименте она имеет эллиптическую форму, что

объясняется, по-видимому, влиянием сферической aberrации фокусирующей линзы. Однако теоретические размеры диаметра микродефекта совпадают с экспериментальными. Для более точного расчета высоты области необходимо учесть поправки на aberrацию системы фокусировки. Используя экспериментальные данные о размерах микродефекта, с помощью разработанного алгоритма можно решить и обратную задачу по определению количества теплоты, поглощаемого стеклянным образцом в результате облучения лазерным импульсом.

## **ВЫВОДЫ**

В данной работе проведены исследования процессов оптического пробоя в стекле марки К8. По результатам экспериментальных данных определена зависимость размера области пробоя от плотности мощности лазерного излучения. В результате математического моделирования процесса пробоя, основанного на приближении мгновенного поглощения лазерного излучения материалом и численном решении стационарного уравнения теплопроводности, рассчитаны линейные размеры модифицированных областей в стекле марки К8.

## **Литература**

1. *Kazuyuki Hirao, Jianrong Qiu, Kiotaka Miura et al.* Femtosecond laser induced phenomena in active ion-doped glasses and their applications // Transactions of the Materials Research Society of Japan. 2004. № 29 [1]. P. 3–7.
2. U.S. Patent № 4, 843, 207. 1997
3. U.S. Patent № 5, 637, 244. 2000
4. *Делоне Н. Б.* Взаимодействие лазерного излучения с веществом / М.: Наука, 1989 г.

## **РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ**

### **И. П. Шингарёв**

В связи с повышением требований к точности и надёжности определения параметров веществ, находящихся в растворе, все чаще используются методы флуоресцентной флуктуационной спектроскопии. Среди них выделяется метод, основанный на исследовании экспериментального распределения числа фотонов, полученных за время  $T$  – РСН-анализ, позволяющий получать информацию об излучательной способности и концентрации молекул вещества, находящегося в растворе. Процедура анализа распределения числа фотонов многоэтапна, поэтому возникает необходимость в разработке алгоритма для проведения такого анализа.

Идея алгоритма весьма проста. Необходимо построить теоретическое распределение числа фотонов, зависящее от физических параметров, ха-

рактически исследуемое вещество. Затем, проведя процедуру согласования экспериментального и теоретического распределений с помощью метода наименьших квадратов, получить оценки неизвестных параметров исследуемого вещества.

Рассмотрим математическую модель, лежащую в основе процедуры анализа. В качестве параметра, характеризующего излучательную способность молекул вещества, примем молекулярную яркость  $\varepsilon$ , равную числу фотонов, излучаемых молекулой за время  $T$ . Для характеристики концентрации будем использовать среднее число частиц  $\bar{N}$ , находящихся в некоторой области вещества объёмом  $V_0$  [1]. В качестве функции, описывающей распределение интенсивности возбуждающего излучения в веществе для случая двухфотонного возбуждения, примем функцию гауссовско-лоренцовского типа, которая в цилиндрических координатах имеет вид [1]:

$$PSF(\rho, \varphi, z) = \frac{4\omega_0^8 \pi^2}{(\pi^2 \omega_0^4 + z^2 \lambda^2)^2} \exp\left[-\frac{4\rho^2 \pi^2 \omega_0^2}{\pi^2 \omega_0^4 + z^2 \lambda^2}\right], \quad (1)$$

где  $\omega_0$  и  $\lambda$  – толщина пучка и длина волны возбуждающего излучения.

Рассмотрим процедуру получения теоретического распределения.

В общем случае, вероятность регистрации  $k$  фотонов от одной молекулы с молекулярной яркостью  $\varepsilon$  за время  $T$ , находящейся в области объёмом  $V_0$ , дается выражением [1]:

$$p^{(1)}(k, V_0, \varepsilon) = \frac{1}{V_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varepsilon PSF(\vec{r}))^k}{k!} \exp[-\varepsilon PSF(\vec{r})] d\vec{r}, \quad (2)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор.

При этом

$$p^{(1)}(0, V_0, \varepsilon) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p^{(1)}(k, V_0, \varepsilon). \quad (3)$$

Аналогично, вероятность регистрации  $k$  фотонов от  $N$  молекул [1]:

$$p^{(N)}(k; V_0, \varepsilon) = \underbrace{(p^{(1)} \otimes \dots \otimes p^{(1)})}_{(N-1)\text{-раз}}(k; V_0, \varepsilon), \quad (4)$$

где

$$(p^{(1)} \otimes p^{(1)})(k; V_0, \varepsilon) = \sum_{r=0}^k p^{(1)}(k-r; V_0, \varepsilon) p^{(1)}(r; V_0, \varepsilon). \quad (5)$$

Вероятность получения  $k$  фотонов от молекул, свободно диффундирующих через границы области объемом  $V_0$ :

$$\Pi(k; \bar{N}, \varepsilon) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{N!} \exp(-\bar{N}) p^{(N)}(k; V_0, \varepsilon), \quad (6)$$

где  $\bar{N}$  – среднее число молекул, находящихся в этой области.

При этом

$$p^{(0)}(k; V_0, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}. \quad (7)$$

В РСН-анализе принимают  $V_0 = \omega_1$  [1], где:

$$\omega_i = \int_{-\infty}^{\infty} PSF^i(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (8)$$

В ходе разработки математической модели для алгоритма анализа получены следующие выражения для расчета вероятности:

$$p^{(1)}(k, V_0, \varepsilon) = \frac{1}{k!} \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^4(\theta)} \gamma(k, \frac{4\varepsilon}{\pi^2} \cos^4(\theta)) d\theta \quad (9)$$

или

$$p^{(1)}(k, V_0, \varepsilon) = \frac{1}{k!} \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} (1+t^2) \gamma(k, \frac{4\varepsilon}{\pi^2} \frac{1}{(1+t^2)^2}) dt, \quad (10)$$

где  $\gamma(k, x) = \int_0^x t^{k-1} e^{-t} dt$ .

Может возникнуть ситуация, когда (1) недостаточно точно описывает реальное распределение интенсивности возбуждающего излучения. Тогда возникает необходимость введения коррекции, характеризующей расхождение между реальным распределением интенсивности в веществе  $PSF(\vec{r})$  и его аппроксимацией  $PSF_{model}(\vec{r})$ . В качестве такой коррекции принимают [2]:

$$F_i = \frac{\tilde{\omega}_i - \omega_i}{\omega_i}, \quad (11)$$

где  $\tilde{\omega}_i, \omega_i$  вычисляются по (8) от  $PSF(\vec{r})$  и  $PSF_{model}(\vec{r})$  соответственно.

Введем коррекции в математическую модель для алгоритма анализа. В общем случае из (2) можно получить:

$$\tilde{p}^{(1)}(k, \tilde{V}_0, \varepsilon) = \frac{1}{(1 + F_1)} \left( p^{(1)}(k, V_0, \varepsilon) + \frac{1}{V_0 k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(-1)^{i-k} \varepsilon^i}{(i-k)!} \gamma_i F_i \right), \quad (12)$$

где  $\tilde{V}_0$  – изменившийся после ввода коррекций объем области, в которой возбуждаются молекулы,  $\gamma_i$  – гамма-фактор  $i$ -го порядка,  $p^{(1)}(k, V_0, \varepsilon)$  вычисляется по формулам (9), (10).

На практике ограничиваются несколькими коррекциями.

Гамма-фактор  $\gamma_i$  представляет собой важную константу, используемую в РСН-анализе, флуоресцентной корреляционной спектроскопии, флуоресцентном кумулянтном анализе. Гамма-фактор определяется как [1]:

$$\gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1}. \quad (13)$$

Удалось получить выражение в общем виде для его расчета:

$$\gamma_i = \frac{1}{i} \frac{C_{4i-4}^{2i-2}}{(2\pi)^{2i-2}}, \quad (14)$$

где  $i=2, 3, 4 \dots$ ,  $\gamma_1 = 1$  и  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Итак, схема алгоритма выглядит следующим образом: необходимо сформировать эмпирическое распределение числа фотонов; задать число коррекций; по методу наименьших квадратов найти теоретическое распределение наилучшим образом согласующееся с эмпирическим. Параметры теоретического распределения будут оценками соответствующих неизвестных параметров  $\varepsilon$  и  $\bar{N}$  исследуемого вещества.

Для ускорения поиска теоретического распределения наилучшим образом согласующегося с эмпирическим распределением необходимо задать начальные приближения для параметров  $\varepsilon$ ,  $\bar{N}$ ,  $F_i$ . Для расчета начальных приближений можно использовать флуоресцентный кумулянтный анализ [3], позволяющий получить оценки молекулярной яркости  $\varepsilon$  и среднего числа частиц  $\bar{N}$ .

После введения коррекций основное уравнение кумулянтного анализа примет вид:

$$K_i = \frac{(1 + F_i)}{(1 + F_1)} \gamma_i \varepsilon^i \bar{N}, \quad (15)$$

где  $K_i$  – факториальный кумулянт  $i$ -го порядка эмпирического распределения числа фотонов.

Факториальные кумулянты  $K_q$  вычисляются через факториальные моменты  $G_q$  :

$$K_q = G_q - \sum_{m=1}^{q-1} \frac{(q-1)!}{m!(q-m-1)!} K_{q-m} G_m, \quad (16)$$

где

$$G_k = \sum_{i=k}^N \frac{i!}{(i-k)!} p_i^*, \quad (17)$$

где  $p_i^*$  – эмпирическая вероятность того, что дискретная случайная величина приняла значение  $i$ .

Данный алгоритм был реализован программно. Результаты его применения для анализа с экспериментальных данных дают основания утверждать, что алгоритм может использоваться на практике.

#### Литература

1. *Chen Y., Müller J. D., So P. T. C., Gratton E.* The Photon Counting Histogram in Fluorescence Fluctuation Spectroscopy// *Biophysical Journal*. Volume 77. July 1999. 553–567.
2. *Huang B., Perroud T. D., Zare R. N.* Photon Counting Histogram: One-Photon Excitation// *ChemPhysChem*. May 2004. 1523–1531.
3. *Müller J. D.* Cumulant Analysis in Fluorescence Fluctuation Spectroscopy// *Biophysical Journal*. Volume 86. June 2004. 3981–3992.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ РАСSEИВАЮЩИХ ОБЪЕКТОВ И СРЕД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

**Т. Ю. Шинкевич**

Цель работы – определение спектральной области поглощения лазерного излучения гемоглобином для разработки спектрального прибора измерения его концентрации.

Объектом исследования является гемоглобин в растворах, поскольку из-за его большой оптической плотности спектры поглощения и пропускания можно измерить только в растворах [1].

Проводились измерения спектральных характеристик гемоглобина в растворе глюкозы и в физиологическом растворе в следующих концентрациях:

гемоглобин с глюкозой:

- глюкозы – 20 мл,
- гемоглобина – 5 мл;

гемоглобин с физиологическим раствором:

- физиологического раствора – 20 мл,
- гемоглобина – 5 мл.

Для получения спектральных характеристик исследуемых компонент использовался однолучевой спектрофотометр SPECORD-M40 фирмы Carl Zeiss Jena, который имеет следующие технические характеристики:

- рабочий спектральный диапазон – от 200 до 1100 нм,
- выделяемый спектральный интервал – от 0.3 до 3 нм,
- минимальный шаг спектрального сканирования 0.1 нм,
- диапазон измерения оптической плотности  $D$  – от 0 до 1.6Б,
- диапазон измерения коэффициента пропускания  $K$  – от 2.5 до 100%.

Результаты измерений представлены на рис. 1-4. Как видно из приведенных на рис. 1,2 результатов, как в одном, так и в другом растворе максимальное поглощение наблюдается для линии 420нм. Для гемоглобина в физиологическом растворе наблюдается несколько большая интенсивность линии поглощения.

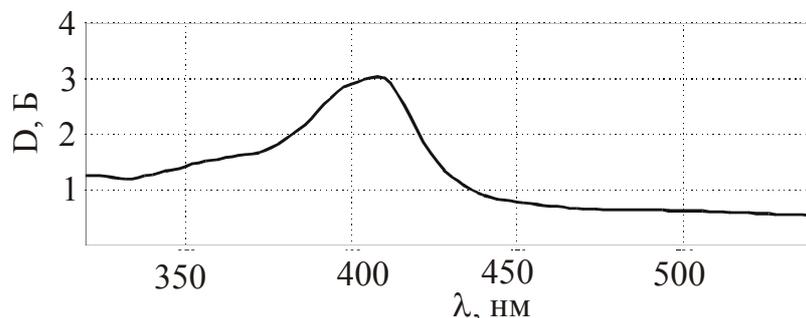


Рис 1. Спектральное изменение оптической плотности гемоглобина и физраствора

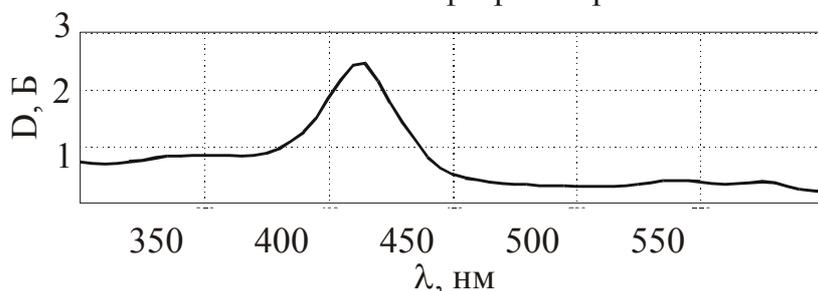


Рис 2. Оптическая плотность гемоглобина с глюкозой

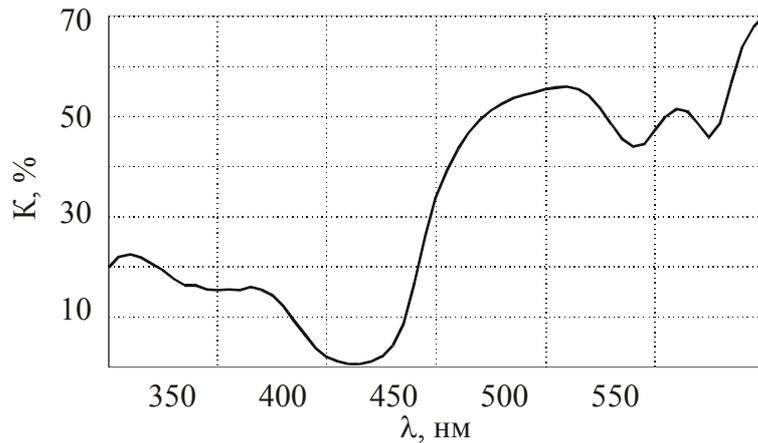


Рис 3. Коэффициент пропускания гемоглобина с глюкозой

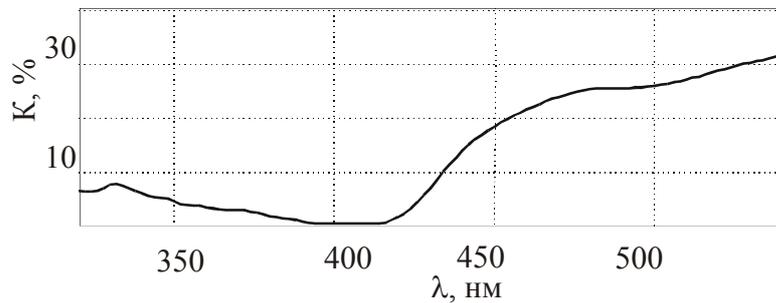


Рис 4. Коэффициент пропускания гемоглобина в физрастворе

Из анализа литературных источников [2-5] следует, что наиболее точной и эффективной является измерительная система на основе метода дифференциального поглощения [3], использующая измерения на двух длинах волн – центре линии поглощения и на крыле линии поглощения.

Для расчета концентрации, исходя из полученных экспериментальных данных, предлагается использовать длины волн 410нм и 520нм.

Функциональная схема измерительной системы, реализующей данный метод, приведена на рис.5.

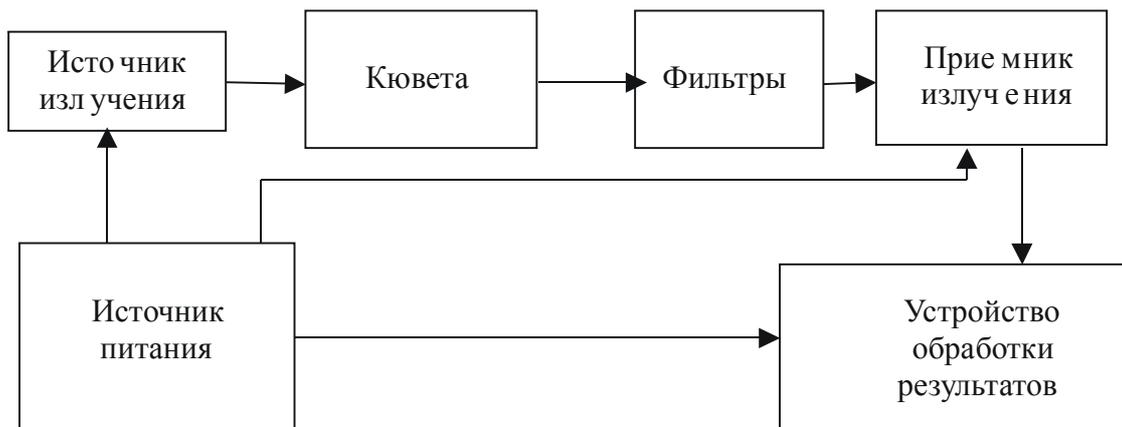


Рис. 5 Функциональная схема измерительной установки

В измерительной установке целесообразно использовать интерференционные фильтры [6], которые имеют узкую полосу пропускания. Но они очень дорогостоящие и поэтому была поставлена задача установить, возможно ли использовать нейтральные фильтры для проведения исследований. Для этого были проведены измерения спектров пропускания ряда нейтральных светофильтров. Результаты для двух из них приведены на рис. 6,7. Поскольку нужно выделить длины волн 410нм и 520нм, то наиболее подходящим является фильтр 2.

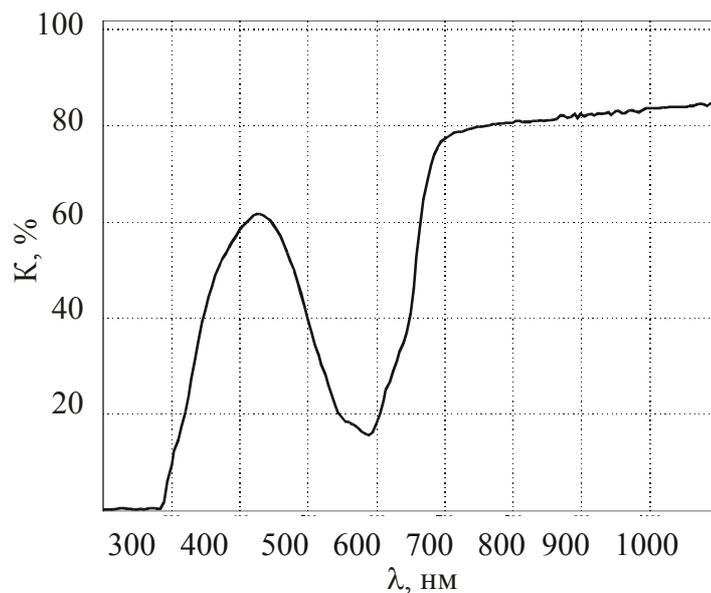


Рис. 6 Спектр пропускания фильтра 1

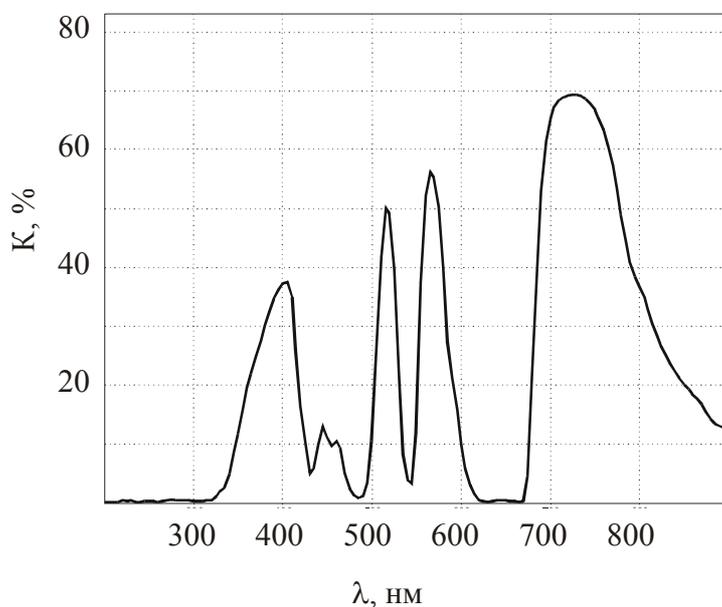


Рис. 6 Спектр пропускания фильтра 2

## Литература

1. Брискин Б. С., Алиев И. М., Полонский А. К. и др. Экспериментальное и клиническое обоснование эффективности чрезкожного облучения крови // Матер. Междунар. конфер. «Новые напр. лаз. мед.»
2. Иванов А. П. Оптика рассеивающих сред Мн.: Наука и техника, 1969
3. Кугейко М. М. Лазерная диагностика и спектроскопия Минск, БГУ, 2002
4. Демтрейдер В. Лазерная спектроскопия: основные принципы и техника эксперимента. М.: Наука, 1985
5. Лазерная аналитическая спектроскопия / Под ред. В. С. Летохова. М.: Наука, 1987.
6. Малышев В. И. Введение в экспериментальную спектроскопию. М.: Наука, 1979.

## СТРУКТУРНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ЛЕГИРОВАННЫХ МЫШЬЯКОМ СЛОЯХ SiGe СПЛАВОВ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОМ ОТЖИГЕ

К. В. Яцко, Д. В. Колтович

Поиск альтернативных материалов, совместимых с Si-технологией, исследование их свойств, а также разработка приборных структур на их основе, являются приоритетными направлениями материаловедения и полупроводниковой электроники. В частности, тенденции развития микроэлектроники предполагают широкое использование метастабильных структур – высоколегированных и пересыщенных слоёв SiGe сплавов. Высоколегированные слои имеют важное значение для создания истоковых областей в МОП технологии и эмиттеров – в биполярной. В связи с этим, система SiGe + As является перспективной для формирования приборов микроэлектроники.

Известно, что в кристаллах чистых кремния, легированных мышьяком до высокой концентрации, атомы As одновременно могут существовать в трех различных состояниях [1]:

- часть атомов As в концентрации  $n_e$ , не превышающей  $\sim 3,7 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ , являются электрически активными;
- атомы As в концентрации выше  $C_{\text{sat}} \sim 3,2 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$  участвуют в образовании выделений фазы SiAs, где величина  $C_{\text{sat}}$  фактически соответствует пределу равновесной растворимости As в Si;
- большая фракция атомов As в концентрации  $N_{\text{as}} = C_{\text{sat}} - n_e$ , является электрически нейтральной, однако не образует выделений второй фазы, причем предполагается, что атомы As входят в состав подвижных примесно-дефектных комплексов. Атомная структура таких комплексов до настоящего времени является предметом активных дискуссий.

Недавно было показано, что в сплавах SiGe, эпитаксиально-выращенных на Si подложках, имеют место аналогичные закономерности [2].

В нашей работе были исследованы структурно-фазовые превращения в сильнолегированных мышьяком слоях  $\text{Si}_{0.5}\text{Ge}_{0.5}$  сплавов, при равновесном термическом отжиге.

### ПРИГОТОВЛЕНИЕ ОБРАЗЦОВ

Релаксированные эпитаксиальные слои сплава  $\text{Si}_{0.5}\text{Ge}_{0.5}$  толщиной 2 мкм были выращены методом молекулярно-лучевой эпитаксии на подложках (001)-Si p-типа. При осаждении слоёв проводилась имплантация ионов мышьяка с энергией 1 кэВ, в результате на глубине 60 нм был сформирован слой  $\text{Si}_{0.5}\text{Ge}_{0.5} + \text{As}$ , с концентрацией мышьяка  $N_{\text{As}} \sim 2 \times 10^{21} \text{ см}^{-3}$ . Поскольку МЛЭ рост осуществлялся при повышенной температуре  $\sim 550^\circ\text{C}$ , радиационные дефекты структуры отжигались практически полностью уже во время имплантации. Вместе с тем, некоторое количество точечных дефектов, комплексов или протяженных дефектных образований может быть генерировано при таком методе легирования. После этого, образцы данной структуры отжигались в атмосфере кислорода в широком диапазоне температур в течение 2-60 мин. Химический состав образцов исследовался с помощью резерфордского обратного рассеяния каналированных ионов (РОРКИ) с использованием ионов  $\text{He}^+$  с энергией 1.5 МэВ. Структурно-фазовый состав был исследован методом просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) в режиме планарной геометрии. Для этих целей использовался просвечивающий электронный микроскоп ЭМ-125 с ускоряющим напряжением 100 кВ. Образцы для ПЭМ утонялись методом химико-динамического травления.

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Из *рис. 1* видно, что отжиг при  $720^\circ\text{C}$  приводит к появлению на спектре РОРКИ пиков обратно рассеянных ионов  $\text{He}^+$  от  $\text{O}_2$  (область каналов 120-130), Si (область каналов 200-210), а также увеличению выхода от тяжелых атомов - Ge, As (область каналов 290-310). Было обнаружено, что при низких температурах ( $200^\circ\text{C} - 750^\circ\text{C}$ ) окисление SiGe сплавов, с высокой концентрацией Ge ( $\geq 50\%$ ), приводит к образованию на поверхности смешанного оксида  $\text{SiO}_2$  и  $\text{GeO}_2$ , что хорошо согласуется с ранее полученными результатами [3]. Известно, что процесс деактивации мышьяка связан с формированием сложных точечных дефектов. При образовании нейтрального комплекса  $\text{As}_2\text{V}$ , происходит смещение атомов As из узлов решётки на величину  $\sim 0.015 \text{ нм}$  [4], что также влияет на увеличение пика выхода обратно рассеянных ионов от мышьяка.

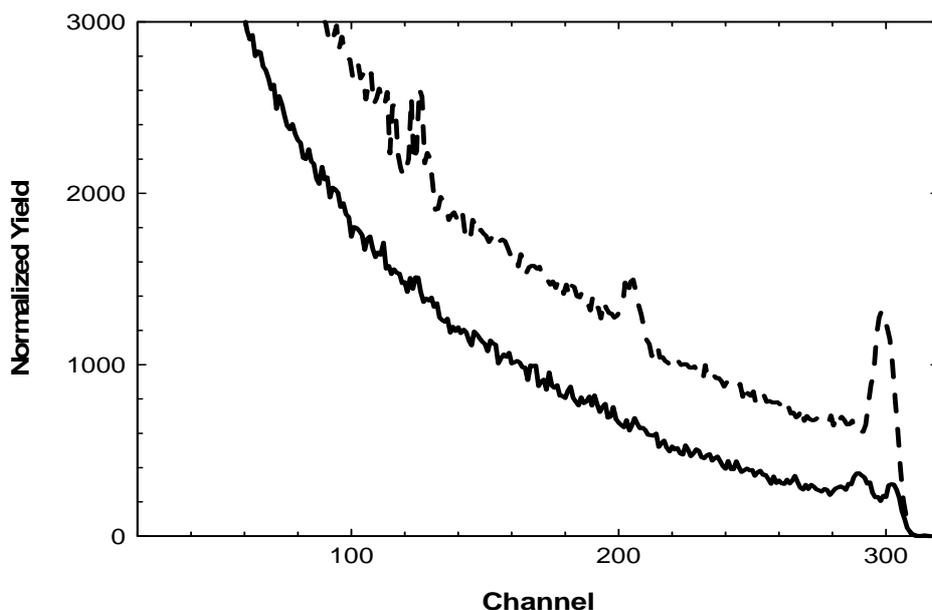


Рис. 1. Спектры РОР в каналированном режиме :  
 — исходная структура, - - после отжига при 720°C 10 минут

Также из спектров РОРКИ было установлено, что термическое окисление сплавов  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$  в атмосфере кислорода при температуре  $\sim 900^\circ\text{C}$  и выше, приводит к окислению Si до  $\text{SiO}_2$ , в результате Ge оттесняется фронтом окисла, смещаясь в глубь образца, вслед за движущейся границей раздела  $\text{SiGe}/\text{SiO}_2$ . Это связано с: существенными различиями между теплотами образования  $\text{SiO}_2$  и  $\text{GeO}_2$  (образование  $\text{SiO}_2$  значительно выгоднее) и малой растворимостью Ge в  $\text{SiO}_2$  [3].

Структурно-фазовые превращения в метастабильных слоях  $\text{SiGeAs}$  при дестабилизирующем термическом отжиге исследовались методом просвечивающей электронной микроскопии.

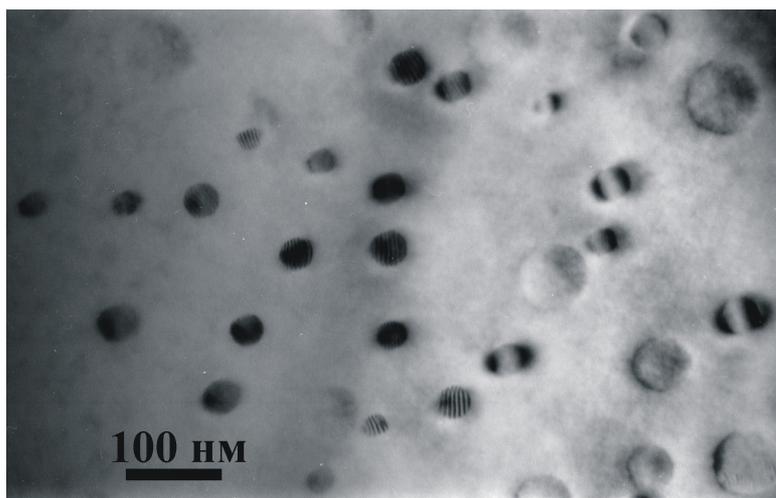


Рис. 2. Светлопольная ПЭМ микрофотография от образца после отжига при 915°C в течение 20 минут

Был установлен пороговый характер формирования наноразмерных преципитатов в матрице  $\text{SiGe}$ . Образование выделений вторичной фазы происходит при превышении граничной температуры ( $915^\circ\text{C}$ ) и сопровождается отжигом дефектов дислокационного типа

(рис. 2). Сравнительный анализ контраста микрофотографии на рис. 2 предоставляет убедительное свидетельство определяющей роли степени пересыщения на структурно-фазовый состав образцов. Так, микрофотография содержит темные пятна на сером фоне. Более темный абсорбционный ПЭМ – контраст пятен по сравнению с фоном указывает на то, что соответствующие им структурные образования являются преципитатами, включающими в свой состав большее количество тяжелых атомов, чем окружающая матрица. По результатам электронной дифракции было установлено в состав преципитатов входят атомы Ge и As. Это согласуется с результатами расчёта композиционного состава методом рентгеновского микроанализа в [2]. При длительных временах термического окисления при температуре выше граничной выделения фазы GeAs обнаружено не было, что связано с диффузионным перераспределением мышьяка в образце.

### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Таким образом, в данной работе были исследованы структурные превращения и поведение примеси в  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$  сплавах после высокодозной *in situ* имплантации ионов  $\text{As}^+$  и последующего дестабилизирующего отжига в различных режимах. Обнаружено образование смешанного оксида  $\text{SiO}_2\text{-GeO}_2$  при окислении сплава  $\text{Si}_{0.5}\text{Ge}_{0.5}$  в области температур  $500^\circ\text{C}$ – $750^\circ\text{C}$ , отжиг при температурах выше  $900^\circ\text{C}$  приводит к сегрегации Ge. Установлена пороговая зависимость выделения фазы GeAs, определена граничная температура  $915^\circ\text{C}$ , при которой образование GeAs преципитатов сопровождается отжигом дефектов дислокационного типа.

### **Литература**

1. *Nobili D. Solmi S. Parisini A. et.al. // Phys. Rev.*, 1994. – Vol. B 49. – N4, P. 2477-2483.
2. *Гайдук П. И.* Неравновесные процессы формирования материалов и структур твердотельной электроники: Дис... д-ра физ.-мат. наук. – Минск, 2004.
3. *Rabie M. A. Haddara Y. M. Carette J.* Kinetic model for the oxidation of silicon germanium alloys // *J. Appl. Phys.*, 2005, Vol. 98 (7).
4. *Nobili D. Carabelas* Precipitation as the phenomenon responsible for the electrically inactive arsenic in silicon // *J. Electrochem. Soc.*, 1983, N4, P922-928.

## **ЭФФЕКТ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

**Т. А. Бракоренко**

Одной из актуальных задач современного материаловедения является создание принципиально новых материалов, способных проявлять про-

граммируемые, существенно нелинейные деформационные свойства, вплоть до получения адаптивной (приспособительной) реакции на внешнее воздействие [1]. В частности, к таковым можно отнести материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона  $\nu$ , способные расширяться/сужаться в направлении, перпендикулярном одноосному растяжению/сжатию соответственно, иначе называемые ауксетичные или ауксетики [2].

У большинства конструкционных материалов значения  $\nu$  колеблются в пределах 0,2-0,4. Тем не менее, теоретические значения  $\nu$  для изотропного материала лежат в пределах  $-1 \leq \nu \leq 0,5$ . Что касается реализации программируемого деформационного поведения, ауксетики, в частности, позволяют в условиях стесненного деформирования достичь высокой несущей способности фрикционных соединений [3], что делает их наиболее предпочтительными для использования в крепежных изделиях.

Целью работы является анализ механизмов, приводящих к отрицательным значениям  $\nu$  в твердых телах, и нахождение такого материала с ауксетичными и неауксетичными включениями, который на тепловое воздействие отвечает нулевым тепловым расширением. Это сделает более широким дальнейшее использование ауксетиков в технике.

На сегодняшний день известно немало случаев проявления отрицательных значений  $\nu$  в кристаллах и композиционных материалах. Учеными было выделено три структурных уровня реализации данной аномалии деформационного поведения: макро-, мезо- и микроскопический. Также известны стержневые модели материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона [4]. Несмотря на то, что коэффициент Пуассона является структурно более чувствительной характеристикой по сравнению с модулем упругости, в литературе мало внимания уделяется изучению причин, ведущих к ауксетичному поведению на атомно-молекулярном уровне. Реализация отрицательных значений  $\nu$  на атомно-молекулярном уровне позволит создавать конструкционные материалы с программируемыми свойствами, а также избежать дефектности структуры и нарушения адгезионного контакта между компонентами. Однако, для решения задач по выявлению данного эффекта на уровне молекул и макромолекул требуется решение сложных квантовомеханических задач. Простейший способ их решения – перенесение принципа сочетания жестких и податливых элементов, реализованного на макро- и мезоскопическом уровнях в композитных материалах и пенопластах, на молекулярный уровень.

Помимо гипотетических структур [5], ауксетичное поведение на данном уровне проявляют жидкие кристаллы и многие монокристаллы металлов. Так, среди тригональных монокристаллов такими свойствами обладают мышьяк и висмут. Среди гексагональных плотноупакованных

фаз металлов – цинк и бериллий [6]. В большинстве случаев такие эффекты проявляются в кубических кристаллах вдоль некоторых кристаллографических осей.

В заключение анализа механизмов, приводящих к отрицательным значениям  $\nu$  в твердых телах, отмечу, что существуют альтернативные подходы к созданию ауксетичных фаз, основанные на моделировании упругих свойств термодинамически стабильных изотропных систем, состоящих из сферических частиц. Также был предложен механизм реализации отрицательных значений  $\nu$  в фрактальных средах [7].

Таким образом, в данной работе были описаны некоторые примеры успешной реализации методов молекулярной динамики и молекулярного дизайна для решения макромеханических задач по созданию аномально упругих материалов нового типа, которые, возможно, в будущем смогут применяться в различных областях науки и техники.

Выше было упомянуто о способности ауксетиков расширяться/сужаться в направлении, перпендикулярном одноосному растяжению/сжатию соответственно (рис. 1). Такое свойство делает оправданным предположение о существовании материала, состоящего из ауксетичных и неауксетичных включений, который «не реагирует» на тепловое воздействие. Формулировка проблемы в таком виде требует пояснения. Понятно, что деформации будут присутствовать как в ауксетичных, так и в неауксетичных слоях, но предполагается, что ауксетичный слой поглотит деформации неауксетичного и тепловое расширение материала в целом будет нулевым или даже отрицательным. При такой постановке возникает немало вопросов. Какова скорость поглощения деформаций? Как соотносятся скорость появления деформаций в неауксетичном слое и скорость ее поглощения в ауксетичном? Возможно ли получить отрицательный коэффициент линейного теплового расширения? На эти вопросы сейчас пытаются ответить многие группы ученых по всему миру.

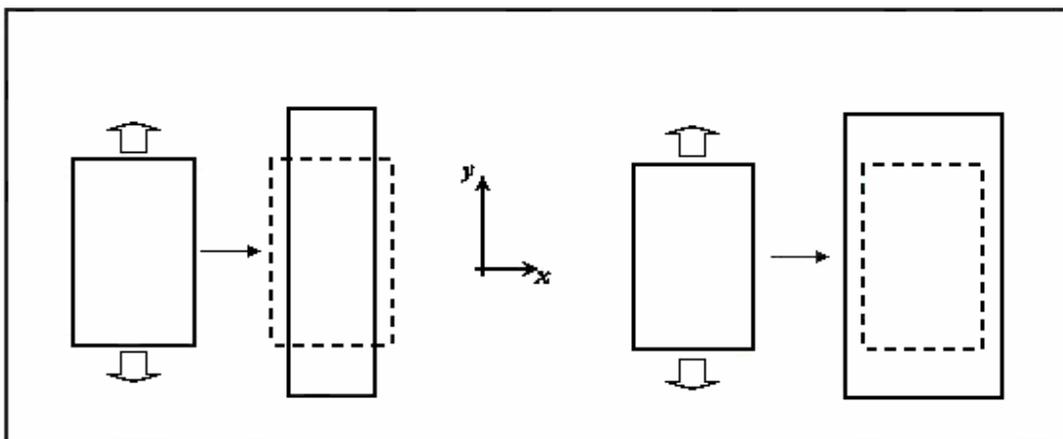


Рис. 1. Реакция неауксетичного (слева) и ауксетичного (справа) материалов на одноосное растяжение

Целью моей работы также является оптимизация геометрических параметров, таких как толщина, число слоев, вид элементарной ячейки и т.д., для того, чтобы получить материал с нулевым или близким к нулевому коэффициентом термического расширения.

В процессе решения данной задачи были сделаны следующие выводы.

Самой результативной оказалась слоистая схема укладки, т.е. чередование ауксетичного и неауксетичного слоев. Именно при таком способе укладки ауксетичных и неауксетичных слоев удалось достичь желаемых результатов. Слои в данной системе связаны без проскальзывания, трение между слоями не учитывается, т.е. слои свободно перемещаются друг относительно друга. За расчетный образец была взята система, состоящая из двух слоев, один из которых имеет положительный коэффициент Пуассона, а другой является ауксетиком. Были построены зависимости двух типов: зависимость термических перемещений:

- от коэффициента Пуассона,
- от толщины слоев системы.

Данные для расчета слоя, состоящего из обычного материала, были взяты из технических источников, т.е. коэффициенты Пуассона брались для реально существующих материалов (дерево, сталь, керамика). Данные для расчета слоя, состоящего из ауксетичного материала, брались с обратным знаком. При этом предполагается существование таких материалов и возможность их получения. Работа осложнялась отсутствием сведений в научной литературе о поведении ауксетиков в температурном поле. Тем не менее, графически удалось показать компенсацию перемещений составной пластины в результате наложения перемещений противоположного направления. Зависимость термических перемещений слоев от коэффициентов теплового расширения материалов, из которых данные слои состоят, показала, что перемещения тем меньше, чем устойчивее материал к температурному полю, т.е. при минимальном коэффициенте теплового расширения. При этом температура и толщина слоев не изменяются. Из зависимости термических перемещений слоев от их толщин, когда температура и коэффициенты теплового расширения материалов слоев постоянны, сделан вывод, что термические перемещения каждого отдельно взятого слоя не зависят от его толщины, что не противоречит принятым в ходе решения задачи предположениям. Зависимость термических перемещений слоев от коэффициента теплового расширения ауксетичного материала, из которого состоит верхний слой, когда температура, толщина слоев и коэффициент теплового расширения неауксетичного материала являются константами, демонстрирует то, что при определенных значениях коэффициента теплового расширения ауксетичного слоя возможно получение нулевых термических перемещений.

Таким образом, цель работы была успешно достигнута. Были получены условия, при которых возможно получение материала с нулевым коэффициентом теплового расширения. В процессе работы над решением данной проблемы возникли новые вопросы, поставлены новые цели, на достижение которых будет направлена наша дальнейшая деятельность.

### Литература

1. *Pleskachevsky Yu.M., Shilko S.V., Stelmakh S.V.* // Journal of Wave - Material Interaction.-1999.- Vol. 14, № 1 – 2, p.49 - 58.
2. *Конёк Д.А., Черноус Д.А., Бодрунов Н.Н.* // Материаловедение, технологии и экология на рубеже веков /Материалы Всерос. научн. конф.- Томск, 2000.- с.105 - 108.
3. *Шилько С.В.* // Трение и износ. - 1995. - Т. 15, № 3. - с.429 - 437.
4. *Конёк Д.А., Войцеховски К.В., Плескачевский Ю.М., Шилько С.В.* Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. // Механика композиционных материалов и конструкций.– 2004.– том 10, №1 – с.35-69.
5. *Lakes R. S.* // Advanced Materials.– 1993.–Vol.5.– P.293-296.
6. *Черноус Д.А., Шилько С.В., Плескачевский Ю.М.* // Механика композитных материалов и конструкций. - 1998. -№3. - с.28 - 38.
7. *Плескачевский Ю.М., Шилько С.В.* Ауксетики: модели и приложения. // Вести НАНБ.– 2003.– №4 – с.58-68.

## КОРОТКОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

А. К. Горбацевич, Е. Ю. Дедиц

### ВВЕДЕНИЕ

Геометрическая оптика – это раздел оптики, в котором изучаются законы распространения света на основе представлений о световых лучах. Под световым лучом при этом понимается линия, вдоль которой распространяется поток световой энергии. Понятие луча не противоречит действительности только в той мере, в какой можно пренебрегать дифракцией света на оптических неоднородностях, а это допустимо только тогда, когда длина световой волны много меньше размеров неоднородностей. Законы оптики, построенные на указанном предположении, позволяют создать упрощенную, но в большинстве случаев достаточно точную теорию оптических систем.

Приближение геометрической оптики с успехом применяется и для того, чтобы сделать некоторые выводы о законах распространения света в рамках общей теории относительности. Можно показать, что в искривленном пространстве-времени тоже можно ввести понятие «луча». Линиями, вдоль которых распространяется свет в искривленном пространстве-времени – лучами – будут являться изотропные геодезические. Этот факт может быть получен из анализа ковариантных уравнений Максвелла в предположении малости длины электромагнитной волны (напр. см. [1, 2]).

Цель настоящей работы – показать, что существует возможность применения приближения геометрической оптики и для изучения гравитационного излучения.

### КОРОТКОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Будем рассматривать метрику следующего вида:

$$g_{ij} = og_{ij} + h_{ij} \quad (1)$$

Здесь  $og_{ij}$  – метрика, являющаяся решением уравнений Эйнштейна,  $h_{ij}$  – малое возмущение метрики. Как и в линеаризованной теории гравитационного излучения, предполагается, что  $|h_{ij}| = nog_{ij}$ . Поднятие и опускание индексов производится при помощи  $og_{ij}$ .

Непосредственный переход к приближению геометрической оптики заключается в том, что возмущение метрики  $og_{ij}$  предполагается имеющим вид:

$$h_{ij} = a_{ij}(x)e^{i\omega s(x)} \quad (2)$$

Здесь  $s(x)$  – неизвестная функция координат;  $\omega$  является большой величиной. Для того, чтобы убедиться в справедливости такого приближения, отметим, что современные исследования допускают существование широкого диапазона длин гравитационных волн. Целый ряд космологических процессов (например, падение маленькой черной дыры в поле очень массивной) должен приводить к генерации волн с длинами порядка сотен километров. Понятно, что по сравнению с характерными астрофизическими масштабами эта величина может считаться очень малой [3].

Из анализа свернутого тензора кривизны, вычисленного с использованием обсужденной метрики, получается соотношение

$$\begin{cases} s_{,r} s^{,r} * = 0 \\ a_{,ri} s^{,r} * = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Первая возможность приводит к тому, что вклад от возмущения метрики окажется равным нулю. Такой вариант не представляет никакого интереса.

Второй вариант приводит нас к следующей интерпретации полученного результата. Обозначая  $s^{,r} = dx^r/d\lambda \equiv k^r$ , где  $\lambda$  некий параметр, получаем возможность трактовать вектор  $k^r$  как нормальный к поверхностям, на которых  $s(x) = \text{const}$ . Таким образом  $k^r$  приобретает смысл волнового вектора. При этом (3.2) обозначает поперечность волны.

Нетрудно показать, что при таком рассмотрении вектор  $k^r$  оказывается удовлетворяющим уравнению:

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{mn} k^m k^n = 0 \quad (4)$$

Из приведенных рассуждений следует, что гравитационная волна должна при нашем рассмотрении распространяться вдоль изотропных геодезических.

Дальнейший анализ тензора кривизны приводит к соотношению

$$(Wk^j)_{;j} = 0 \quad (5)$$

Здесь была введена величина  $W = a^{ij} a_{ij}$ , которая представляет собой некий аналог энергии рассматриваемой гравитационной волны. Аналогия с энергией возможна из-за того, что  $W$  является фактически «квадратом амплитуды». Таким образом, выражение (5) выражает тот факт, что

энергия гравитационной волны в коротковолновом приближении оказывается величиной, сохраняющейся вдоль «луча».

Полученные общие результаты для законов распространения гравитационных волн могут быть легко применены к рассмотрению конкретной задачи, например, вычислению красного смещения в метрике Робертсона-Уолкера.

Рассмотрим красное смещение в метрике Робертсона-Уолкера. Используя опять метрику в виде

$$ds^2 = R^2(t) \left[ d\chi^2 + f^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] - c^2 dt^2. \quad (6)$$

Из анализа геодезических в указанной метрике можно получить отношение регистрируемой частоты гравитационной волны к частоте испущенной волны в виде:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{A_1 R(t_2) - \sqrt{\frac{A_1^2}{R(t_2)} + c^2}}{A_2 R(t_1) - \sqrt{\frac{A_2^2}{R(t_1)} + c^2}} \cdot \frac{R(t_1)}{R(t_2)} \quad (7)$$

Здесь  $A_1$  и  $A_2$  – константы, характеризующие скорости источника волны и детектора;  $t_1$  и  $t_2$  – моменты времени, когда волна испущена и детектирована соответственно.

Таким образом, в рамках приближения геометрической оптики частота гравитационного излучения в метрике Робертсона-Уолкера будет претерпевать обычное красное смещение. Если в последней формуле положить  $A_2 = A_1 = 0$  (это будет соответствовать тому факту, что и наблюдатель и источник свободно падают), то формула примет известный вид, который приводится во многих руководствах (напр. см. [2]):

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R(t_1)}{R(t_2)} \quad (8)$$

## ВЫВОД

Перечислим кратко основные результаты, полученные в работе.

Мы показали, что в рамках коротковолнового приближения гравитационные волны являются поперечными и распространяются вдоль изотропных геодезических. Возможно ввести понятие «луча», вдоль которого происходит распространение гравитационной волны. Конкретизируя вид метрики, можно рассчитать возможные траектории – «лучи» для волны (такowymi будут изотропные геодезические). Кроме того, удалось

показать, что в этом же приближении энергия гравитационной волны оказывается сохраняющейся.

Также рассмотрено красное смещение для коротковолнового излучения в метрике Робертсона-Уолкера и получены результаты, совпадающие с известными в литературе результатами для электромагнитных волн.

### Литература

1. *Вайнберг С.* Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности. Издательство «Мир», Москва, 1975.
2. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.*, Гравитация. Издательство «Мир», Москва, 1977.
3. *Ignazio Ciufolini, Vittorio Gorini, Ugo Moschella* Gravitational Waves, IOP Publishing Ltd. 2001

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ЭМИССИОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕН ИНДУКЦИИ И РЕАКЦИИ В ПРОПАН - ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ

А. Н. Деревяго

### ВВЕДЕНИЕ

Пропан является простейшим углеводородом, который может применяться в виде жидкого топлива. Общая энергия активации и задержки воспламенения пропана схожи с характеристиками авиационных керосинов, которые используются в авиационных и ракетных двигателях в качестве горючего. Кроме того, механизм окисления пропана во многом повторяет механизмы окисления тяжелых углеводородов. По этой причине он часто рассматривается как модельное топливо при численных и экспериментальных исследованиях процессов горения и детонации в двигательных устройствах. Однако в настоящее время, существует недостаток экспериментальных данных, касающихся горения и самовоспламенения смесей пропана и воздуха в широком диапазоне температур и давлений. Цель настоящей работы состояла в изучении этих процессов за отраженной ударной волной при высоких давлениях и температурах.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Схема экспериментальной установки и чертежи измерительных секций приведены на рис. 1,2. Ударная труба из нержавеющей стали, диаметром 76 мм и длиной 5,5 м применялась для проведения измерений задержки воспламенения и времени реакции за отраженной ударной волной (ОУВ). Опыты проводились в стехиометрической пропан-воздушной

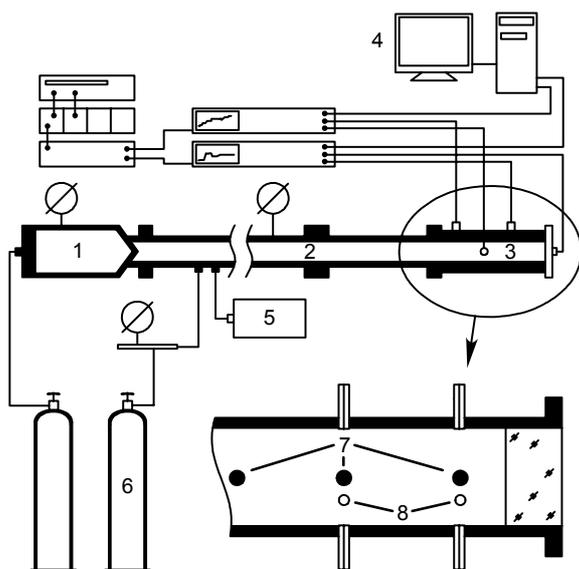


Рис. 1. Схема ударной трубы  
(диаметр 76 мм):

- 1 – бездиафрагменная камера высокого давления; 2 – камера низкого давления; 3 – измерительная секция; 4 – цифровые осциллографы; 5 – вакуумные насосы; 6 – цилиндр с исследуемой смесью; 7 – датчики давления; 8 – ионизационные датчики

смеси при давлениях за ОУВ  $P = 5-8$  атм. и плотностях за ОУВ  $\approx 2$  кг/м<sup>3</sup>. Химически чистый пропан (99,99 %) и сжатый воздух высокого давления применялись для приготовления газовых составов. Смеси газов готовились манометрическим способом и отстаивались перед употреблением в течение нескольких суток. Перед экспериментом труба дважды вакуумировалась до остаточного давления  $\sim 10^{-2}$  мм рт.ст. Для исключения влияния паразитных примесей на состав газа в камере низкого давления УТ внутренний канал трубы промывался исследуемой смесью перед вторичным вакуумированием. Начальное давление в УТ контролировалось с помощью образцового манометра с точностью  $\pm 0,3$  мм рт. ст.

метра с точностью  $\pm 0,3$  мм рт. ст.

Регистрация динамики изменения давления в различных сечениях установки осуществлялась предварительно калиброванными пьезоэлектрическими датчиками. Параметры газа рассчитывались с помощью ударной адиабаты по измерению скорости падающей ударной волны. Скорость определялась по времени прихода волны на датчики давления, расположенные в различных сечениях измерительной секции ударной трубы. Первичная регистрация сигналов осуществлялась с помощью шестиканальных 10-разрядных цифровых осциллографов. Анализ результатов измерений и расчет термодинамических параметров среды производились с применением автоматизированной системы сбора и обработки экспериментальных данных.

Воспламенения смеси наблюдалось через прозрачное оптическое окно, присоединенное к торцу ударной трубы, а также через окна, вставленные в боковую стенку на расстояниях 10 и 86,5 мм от отражающего торца (рис. 2).

Узкополосные интерференционные фильтры использовались для пропускания свечения промежуточных радикалов в нужном спектральном диапазоне. Свечение радикала  $C_2$  на длине волны  $\lambda = 516,2$  нм, радикала

СН на  $\lambda = 430,8$  нм и ОН на  $\lambda = 306,2$  нм использовалось для измерения времен индукции и реакции смеси.

В данной работе задержка воспламенения, или время индукции смеси, определялась как интервал времени между началом отражения УВ и моментом возникновения свечения в объеме реагирующей смеси на требуемом уровне интенсивности. Время реакции определялось как интервал времени между началом излучения и временем достижения сигналом свечения первого плато.

Основные погрешности измерений были связаны с нечеткостью критерия для определения времени реакции. На регистрацию излучения среды в поперечном направлении могут оказывать влияние различные эффекты (конечные размеры объема излучающего газа внутри трубы, трехмерная структура зоны реакции, обусловленная пограничным слоем, локальными очагами воспламенения и другими неоднородными явлениями). При скорости равной скорости детонации и выбранном оптическом разрешении это увеличивает наблюдаемые времена реакции по крайней мере в 2 раза по сравнению с рассчитанными.

Как правило, это также вызывает увеличение измеренного времени реакции. Точный учет влияния этих факторов на измеренные времена реакции затруднителен и едва ли возможен. Поэтому измерения времени реакции с погрешностью до 100 % следует считать приемлемыми.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты измерений задержки воспламенения и времени реакции в стехиометрической пропан-воздушной смеси при средней плотности  $\rho = 1,99 \pm 0,16$  кг/м<sup>3</sup> за отраженной ударной волной представлены на рис. 3. Регистрация проводилась на расстоянии 10 мм от торца ударной трубы. Аппроксимация экспериментальных данных и результаты численного моделирования по детальному кинетическому механизму окис-

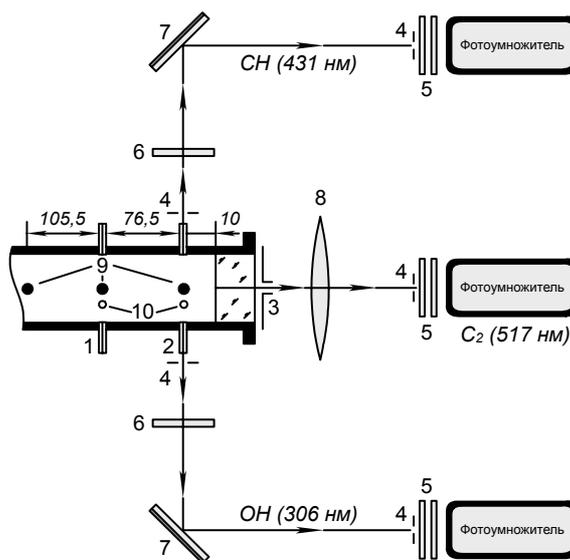


Рис. 2. Схема измерительной секции ударной трубы:

1;2 – кварцевые и CaF<sub>2</sub> окна (Ø 8 мм); 3 – прозрачный отражающий торец ударной трубы с полевыми диафрагмой (Ø 5 мм); 4 – полевые диафрагмы (Ø 1 мм); 5 – ОН, СН, С<sub>2</sub> узкополосные интерференционные фильтры; 6 – широко полосные свето- и УФ фильтры; 7 – зеркала; 8 – линза; 9 – датчики давления; 10 – ионизационные датчики

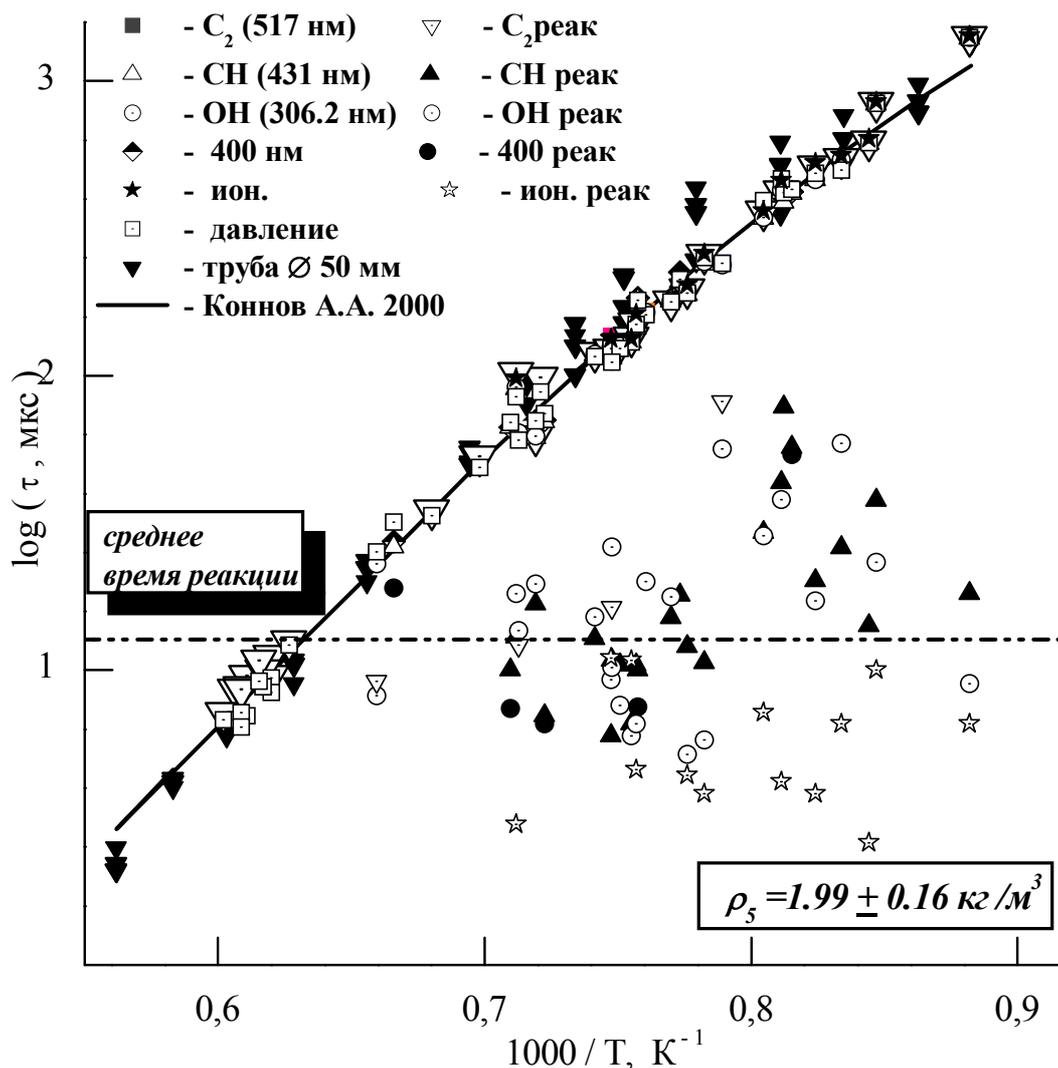


Рис. 3. Зависимость времен индукции и реакции от обратной температуры пропана (А. А. Коннов [2]) также приведены на рисунках. Видно, что результаты численных расчетов удовлетворительно описывают экспериментальные данные в изученном диапазоне изменения параметров.

Для сравнения на том же графике приведены данные, полученные на ударной трубе меньшего диаметра (50 мм). Как видно из рис. 3, время реакции почти не зависит от температуры в изученном диапазоне изменения параметров, т.к. плотность смеси приблизительно оставалась постоянной.

При температурах  $T < 1300 \text{ К}$  по эмиссионным измерениям получаются большие времена реакции, чем при высоких температурах. Причина этого проста: при температурах  $T < 1340 \text{ К}$  мы имеем границу между сильным и переходным режимами воспламенения. Поэтому при более низких температурах возникают локальные очаги самовоспламенения, и

фронт реакции не плоский, что приводит к росту показаний при измерениях времени реакции. Это подтверждается тем, что ионизационные датчики дают приблизительно постоянное значение для времени реакции в изученном диапазоне температур (рис. 3).

#### Литература

1. *Konnov A. A.* Detailed reaction mechanism for small hydrocarbons combustion / Release 0.4. 1998. <http://homepages.vub.ac.be//akonnov>.

### **ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ГИПОЛИПИДЕМИЧЕСКОЙ ТЕРАПИИ НА РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭРИТРОЦИТОВ ПРИ ИШЕМИЧЕСКОЙ БОЛЕЗНИ СЕРДЦА**

**Е. С. Дрозд, Е. Э. Константинова**

Изучение патогенеза атеросклероза, имея вековую историю, остается одной из важнейших проблем современной кардиологии. Сложности ее решения связаны, в первую очередь, с трудностью определения начальной стадии заболевания, большим многообразием этиологических факторов, с тем, что течение атеросклероза очень растянуто во времени, происходит постоянная смена причинно-следственных взаимосвязей, постепенно поражается несколько систем и органов, затруднено выделение ведущих этиологических факторов.

Несмотря на большое количество теорий, и гипотез, по мнению большинства исследователей, в основе атеросклероза лежит системное нарушений липидного обмена организма в целом [3]. При этом главная роль отводится изменениям обмена холестерина (ХС).

Клинические наблюдения свидетельствуют о том, что дислипотеинемия является основным фактором риска атеросклероза и ишемической болезни сердца (ИБС). Известно также, что состояние микроциркуляции и реологические свойства крови играют важную роль в течении и прогрессировании ИБС. В связи с чем, задача исследования состояния микроциркуляции и реологических свойств крови у больных ИБС в условиях дислипотеинемий, а также влияния основных гиполипидемических препаратов на показатели микроциркуляции и гемореологии является актуальной, как с позиций изучения механизмов прогрессирования заболевания, так и повышения эффективности первичной и вторичной профилактики ИБС.

#### **ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ**

Изучить влияние различных видов медикаментозной гиполипидемической терапии на реологические характеристики эритроцитов у больных ИБС.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для достижения поставленной цели в исследование было включено 140 (из 220 обследованных) больных ИБС со стабильной стенокардией 2–3 функционального класса (средний возраст –  $49 \pm 2,4$  года; 86 мужчин и 54 женщины) и 80 практически здоровых лиц (средний возраст –  $42 \pm 0,38$  года; 24 мужчины и 56 женщин). У всех обследованных определялись концентрации в плазме крови общего холестерина (ОХС), холестерина липопротеинов высокой (ХС-ЛПВП) и низкой (ХС-ЛПНП) плотности и триглицеридов (ТГ). В качестве показателя деформируемости красных клеток крови использовали индекс ригидности эритроцитов (ИРЭ). Для оценки начальной скорости и степени агрегации эритроцитов измеряли скорость их оседания через 1 (СОЭ1) и 2 (СОЭ2) часа.

Больным ИБС проводилась, по результатам исследования липидного состава плазмы крови, соответствующая гиполипидемическая терапия с применением препаратов из групп:  $\omega$ -3 ПНЖК (эйконол в суточной дозе 2,7 и 5,4 г. в зависимости от выраженности ДЛП), статинов (симвастатин в дозе 20 мг/сут.) и фибратов (ципрофибрат в дозе 100 мг/сут.).

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

При исследовании липидного состава плазмы крови установлено, что у больных ИБС имеет место 3 типа нарушений липидного состава плазмы. В соответствии с этим были сформированы 3 группы пациентов: 1 – лица с пограничной гиперхолестеринемией ( $5,0 < \text{ОХС} < 6,5$  мм/л) и пограничной гипертриглицеридемией ( $1,8 < \text{ТГ} < 2,3$  мм/л), 2 – лица с умеренной гиперхолестеринемией ( $6,5 < \text{ОХС} < 7,8$  мм/л) и пограничной гипертриглицеридемией, 3 – лица с умеренной гиперхолестеринемией и умеренной гипертриглицеридемией ( $2,3 < \text{ТГ} < 3,5$  мм/л).

Результаты сравнения реологических характеристик эритроцитов и показателей липидного обмена между группой здоровых лиц и представленными группами больных ИБС указывают на повышенный атерогенный потенциал плазмы крови и нарушения гемореологии при ИБС. Так, у здоровых лиц ХС-ЛПНП составляет  $3,54 \pm 0,09$  мм/л, а у больных 1, 2, 3 групп –  $3,89 \pm 0,07$ ;  $5,16 \pm 0,09$ ;  $4,68 \pm 0,18$  мм/л, соответственно. Отношение ОХС/ХС-ЛПВП у здоровых лиц равно  $4,08 \pm 0,12$ , а у больных 1, 2, 3 групп –  $5,27 \pm 0,24$ ,  $5,92 \pm 0,31$  и  $6,14 \pm 0,26$ , соответственно. У больных всех трех групп имеет место повышение ИРЭ по сравнению с контрольной группой. В группе 1 ИРЭ на 33,9 %, в группе 2 на 94,8%, а в группе 3 на 73,2% выше, чем в группе здоровых лиц. В группе 1 показатель СОЭ<sub>1</sub> на 9,5% выше, чем в группе здоровых лиц. В группах 2 и 3 степень повышения данного показателя в сравнении с контрольной группой состави-

ла, соответственно, 52,8% и 49,2%. Таким образом, у больных ИБС с различными типами нарушений липидного состава плазмы крови имеет место снижение деформируемости эритроцитов и повышение начальной скорости образования эритроцитарных агрегатов. При этом у больных группы 2 повышена также степень агрегации красных клеток. Увеличение агрегационной способности красных клеток крови может быть объяснено уменьшением электрического потенциала их мембран [1, 2].

Пациентам с пограничной гиперхолестеринемией назначался эйконол в суточной дозе 2,7 г. Контроль изучаемых показателей проводился через 1 и 3 месяца приема препарата. Полученные данные указывают на то, что после приема эйконола в суточной дозе 2,7 г происходит перераспределение фракций ХС в сторону снижения атерогенности липидного состава плазмы крови. Гиполипидемический эффект сопровождается улучшением гемореологии, которое выражается в повышении деформируемости (ИРЭ через 3 месяца снижается на 25,7%) и снижении агрегационной способности эритроцитов через 3 месяца приема препарата в данной суточной дозе (показатель СОЭ1 снизился на 32,3%, а СОЭ2 – на 22,6%).

При умеренной гиперхолестеринемии через 1 месяц приема эйконола в суточной дозе 5,4 г концентрации ОХС и ХС-ЛПНП достоверно снизились на 20,9% и 25,5%, соответственно. Через 3 месяца имеет место дальнейшее снижение указанных параметров и уменьшение ТГ на 20,5%. То есть, прием эйконола в данном случае приводит к значительному снижению атерогенного потенциала плазмы крови. Этот эффект сопровождается улучшением реологических свойств крови уже через 1 месяц лечения. Достигнутые уровни повышения деформируемости и снижения агрегационной способности эритроцитов сохраняются и через 3 месяца терапии.

У больных ИБС с умеренной гипертриглицеридемией для коррекции нарушений липидного состава плазмы крови применялся ципрофибрат в суточной дозе 100 мг. Через 1 месяц лечения концентрации ОХС, ТГ, ХС-ЛПОНП, ХС-ЛПНП достоверно снизились до пограничных значений. Концентрация ХС-ЛПВП достоверно увеличилась на 24,7% по сравнению с исходной. При оценке реологических свойств эритроцитов установлено, что у больных ИБС с умеренной гипертриглицеридемией на фоне приема ципрофибрата деформируемость и начальная скорость образования агрегатов эритроцитов не изменяется. Степень же агрегации красных клеток снижается на 35,3%. Следовательно, применение данного препарата уменьшает риск прогрессирования атеросклероза, как за счет снижения атерогенного потенциала плазмы крови, так и за счет снижения агрегационной способности эритроцитов.

У больных ИБС с умеренной гиперхолестеринемией для коррекции нарушений липидного состава плазмы крови применялся симвастатин в суточной дозе 20 мг. Применение данного препарата в течение 1 месяца приводит к выраженному снижению концентрации ОХС и ХС-ЛПНП в плазме крови на 24,9% и 29,2%, соответственно. Этот эффект сопровождается нормализацией деформируемости эритроцитов (ИРЭ снижается на 46,5%) и выраженным снижением их агрегационной способности (СОЭ1 снижается на 44,8 %, а СОЭ2 – на 33,3%). Это, в свою очередь, снижает риск прогрессирования ИБС, в том числе, и за счет адекватного выполнения эритроцитами транспортной функции.

## **ВЫВОДЫ**

1. У больных ИБС концентрации ОХС, ХС-ЛПОНП, ХС-ЛПНП и ТГ повышены, а концентрация ХС-ЛПВП снижена по сравнению с группой здоровых лиц, то есть при ИБС имеют место атерогенные нарушения липидного состава плазмы крови.

2. У больных ИБС в условиях дислипотеимий различного характера снижается деформируемость эритроцитов и возрастает способность красных клеток к агрегации. Наиболее выраженные нарушения имеют место при сочетании умеренной гиперхолестеринемии и пограничной гипертриглицеридемии.

3. Влияние различных видов гиполипидемической терапии на реологические характеристики эритроцитов зависит от исходного типа ДЛП и применяемого для ее коррекции препарата. При применении эйконола в суточной дозе 2,7 г у больных ИБС с пограничной гиперхолестеринемией реологический эффект зависит от длительности лечения. При использовании ципрофибрата у больных ИБС с умеренной гипертриглицеридемией эффект снижения агрегационной способности эритроцитов связан с уменьшением концентрации ТГ в плазме крови. При коррекции умеренной гиперхолестеринемии как с применением эйконола в суточной дозе 5,4 г, так и симвастатина, повышение деформируемости и снижение агрегационной способности эритроцитов связано с выраженным уменьшением концентрации ОХС плазмы крови.

## **Литература**

1. Орлов В. Н., Васильева Е. Ю., Шпектор А. В. и др Особенности нарушения гемостаза и липидного обмена у больных с различными патогенетическими формами стенокардии. // Кардиология.–1990.– Т.30, № 8.– С.14–17.
2. Brooks D. E. Current models of red blood cell aggregation. // Biorheology. – 1995. – Vol.32, № 2–3. – P.103.
3. Epstein F. H. Risk factor Hiperlipidaemie heute. // Aktuel. Endokrinol. Stoffwechsel. – 1981. – Bd.2. – N 1. – P. 1–4.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТРЕТЬИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ЛИНИЙ В СПЕКТРАХ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ МЕДИ

К. Ф. Ермалицкая

Целью данной работы было обнаружение влияния третьих элементов на интенсивность линий, изучение закономерностей и подбор оптимальных условий для количественного анализа сплавов на основе меди методом высоковольтной конденсированной искры.

Вопросами, связанными с влиянием структуры и состава медных сплавов на проведение спектрального анализа много занимались ранее [1,2]. Из этих работ следует, что спектральном анализе латуни необходимо учитывать следующие особенности:

- количество вещества двухкомпонентной латуни (сплав меди и цинка), поступившего в газовую фазу, очень сильно зависит от концентрации цинка в сплаве [3]. Поступление минимального количества вещества сплава соответствует концентрации цинка 20–30%. Линейная зависимость между количеством цинка, поступившим в газовую фазу, и концентрацией цинка в сплаве отсутствует. Наименьшее количество меди, поступающее в газовое облако, соответствует интервалу концентрации этого элемента в сплаве 60–80%. В этом же интервале концентраций наблюдается убывание зависимости  $\lg I$  ( $\lg c$ ).

- В свинцовой латуни (трехкомпонентный сплав меди, цинка и свинца) цинк влияет на определение свинца. Установлено, что приращение относительной интенсивности линии свинца прямо пропорционально логарифму концентрации цинка [4].

- В кремнистой латуни (трехкомпонентный сплав меди, цинка и кремния) кремний влияет на определение цинка. Если в кремнистой латуни присутствует свинец, то характер влияния кремния на цинк остается прежним. Интенсивность же линии свинца испытывает двойное влияние: непосредственное со стороны цинка и косвенное со стороны кремния [4].

- Латуни, содержащие меньше 14% цинка, дают окислы с содержанием меди и цинка примерно в том же соотношении, как и в сплаве. Латуни, содержащие более 20% цинка, дают окислы практически из чистой окиси цинка. Все сплавы, имеющие менее 14% цинка, окисляются приблизительно с такой же скоростью, как чистая медь. Сплавы с 20–40% цинка окисляются со скоростью, в восемь раз меньшей и почти независимой от содержания цинка [5].

Поскольку в двухкомпонентной латуни в области концентраций меди 60–80 % наблюдалось аномальное поведение зависимости  $I_g I$  ( $I_g c$ ), то для исследования многокомпонентных медных сплавов были выбраны стандартные образцы М15 (11 образцов), процентное содержание меди в которых составляет 59–74%. Данные о среднем содержании элементов в этих образцах приведены в *табл. 1*.

В качестве источников возбуждения спектра использовался стандартный генератор УВ11 и разработанные нами искровые генераторы ЭМИГ1[6] и ЭМИГ2. По сравнению с классическими источниками высоковольтной конденсированной искры ЭМИГ1 и ЭМИГ2 обладают рядом преимуществ:

- Большая мощность искры генераторов позволяет значительно снизить время предварительного обескряживания образцов.
- Большие частоты искровых разрядов разработанных генераторов дополнительно возбуждают атомы вещества уже поступившие в газовое облако разряда, тем самым увеличивая время их пребывания в разряде и регистрируемую интенсивность.
- Разработанные генераторы обеспечивают высокую стабильность возбуждения в газовом облаке, что приводит к уменьшению погрешности количественного анализа.
- Конденсированная искра генераторов ЭМИГ1 и ЭМИГ2 чувствительна к структуре проб и их составу.

Исследование зависимости интенсивности от концентрации при помощи генераторов УВ11, ЭМИГ1 и ЭМИГ2 позволило сделать следующие выводы:

*Таблица 1*

**Среднее содержание элементов в стандартных образцах М15 №150–160, %**

Элемент № образца	Fe	Pb	Sn	Al	Si	Ni	Cu	Zn
150	0,170	0,429	0,062	0,198	0,112	0,594	58,74	37,8
151	0,159	0,767	0,116	0,364	0,166	0,409	60,08	35,6
152	0,081	1,07	0,141	0,387	0,203	0,239	60,81	36,3
153	0,090	1,92	0,254	0,288	0,320	0,308	62,91	33,1
154	0,074	1,41	0,199	0,193	0,210	0,634	62,19	34,6
155	0,157	1,88	0,229	0,195	0,121	0,518	64,90	31,0
156	0,133	1,85	0,346	0,217	0,180	0,305	66,37	29,2
157	0,128	2,90	0,232	0,291	0,339	0,446	63,63	30,5
158	0,088	1,37	0,158	0,215	0,179	0,716	70,72	27,1
159	0,120	1,35	0,259	0,129	0,124	0,270	69,14	27,7
160	0,163	2,45	0,269	0,118	0,074	0,463	73,90	22,3

- У кремния отсутствует зависимость интенсивности от концентрации, однако при увеличении частоты (генераторы ЭМИГ1 и ЭМИГ2), график смещается практически параллельно сам себе и не изменяется взаимное расположение точек.

- Для свинца при использовании любого искрового генератора общий вид зависимости принципиально не изменяется: наблюдается практически линейная зависимость до 1,85%, затем небольшой спад до 2,45%, а затем снова возрастание.

- У цинка полученные зависимости можно с некоторой точностью считать линейными. Причем при концентрации цинка в сплаве менее 33% точность такого приближения достаточно высока. При больших концентрациях увеличивается разброс точек. При увеличении частоты разряда зависимость ближе к линейной, при увеличении же мощности погрешность такого приближения увеличивается.

- Для меди зависимости практически линейные и параллельные оси абсцисс, то есть в интервале концентраций 59–74% меди в многокомпонентной латуни отсутствует зависимость интенсивности линий от концентрации, в отличие от двухкомпонентных медных сплавов.

Исследование кинетики интенсивностей линий кремния, цинка, свинца и меди позволило сделать следующие выводы. Поступление вещества сплава в атмосферу воздуха происходит в известной степени из окисной пленки, образующейся под воздействием искры. Скорость поступления данной составляющей пробы в разряд определяется с одной стороны, кинетикой реакции окисления на обыскриваемой поверхности пробы, а с другой – скоростью перемещения составляющей из глубины пробы к этой поверхности вследствие диффузии. Скорость диффузии металлов в металлических сплавах сравнительно высока. Поэтому даже при малых содержаниях металлических примесей в сплаве удается получать линии этих примесей вполне удовлетворительной интенсивности. Что же касается большинства неметаллов, то они диффундируют либо в виде атомов, либо в виде отрицательных ионов, т. е. в виде сравнительно крупных частиц, что затрудняет их перемещение внутри металла-растворителя. В связи с этим устойчивый спектр кремния получить не удастся, поскольку интенсивное расходование кремния в обыскриваемом слое не восполняется диффузией.

Было установлено, что в многокомпонентных латунях цинк влияет на определение свинца, и для уменьшения ошибки определения количественного содержания в сплаве последнего градуировочные графики необходимо строить в относительных координатах  $\lg I_{Pb}/I_{Zn}$  ( $\lg c_{Pb}/c_{Zn}$ ). Такая зависимость для всех используемых генераторов с высокой точностью

**Значения коэффициента корреляции R и стандартного отклонения,  
рассчитанного из уравнения линейной регрессии**

Искровой генератор	УВН	ЭМИГ1		ЭМИГ2		
Частота, Гц	100	165	400	10	100	200
R	0,93	0,79	0,97	0,89	0,96	0,86
SD	0,11	0,2	0,09	0,18	0,07	0,13

может быть описана линейной зависимостью. Критериями возможности такого приближения будут служить коэффициент корреляции R, показывающий насколько данная зависимость линейна (при R = 1 – зависимость полностью совпадает с прямой), и стандартного отклонение SD – табл.2.

### Литература

1. *Белькевич Я. П.*, Опыт спектрального анализа сплавов на медной основе. Судпромгиз, 1955.
2. *Буравлев Ю. М.* Влияние структуры на результаты спектрального анализа сплавов. М., Metallurgizdat, 1963.
3. *Рудневский Н. К., Дряхлов А. И.* Особенности поступления медно-цинкового сплава в искре// Материалы X Всесоюзного совещания по спектроскопии, т. II, Атомная спектроскопия – С.296–298.
4. *Борбат А. М.* Учет влияния третьих составляющих при анализе сплавов на медной основе// Материалы X Всесоюзного совещания по спектроскопии, том II, Атомная спектроскопия – С.435–438.
5. *Dunn. I.* Inst. Metals, Advance Copy, 567, 24, 1931.
6. *Воропай Е. С., Зажогин А. П., Серафимович А. И., Ермалицкая К. Ф.* Малогабаритный генератор для возбуждения атомно-эмиссионных спектров//Спектральные приборы для аналитических применений. /Под редакцией Е. С. Воропая. Мн. - БГУ.-2005.

## ВЛИЯНИЕ МЕЛАНИНА НА КИСЛОТНЫЙ ГЕМОЛИЗ ЭРИТРОЦИТОВ

**Е. В. Карпусенко**

Меланины широко распространены в природе и встречаются как в животном, так и в растительном мире. Они представляют собой группу высокомолекулярных пигментов [1].

Образуются при энзиматическом окислении фенолов, главным образом, пирокатехина, 3,4-диоксифенилаланина (ДОФА) и 5,6-диоксииндола [2; 3].

Интерес к исследованию меланиновых пигментов связан с их свойствами: противоопухолевыми, антиоксидантными, радиопротекторными, электронно- и ионно-обменными и др [4; 5].

В данной работе исследуется влияние меланиновых структур на гемолиз эритроцитов, индуцированный соляной кислотой.

Меланин получали озонированием водного раствора тирозина ( $C = 0,5\%$ ) при щелочных значениях pH. Синтез проводили при комнатной температуре. После озонирования растворов тирозина pH пробы доводили до кислых значений, центрифугировали 10 минут при  $g = 8000$  об/мин. Осадок высушивали при температуре  $140^\circ\text{C}$  в течение суток. Полученные при синтезе препараты разделяли по поглощенной дозе озона  $F$ .

Измерения интенсивности рассеянного света проводили при комнатной температуре для угла  $3^\circ$ . Интенсивность рассеянного эритроцитами света изменяется в процессе гемолиза, индуцированного соляной кислотой. Кинетика изменения размеров и разрушения эритроцитов в процессе кислотного гемолиза носит сложный характер, отражая прохождение эритроцитами различных структурных состояний.

Для характеристики структурно-функциональных изменений состояния эритроцитов при гемолизе вводят следующие параметры:  $t_n$  – время набухания;  $t_l$  – время лизиса (рис. 1).

Были проведены исследования влияния меланина на структурное состояние эритроцитарных мембран в процессе гемолиза, вызванного кислотой.

Измеренные зависимости параметров гемолиза от времени инкубации суспензии эритроцитов с меланином имели следующий вид (рис. 1).

При времени инкубации менее 4 минут скорость лизиса снижается. Дальнейшее увеличение времени инкубации приводит к росту скорости лизиса.

Кинетические кривые гемолиза при различных концентрациях меланина представлены на рис. 2. Концентрации меланина  $\sim 2 \cdot 10^{-3}\%$  вызывают процесс торможения скорости лизиса.

Защитное действие синтезированных соединений зависит от концентрации препаратов, полученных на разных стадиях технологического процесса, в растворе. Графики зависимости времени набухания и вре-

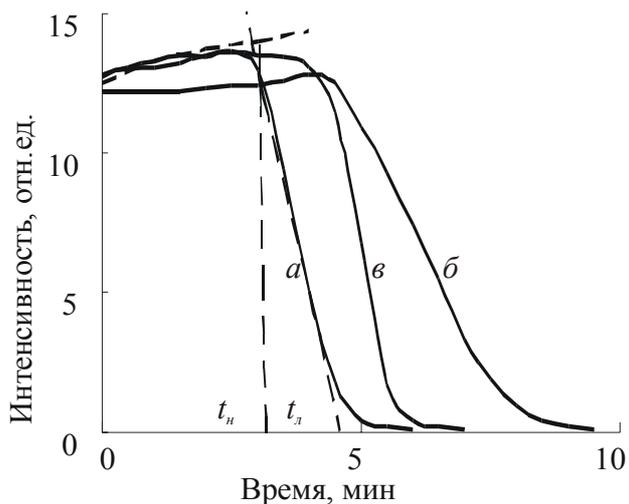


Рис. 1. Кинетические кривые гемолиза эритроцитов в зависимости от времени инкубации ( $F = 0,58$  моль озона/моль тирозина,  $C_m = 0,0042\%$ , pH = 2,8) а контроль (без меланина); б 2 мин инкубации; в 10 мин инкубации

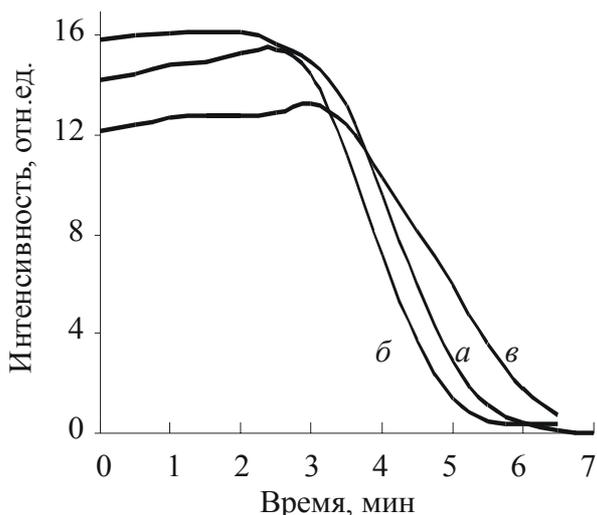


Рис. 2. Кинетические кривые гемолиза эритроцитов в зависимости от концентрации меланина ( $F = 0,94$  моль озона/моль тирозина,  $T_{инк} = 2$  мин,  $pH = 2,8$ )  
*a* – контроль (без меланина); *б* –  $2,1 \cdot 10^{-4}\%$  ;  
*в* –  $2,1 \cdot 10^{-3}\%$

этапах озонирования, в растворе.

Протекторное действие меланиновых пигментов обусловлено, скорее всего, перехватом активных форм кислорода, продуктов окисления белков, липидов и других химически активных веществ, что приводит к обрыву цепных реакций образования свободных радикалов. Возможно, взаимодействие молекул или агрегатов меланина с мембраной изменяет состояние молекулярных белков и липидов, что влечет к изменению окислительно-восстановительных свойств плазматической мембраны и повышению устойчивости эритроцитов к кислотному гемолизу. Не исключено связывание молекул меланина либо его агрегированных форм с мембранами эритроцитов и возможный перехват меланином активных форм кислорода, продуктов перекисного окисления липидов и белков, а также свободных радикалов непосредственно на мембране.

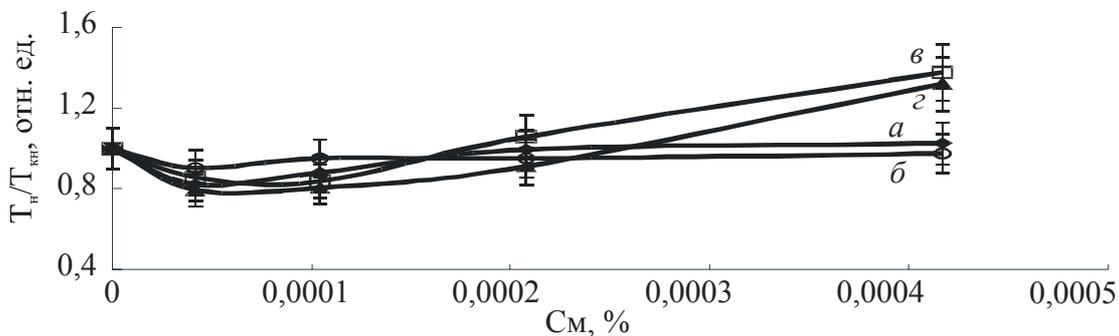


Рис. 3. Зависимость относительного времени набухания от концентрации меланина для препаратов с различной поглощенной дозой озона  $F$  ( $T_{инк} = 2$  мин,  $pH = 2,8$ )  
*a* – 0,23; *б* – 0,37; *в* – 0,58; *г* – 0,94

мени лизиса от концентрации образцов в суспензии клеток представле-ны на *рис. 3* и *рис. 4*.

Время набухания в исследуемых пределах концентраций препарата остается практически неизменным для всех типов меланина. Зависимость для времени лизиса носит иной характер. Из *рис. 4* видно, что для доз озона превышающих значение 0,4 моль озона/моль тирозина кривые имеют колоколообразный вид.

Из полученных результатов видно, что кинетические параметры гемолиза зависят от  $pH$  среды, концентрации и типа препаратов, полученных на разных

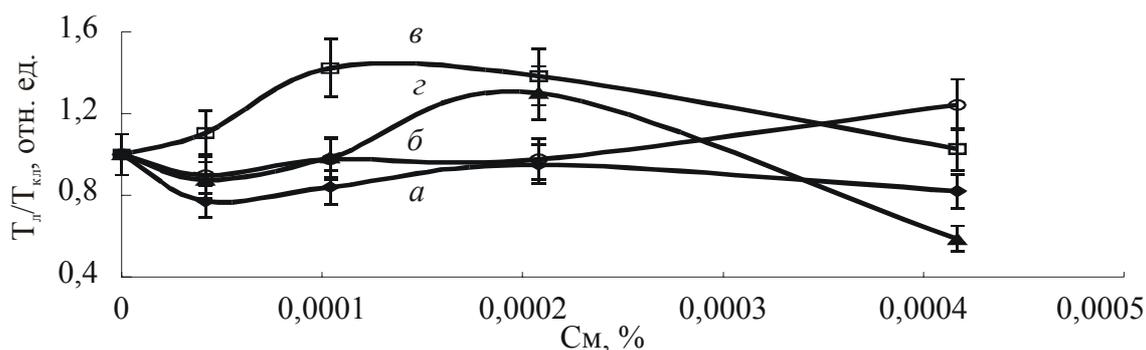


Рис. 4. Зависимость относительного времени лизиса от концентрации меланина для препаратов с различной поглощенной дозой озона F ( $T_{инк} = 2$  мин, pH = 2,8)  
 а – 0,23; б – 0,37; в – 0,58; г – 0,94

### Литература

1. Бриттон Т. (1986) Биохимия природных пигментов / ред. М. Н. Запрометов / М.:Мир,. – 422 с.
2. Masson H. S., Ingrem D. J. E., Allen B. (1960) Arch. Biochem. Biophys. 86, P.225.
3. Nicolaus R. A. (1966) Chim. Ind. 48, N 4, 341.
4. Sealy R. C., Felix C. C., Hyde J. S., Swartz H. M. (1980) Free Radical in Biology. 4. 209–252.
5. Плотникова С. И., Моссэ И. Б. (1982) Влияние меланина на мутационный процесс, индуцированный ионизирующей радиацией в половых клетках животных В кн.: Тез. докл. Четвертого Всесоюз. сипм. По фенольным соединениям, Ташкент, С.37–38.

## ВЛИЯНИЕ СПОНТАННОГО ИСПУСКАНИЯ НА ПОРОГОВЫЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ Yb-Er ЛАЗЕРА С ДИОДНОЙ НАКАЧКОЙ

Л. Г. Крылова

В последние пятнадцать лет все нарастающий интерес вызывают эрбиевые лазеры, что обусловлено их возможностью генерации в области 1.5 мкм. Помимо широкого спектра технологических применений такого типа лазеров этот диапазон считается относительно безопасным для зрения и соответствует минимуму потерь в современных оптоволоконных линиях связи [1].

В настоящее время наиболее перспективными считаются системы на основе фосфатных стекол, соактивированные ионами иттербия и эрбия с диодной накачкой [2, 3]. Однако используемые, в основном, схемы продольной диодной накачки не позволяют эффективно использовать объем активной среды. Переход к поперечной схеме накачки требует дополнительной проработки оптимизации конфигурации резонатора и системы накачки и режимов работы лазера.

Разработанные к настоящему времени модели описания работы Yb-Er лазера [4–6] не пригодны для решения подобной задачи по двум основным причинам. Первая определяется аксиоматикой самих моделей, которые оперируют со средними по объему рабочей среды параметрами, что автоматически исключает возможность решения данной задачи. Вторая связана с тем, что в рамках упрощенных моделей полностью опущено, наряду с целым рядом других процессов, влияние спонтанного излучения в канале генерации. И если в рамках таких моделей подобное приближение еще можно как-то обосновать, то при переходе к исследованию эволюции преобразования энергии накачки в энергию генерируемого излучения по объему активной среды учет процессов спонтанного излучения становится принципиально необходимым.

Дело в том, что при достижении инверсии населенности в активной среде лазера происходит усиление спонтанного излучения в пределах достаточно широких спектров по частоте и направлениям (усиленная люминесценция) и только резонатор вырезает узкие участки этих спектров, формируя излучения генерации. Как правило, влиянием усиленной люминесценции пренебрегают, однако, как показали исследования полупроводниковых инжекционных лазеров [7], усиленная люминесценция может выступать в качестве существенного рекомбинационного фактора и, таким образом, влиять на пороговые, мощностные и динамические характеристики лазерной системы.

Поэтому, вполне естественно предполагать, что подобная ситуация может иметь место и для эрбиевых лазеров, особенно в случае поперечной диодной накачке. Однако в общем виде изучение подобной проблемы представляет весьма сложную задачу. Поэтому в данной работе поставлена более простая задача о выяснении влияния процессов спонтанного испускания на выходные и динамические характеристики Yb-Er лазера в рамках уже существующих упрощенных моделей и как это влияние соотносится с влиянием других процессов (например, апконверсия), которые в рамках принятых моделей обычно опускаются.

За основу упрощенной модели Yb-Er лазера взята обычная четырехуровневая схема, в которой каждый из ионов иттербия и эрбия описывается двухуровневой схемой с учетом переноса энергии между ними. Учет влияния процессов спонтанного излучения проводился путем введения дополнительного члена в уравнение для переноса интенсивности излучения генерации, в котором присутствовал свободный параметр  $\delta$ , определяющий вклад этого излучения в излучение генерации.

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений решалась методом Рунге-Кутты в среде пакета Mathematica. Численные зна-

чения параметров лазерной системы взяты для фосфатных стекол, соактивированных ионами иттербия и эрбия, на основе критического анализа литературных источников.

Теперь кратко остановимся на результатах численного расчета. При рассмотрении выходных характеристик, т.е. зависимости мощности генерации от мощности накачки, влияние спонтанного излучения проявляется лишь вблизи порога генерации (при значениях мощности накачки равной удвоенной пороговой влиянием спонтанного излучения можно пренебречь для всего диапазона вариации параметров системы).

В результате расчета были получены значения выходной мощности в зависимости от времени и в зависимости от величины накачки. На *рис. 1* приведены выходные характеристики для Yb-Er лазера при варьировании длины резонатора. Как видно из графика, с увеличением длины резонатора происходит увеличение выходной мощности. Однако на эксперименте длины больше нескольких миллиметров встречаются редко. Это связано с тем, что используемая поперечная накачка осуществляется лазерными линейками, которые не велики по своей длине. Поэтому накачка происходит в области резонатора, которая гораздо меньше, чем сам резонатор. Максимальный КПД лазера, который можно получить составляет около 30%.

При изменении значения коэффициента спонтанного испускания существенная разница в значениях выходных характеристик наблюдается только вблизи порога (при  $\delta \approx 10^{-3} - 10^{-4}$  выходная мощность в пороге в два раза превышает то же значение для  $\delta \geq 10^{-4}$ ).

Значение порога при увеличении  $\delta$  резко начинает возрастать при  $\delta \geq 10^{-5}$ . Характер этого возрастания не меняется при изменении как длины так и коэффициентов отражения зеркал резонатора.

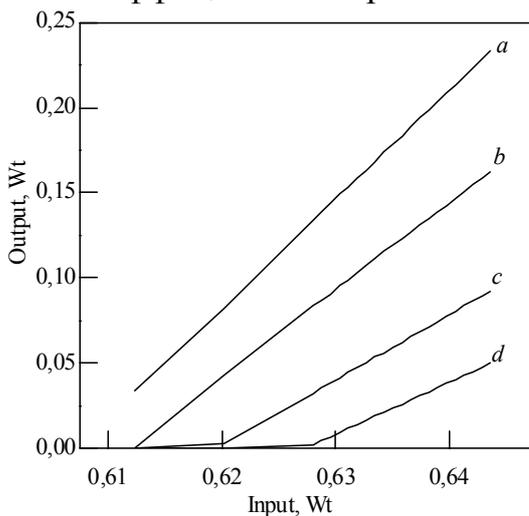


Рис. 1. Выходные характеристики при различных значениях длины резонатора L = 0.25 (a), 0.20 (b), 0.15 (c), 0.12 (d) м

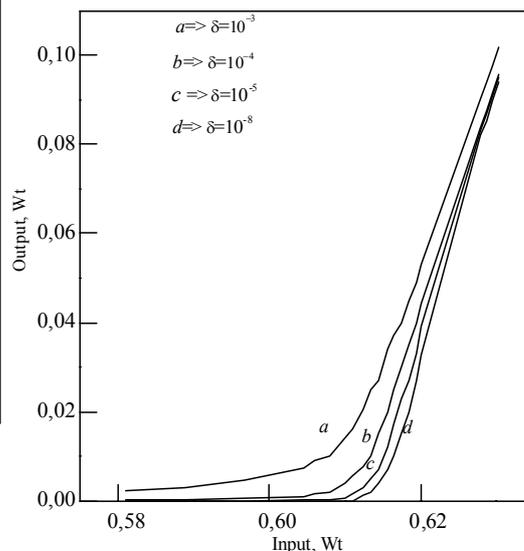


Рис. 2. Выходные характеристики для разных значений параметра  $\delta$

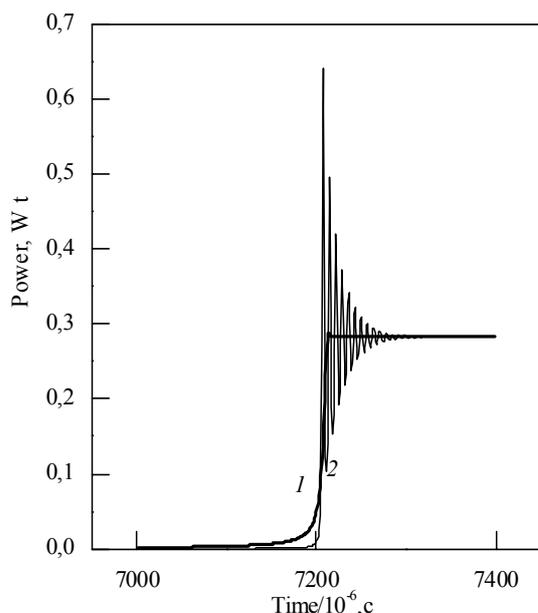


Рис. 3. Выходные характеристики при различных  $\delta$ ,  
 1 –  $\delta = 10^{-4}$ , 2 –  $\delta = 10^{-6}$

При рассмотрении изменения выходной мощности от времени (рис. 3) в динамике при уменьшении  $\delta$  наблюдается изменение максимальной пиковой мощности в переходном режиме, а так же времени достижения стационарного режима (чем меньше  $\delta$  тем выше пиковая мощность и тем дольше происходит установление стационарного значения). При этом для разных схем уровней принципиальный характер зависимости не меняется. Кроме того, при увеличении  $\delta$  происходит уменьшение периода осцилляций, который составляет  $\approx 10^{-4}$  секунды. А так как такие колебания принципиально детектируемы, то определив экспериментально период осцилляций

можно по этим данным оценить  $\delta$ .

Поэтому нами был проведен анализ ряда схем (четырёх-, пятиуровневой схемы и схемы с апконверсией) для изучения степени допустимости каждого из этих предположений и выяснения вклада усиленной люминесценции.

При рассмотрении зависимости выходной мощности для разных моделей системы, оказывается, что наиболее высокие значения выходной мощности получаются для пяти уровней, наименьшее – для четырех уровней, а для апконверсии значения мощности располагаются между этими двумя случаями.

### Литература

1. Desurvire E. Erbium\_doped fiber amplifiers. // Wiley-Interscience publication, 1994, 346p.
2. Gill G. M. IEEE J. Sel. Topics in Quant. Electron., 2000, v.6, pp.1111– 1115
3. Zhuping Liu, Changohong Qi, Shixun Dai, Yasi Jiang, Lili Hu. Spectra and laser properties of  $\text{Er}^{3+}$ ,  $\text{Yb}^{3+}$ :phosphate glasses // Optical Materials. 2003. V. 21. P. 789–794.
4. Tellert T., Di Pasquale D., Federighi M. Theoretical Analysis of the Dynamic Behavior of Highly-Efficient Erbium/Ytterbium Codoped Fiber Lasers// IEEE, Phot.Techn.Lett, vol 8, No11, Nov. 1996.
5. Tanguy E., Larat C., Pocholle J.P. Modelling of erbium-ytterbium laser//. Opt. Comm. 172–183. 153(1998)
6. Li G., Xiong Z., Moore N., Lim G. C., Huang W. L., and Huang D. X. // J. Opt. Soc. Am. B **21**, 1479–1485 (2004)
7. Burov L. I., Savva V. A., Rusov S. G., Ryabtsev A. G. Ryabtsev G. I. Smal A.S. Shore K. A. // Nonlinear phenomena in complex systems, 2004, v.7, pp. 273–282

## ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО ПРЕДЕЛА В МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА-КАММИНГСА

А. В. Леонов, И. Д. Феранчук

Взаимодействие света и вещества является одной из фундаментальных проблем физики, исследование которой привело примерно сто лет назад к зарождению квантовой теории.

Как известно, реальные атомы являются сложными, и даже простейший из них – атом водорода – имеет непростую структуру энергетических уровней. Поэтому бывает необходимо или желательно аппроксимировать поведение реального атома поведением намного более простой квантовой системы. Часто при взаимодействии атома с монохроматическим электромагнитным полем только два атомных энергетических уровня играют существенную роль, так что стало обычным во многих теоретических рассуждениях представлять атом квантовой системой, имеющей только два энергетических собственных состояния. В этом случае и возникает модель двухуровневой системы (двухуровневого атома). Среди огромного многообразия всевозможных моделей двухуровневых систем особое место занимает модель двухуровневой системы в одномодовом квантовом поле. Являясь одной из простейших, она довольно эффективно описывает качественные характеристики взаимодействия квантовой системы с резонансным внешним полем. Наиболее известной и в то же время наиболее простой моделью, описывающей поведение двухуровневой системы в одномодовом квантовом поле, является модель Джейнса-Каммингса [1], которую мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Рассмотрим систему, состоящую из двух уровней (основного и возбужденного), помещенную во внешнее резонансное поле. Введем такие энергетические единицы, чтобы энергия фотона была равна 1. Тогда исходный гамильтониан запишется в виде:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} E \hat{\sigma}_3 + \hat{a}^+ \hat{a} + f (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}) (\hat{a} + \hat{a}^+), \quad (1)$$

где  $E$  – энергия перехода между уровнями двухуровневой системы при таком выборе энергетических единиц,  $f$  – константа связи двухуровневой системы с полем.

Очевидно, что следующая величина (комбинированная четность)

$$\hat{P} = \hat{\sigma}_3 e^{i\pi \hat{a}^+ \hat{a}}, \quad (2)$$

в рамках модели Джейнса-Каммингса является интегралом движения. Поэтому волновая функция системы зависит от двух квантовых чисел и одновременно удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\hat{H}|\psi_{np}\rangle = \varepsilon_{np}|\psi_{np}\rangle, \quad \hat{P}|\psi_{np}\rangle = p|\psi_{np}\rangle, \quad (3)$$

где числа  $p = \pm 1$  определяют четность, а  $n = 0, 1, 2, \dots$  являются главными квантовыми числами.

Несмотря на относительную простоту исходного гамильтониана точного аналитического решения не существует и обычно используются различные приближения, наиболее распространенным среди которых является приближение вращающейся волны. Однако область применимости этого приближения весьма ограничена. Поэтому к решению исходной задачи был применен операторный метод [2], который оказался очень эффективным при описании различных квантовых систем. Напомним его основные моменты в применении к задаче о двухуровневой системе в одномодовом квантовом поле [3].

В соответствии с операторным методом необходимо использовать полный набор базисных векторов, зависящих от произвольных параметров, учитывающих изменение состояния системы вследствие взаимодействия. Этот сдвиг может быть описан путем следующих канонических преобразований операторов:

$$\hat{a} = -u + \hat{b}, \quad \hat{a}^+ = -u + \hat{b}^+, \quad (4)$$

$$\hat{b} = \hat{R}^{-1}\hat{a}\hat{R}, \quad \hat{R} = e^{u(\hat{a}^+ - \hat{a})}, \quad (5)$$

Подходящий базис может быть построен из собственных векторов операторов  $\hat{n} = \hat{b}^+\hat{b}$  и  $\hat{\sigma}_1$ :

$$|\Phi_{ns}\rangle = |n, u\rangle \chi_s, \quad \hat{\sigma}_1 \chi_s = s \chi_s \quad (s = \pm), \quad (6)$$

$$|n, u\rangle = \frac{(\hat{a}^+ + u)^n}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} (\hat{a}^+)^k |0\rangle e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad (7)$$

Вектор состояния  $|\psi_{np}\rangle$  раскладывается по базисным векторам (6) следующим образом:

$$|\psi_{np}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} C_{ks}^{np} |k, u\rangle \chi_s, \quad (8)$$

Подставляя разложение (8) в уравнения (3), мы получаем простую итерационную схему, позволяющую найти собственные значения и коэффициенты разложения с любой заданной наперед точностью.

Следующим важным этапом исследования модели Джейнса-Каммингса является решение эволюционной задачи для исходной модели, а именно – изучение поведения двухуровневого атома в составе всей системы с течением времени. Причем необходимо не только найти временную зависимость вероятности пребывания атома в основном или возбужденном состоянии, но и показать, что при соответствующих приближениях и упрощениях разработанная нами теория не будет противоречить хорошо известным классическим результатам. К тому же, роль квантовых поправок в свойствах поля при этом не может не сказаться на некоторых качественных результатах теории, что и будет показано в дальнейшем. В результате мы и получим квазиклассический предел модели Джейнса-Каммингса.

Итак, в соответствии с общими канонами квантовой механики, эволюция системы задается в следующем виде:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=\pm} G_{np} \psi_{np} e^{-iE_{np}t}, \quad (9)$$

Будем считать, что в начальный момент времени поле и атом не взаимодействовали, т.е.:

$$|\Psi(0)\rangle = (\varphi_{\uparrow}(0)\chi_{\uparrow} + \varphi_{\downarrow}(0)\chi_{\downarrow})|\alpha\rangle, \quad (10)$$

Интересующие нас временные функции рассчитываются следующим образом:

$$\varphi_{\uparrow}(t) = \langle \chi_{\uparrow} \alpha | \Psi(t) \rangle, \quad \varphi_{\downarrow}(t) = \langle \chi_{\downarrow} \alpha | \Psi(t) \rangle, \quad (11)$$

Коэффициенты эволюционного разложения вектора состояния можно найти исходя из начальных условий задачи. В нулевом приближении они примут вид:

$$G_{n+} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{f^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha f} \frac{(\alpha + f)^n}{\sqrt{n!}} (\varphi_{\uparrow}(0) + \varphi_{\downarrow}(0)), \quad (12)$$

$$G_{n-} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{f^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha f} \frac{(\alpha + f)^n}{\sqrt{n!}} (\varphi_{\uparrow}(0) - \varphi_{\downarrow}(0)), \quad (13)$$

Рассмотрим нулевое приближение и случай слабой связи атома с полем. При этом выражение для энергии берется в виде:

$$\varepsilon_{np}(0) \approx n + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q \sqrt{(1-E)^2 + 4f^2 \left[ n + \frac{1}{2}(1+q) \right]}, \quad (14)$$

где  $q \equiv p(-1)^n$ .

Возьмем конкретный пример:  $f \ll 1$ ,  $\varphi_{\uparrow}(0) = 1$ ,  $\varphi_{\downarrow}(0) = 0$ . Тогда, подставляя (12–14) в (11), получаем:

$$\varphi_{\uparrow}(t) = e^{2f(\alpha+\alpha^*)} e^{-i(n_0-\frac{1}{2})t} \cos \left[ \left( \sqrt{\frac{(1-E)^2}{4} + f^2 n_0} \right) t \right], \quad (15)$$

$$\varphi_{\downarrow}(t) = -ie^{2f(\alpha+\alpha^*)} e^{-i(n_0-\frac{1}{2})t} \sin \left[ \left( \sqrt{\frac{(1-E)^2}{4} + f^2 n_0} \right) t \right], \quad (16)$$

Формулы (15) и (16) и представляют собой точный квазиклассический предел эволюционной задачи в модели Джайнса-Каммингса. Как и следовало ожидать, амплитуды вероятности осциллируют с частотой Раби  $\Omega$ , равной

$$\Omega = \sqrt{\frac{(1-E)^2}{4} + f^2 n_0}, \quad (17)$$

#### Литература

1. Альперин М. М., Клубис Я. Д., Хижняк А. И. Введение в физику двухуровневых систем. // Киев: Наук. думка, 1987. 224с.
2. Feranchuk I. D., Komarov L. I. The operator method of the approximate solution of the Schrödinger equation. // Phys. Lett., 88A, 211–214 (1982).
3. Feranchuk I. D., Komarov L. I., Ulyanenko A. P. // J. Phys. A: Math. Gen., 29, 4035–4047 (1996).

### СТРУКТУРНА-ФАЗАВЫЯ ЗМЯНЕННІ І МЕХАНІЧНЫЯ ЎЛАСЦІВАСЦІ СІСТЭМЫ НІКЕЛЬ-ЦЫРКОНІЙ, АПРАЦАВАНАЙ КАМПРЭСІЙНЫМІ ПЛАЗМЕННЫМІ ПАТОКАМІ

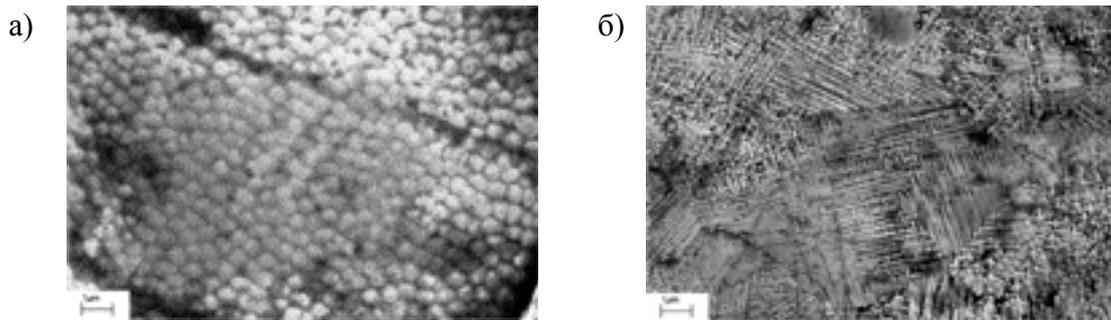
Ю. А. Петухоў

Актуальнай праблемай сучаснай фізікі цвёрдага цела і матэрыялазнаўства з'яўляецца вывучэнне ўзаемадзеяння патокаў часцінак з паверхняй матэрыялаў. Сярод шырокага класа часцінак, што выкарыстоўваюцца ў даследаваннях, асаблівы інтарэс выклікаюць іоны і электроны, якія знаходзяцца ў стане плазмы. Правядзенне апрацоўкі рэчваў патокамі

часцінак патрабуе меншых энергетычных і часавых рэсурсаў, чым традыцыйная тэрмічная або хімічная апрацоўка, і з'яўляецца больш экалагічна бяспечным. Найбольш істотным фактарам, які абумоўлівае актыўнае вывучэнне дадзенага пытання, ёсць змяненне ўласцівасцяў паверхні рэчыва ў выніку ўздзеяння патокаў часцінак: крышталічнай структуры і фазавага складу, мікраструктуры, механічных характарыстык і г. д. [1, 2]. З прычыны таго, што пры пранікненні іонаў і электронаў у рэчыва яны прыцягваюць шматлікія сутыкненні з атамамі і малекуламі матэрыяла, змяненне фазавага стану і ўласцівасцяў адбываецца пераважна ў паверхневым слаі, таўшчыня якога складае дзесяткі мікраметраў. Адным з напрамкаў у галіне даследванняў з'яўляецца вывучэнне ўздзеяння плазменных патокаў на сістэму «пакрыцце-падкладка» [3].

У якасці аб'екта даследвання была выбараная сістэма «нікелевая падкладка-цырконіевае пакрыцце». Апошняя была нанесена метадам вакуумна-дугавага асаджэння пры патэнцыяле падкладкі -120 В, току гарэння дугі 100 А. Час нанясення пакрыцця складаў 10 хвілін, а яго таўшчыня ~ 2 мкм. Пrowadзілася апрацоўка кампрэсійнымі патокамі азотнай і вадароднай плазмы, атрыманымі ў магнітаплазменным кампрэсары кампактнай геаметрыі [4]. Працягласць плазменных імпульсаў складала ~100 мкс, шчыльнасць паглынутай энергіі –  $10 \div 15$  Дж/см<sup>2</sup>. Для даследвання рэльефу паверхні, а таксама яе структуры і элементнага складу выкарыстоўваўся растравы электронны мікраскоп LEO1455VP фірмы «Karl Zeiss» з энергадысперсійным рэнтгенаўскім мікрааналізатарам Rontec. Для даследвання фазавага складу метадам рэнтгенаструктурнага аналізу быў выкарыстаны рэнтгенаўскі дыфрактометр ДРОН-3. Вымярэнне мікрацвёрдасці праводзілася метадам Вікерса з дапамогай цвёрдамера ПМТ-3, а трыбалагічныя выпрабаванні – на трыбометры ТАУ-1М.

Даследванні метадам растравай электроннай мікраскапіяй выявілі змяненне характара паверхні апрацаваных рэчываў. Паверхні рэчываў маюць выгляд крышталізаванай вадкасці, што дазваляе зрабіць высновы наконт механізму ўздзеяння кампрэсійных плазменных патокаў на матэрыялы. Па выглядзе мікраструктуры паверхні нікеля і сістэмы нікель-цырконій можна меркаваць, што пры ўзаемадзеянні плазмы з матэрыяламі адбываецца плаўленне і хуткая крышталізацыя. Устаноўлена, што на паверхні апрацаваных матэрыялаў утвараецца ячэйстая і дэнтрытная структуры (рыс. 1). Механізм утварэння дадзеных утварэнняў апісаны ў мадэлі канцэнтрацыйнага ахалоджвання [5] і заключаецца ў тым, што пры хуткім памяншэнні тэмпературы пасля ўздзеяння



Рыс. 1. Мікрафатаграфіі ячэйстай структуры:  
 а) на паверхні нікеля, б) на паверхні сістэмы нікель-цырконій

плазменнага імпульсу на фронце крышталізацыі ўзнікаюць неўстойліва-сці, у выніку развіцця якіх фармуюцца ячэйкі і дэндрыты. Характэрны памер ячэек складае 0,4–0,7 мкм. Утварэнне дэндрытаў звязана з памяншэннем хуткасці крышталізацыі пры дадаванні цырконія да нікеля.

Вынікі праведзенага рэнтгенаструктурнага аналізу паказалі, што пры апрацоўцы чыстага нікеля фазавыя пераўтварэнні не назіраюцца, але ж мае месца частковая пераарыентацыя атамных плоскасцяў да накірунка (200). У сістэме нікель-цырконій у выніку вадкафазнага перамешвання нікелевай падкладкі і цырконевага пакрыцця, выкліканага ўздзеяннем кампрэсійнымі патокамі як вадароднай, так і азотнай плазмы, адбываецца ўтварэнне інтэрметаліду  $Ni_5Zr$ , у якім удзельнічае амаль што ўвесь цырконій. Таксама ў выніку апрацоўцы азотнай плазмай частка цырконія ўзаемадзейнічае з рэчывам плазмы, утвараючы нітрыд  $ZrN$ . Магчымасць утварэння дадзеных злучэнняў падцверджаецца дыяграмамі стану [6].

Згодна з вынікамі вымярэння мікрацвёрдасці апрацоўка кампрэсійнай плазмай выклікае яе павелічэнне да 2 разоў для чыстага нікеля і ў 3–3,5 разы для сістэмы нікель-цырконій. У дадзеным выпадку можна вылучыць два асноўных фактары, якія ўплываюць на велічыню мікрацвёрдасці:

- фармаванне новых фаз;
- умацаванне, звязанае з эфектамі загартоўкі (павелічэнне канцэнтрацыі дыслакацый, памяншэнне памераў зерняў).

Пры апрацоўцы чыстага нікеля мікрацвёрдасць павялічваецца толькі за кошт другога эфекта (фазавы склад не змяняецца, што падцверджаецца вынікамі рэнтгенаструктурнага аналізу), а пры апрацоўцы сістэмы нікель-цырконій уплываюць абодва фактары. Гэтым тлумачыцца розная ступень яе павелічэння.

Вынікі трыбалагічных выпрабаванняў паказалі, што плазменная апрацоўка нікеля без пакрыцця амаль не ўплывае на значэнне каэфіцыента трэння, але легіраванне цырконіем пад уздзеяннем кампрэсійных патокаў

плазмы выклікае памяншэнне каэфіцыента трэння ў 1,7 разоў пры апрацоўцы вадароднай плазмай і ў 5 разоў – пры апрацоўцы азотнай плазмай у параўнанні з неапрацавым нікелем.

Вынікі вымярэння каэфіцыента трэння падцверджваюцца растрава-электроннамікраскапічнымі даследваннямі трэкаў зносу на паверхні апрацаваных матэрыялаў. На гатунках нікеля і неапрацавай сістэмы нікель-цырконій яны бесперапынныя, а пасля апрацоўкі апошняй набываюць выгляд перапынлых слаба заўважных слядаў уздоўж траекторыі руху індэнтара трыбометра, што дазваляе меркаваць пра меншы знос гатункаў з меншым каэфіцыентам трэння. Паляпшэнне трыбалагічных характарыстык абумоўлена, з аднаго боку, павелічэннем мікрацвёрдасці, а з другога боку – змяненнем паверхневай марфалогіі, якое прыводзіць да памяншэння плошчы кантакта індэнтара з паверхняй.

Даследванне трэкаў метадам рэнтгенаўскага мікрааналізу выявіла наяўнасць акіслення ў месцах трыбакантакту зыходнага і апрацаванага нікеля; у апрацаванай сістэме нікель-цырконій павелічэння канцэнтрацыі кіслароду не назіраецца, што звязана з фармаваннем на паверхні фаз інтэрметаліда і нітрыда цырконія.

Атрыманыя вынікі дазваляюць меркаваць пра ўласцівасці паверхневага слою і дастасавання апрацаваных матэрыялаў, якія спалучаюць устойлівасць да хімічных рэакцый і палепшаныя механічныя параметры, пры вырабе інструментаў, якія працуюць у агрэсіўных хімічных асяроддзях.

### Літаратура

1. Langner J., Piekoszewski J., Werner Z., et. al. Surface modification of constructional steels by irradiation with high intensity pulsed nitrogen plasma beams // *Surface&Coatings Technology*. 2000. №128–129. P. 105–111.
2. Апарина Н. П., Боровицкая И. В., Васильев В. И. и др. Воздействие импульсной водородной плазмы с поверхностью ванадия и его сплавов // *Металлы*. 2000. №2. С. 112–114.
3. Tereshin V., Bandura A., Byrka O., Chebotarev V., et. al. Coating deposition and surface modification under combined plasma processing // *Vacuum*. 2004. №73. P. 555–560.
4. Физика и применение плазменных ускорителей / Под ред. А. И. Морозова. Мн., 1974.
5. Модифицирование и легирование поверхности лазерными, ионными и электронными пучками / Под ред. Дж. М. Поута, Г. Фоти, Д. К. Джекобсона. М., 1987.
6. Диаграммы состояния двойных металлических систем: В 3т. / Машиностроение. М., 1997.

## МОДИФИКАЦИЯ ФАЗОВОГО СОСТАВА И МИКРОТВЕРДОСТИ СИСТЕМЫ СR/АК4, ПОДВЕРГНУТОЙ ВОЗДЕЙСТВИЮ КОМПРЕССИОННОГО ПЛАЗМЕННОГО ПОТОКА

М. Г. Полуянова

Одним из приоритетных направлений физики твердого тела является разработка и исследование способов улучшения механических свойств различных материалов. В последнее время широко исследуется применение направленных потоков энергии для модификации поверхностных слоев материалов. Обработка компрессионным плазменным потоком является новым и перспективным методом модификации свойств материалов. Преимуществами компрессионных плазменных потоков по сравнению с традиционными методами являются малые временные и энергетические затраты [1]. Воздействие компрессионных плазменных потоков на систему «покрытие-подложка» приводит к созданию перемешанного слоя, содержащего элементы покрытия, подложки и плазмообразующего газа. При этом происходит увеличение микротвердости поверхностного слоя в несколько раз.

В данной работе исследовалось влияние воздействия компрессионного плазменного потока на фазовый состав и механические свойства системы хром – сплав АК4 при различном давлении азота в камере.

Хромовое покрытие на поверхность образца из алюминиевого сплава АК4 наносилось методом вакуумного катодно-дугового осаждения без очистки с параметрами процесса: ток горения дуги – 100 А, напряжение смещения – -120 В, время нанесения – 10 минут.

Плазменная обработка поверхности образцов алюминиевого сплава АК4 с нанесенным хромовым покрытием проводилась в газоразрядном магнито- плазменном компрессоре компактной геометрии (МПК) при начальном напряжении на конденсаторной батарее 4 кВ [2]. Обработка проходила в режиме «остаточного газа», при котором предварительно откачанную вакуумную камеру МПК заполняли рабочим газом – азотом – до давлений 0.40 кПа, 0.67 кПа, 1.33 кПа и 2.67 кПа. Длительность разряда составляла 100 мкс. Обработку образцов производили одним импульсом.

Фазовый состав образцов исследовался с помощью дифрактометра ДРОН-4-13 с фокусировкой по Брэггу – Brentano в излучении кобальта. Морфологию поверхности исследовали с помощью растрового электронного микроскопа LEO1455VP. Значение микротвердости определялось на приборе ПМТ-3 при нагрузках 0,2 – 1 Н.

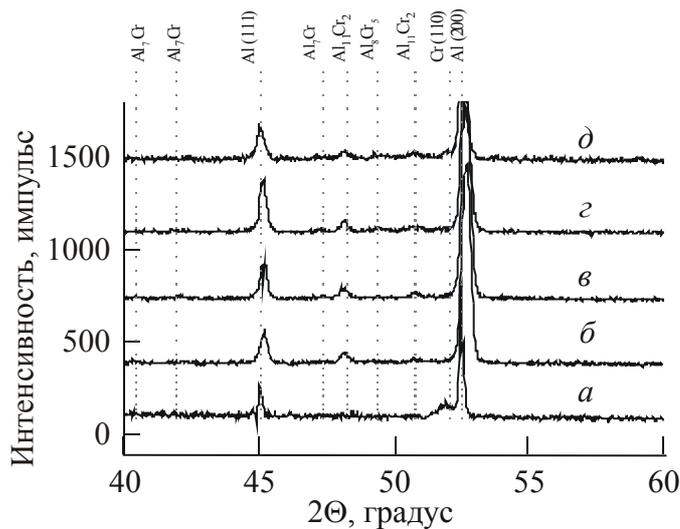


Рис. 1. Участки рентгенограмм исходного образца системы хром/сплав АК4 (а) и образцов обработанных компрессионным плазменным потоком при различном давлении азота в камере: б –  $p = 0,40$  кПа, в –  $p = 0,67$  кПа, з –  $p = 1,33$  кПа, д –  $p = 2,67$  кПа

сплав АК4 на рентгенограмме появляются дифракционные линии  $Al_7Cr$  в диапазоне давлений  $0,40 - 1,33$  кПа. Дифракционный пик  $Al_{11}Cr_2$  наблюдается в диапазоне давлений  $0,40 - 2,67$  кПа. Для образцов, обработанных при давлениях  $1,33$  кПа и  $2,67$  кПа наблюдается появление дифракционных линий  $Al_8Cr_5$ , а также заметное ослабление линий  $Al_7Cr$ .

Как видно из рисунка, увеличение давления приводит к появлению интерметаллидов, обогащенных хромом. Для образца, обработанного при давлении  $2,67$  кПа, на рентгенограмме появляется пик, соответствующий хрому. Это может быть связано с увеличением степени неоднородности перемешивания системы при увеличении давления и присутствием областей, обогащенных хромом.

Чтобы изучить процесс перемешивания системы были проведены исследования морфологии поверхности образцов с помощью растровой электронной микроскопии (РЭМ).

Воздействие плазменных потоков на поверхность материала приводит к существенным изменениям в морфологии поверхности. Характерными особенностями обработанной поверхности является оплавление и расщепление поверхности. С увеличением давления остаточного газа в камере наблюдается увеличение степени неоднородности перемешивания в исследуемой системе.

Например, при давлении  $0,67$  кПа на поверхности наблюдаются темные (алюминий) и светлые (хром) области, что свидетельствует о плохом перемешивании системы (рис. 2а). Подтверждением этого служит рас-

Результаты фазового анализа представлены на рис. 1. Рентгенограмма образца сплава АК4 с хромовым покрытием (рис. 1) представляет собой суперпозицию дифракционных пиков  $Al(111)$ ,  $Al(200)$ ,  $Cr(110)$ . Анализ фазового состава образцов после плазменной обработки показал образование интерметаллидов.

В результате обработки системы хром-

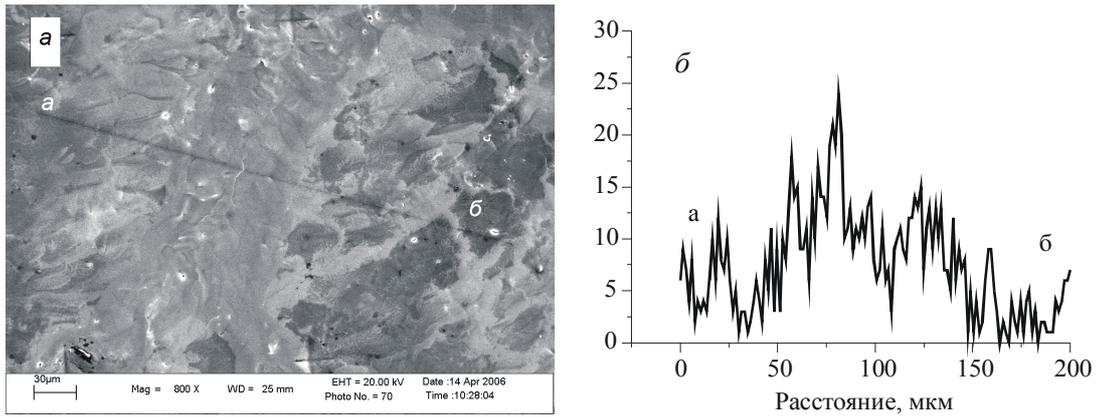


Рис. 2. Морфология поверхности системы «хром-сплав АК4» после обработки при давлении 0,67 кПа (а) и распределение характеристического рентгеновского излучения хрома вдоль линии а–б (б)

пределение характеристического рентгеновского излучения Cr (рис. 2б) вдоль линии а–б. Вследствие плохого перемешивания появляются области различного элементного состава. Таким образом, исследования морфологии поверхности подтверждают предположение о том, что перемешивание существенно зависит от давления газа.

Как показали проведенные исследования, обработка системы «хром-сплав АК4» компрессионными плазменными потоками приводит к существенной модификации микротвердости поверхностного слоя (рис. 3).

Микротвердость исходного образца АК4 в исследуемом диапазоне нагрузок (0,2 – 1 Н) составляет приблизительно 450 МПа. Микротвердость системы «хром-сплав АК4» значительно превышает микротвердость исходного сплава и составляет примерно 500 МПа.

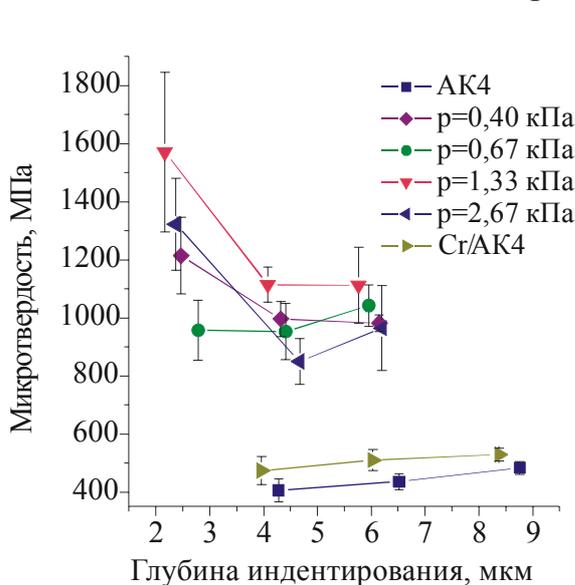


Рис. 3. Зависимость микротвердости от глубины индентирования

Для всех обработанных образцов наблюдается увеличение микротвердости. Так, например, микротвердость модифицированного слоя на глубине 5 мкм увеличивается в 1,8 – 2,3 раза. Увеличение микротвердости связано с формированием интерметаллидов в результате обработки компрессионными плазменными потоками.

Таким образом, в результате проведенных исследований можно сделать вывод, что фазовый состав образцов, обработанных компрессионным плазменным потоком, существенным образом зависит от давления. С увеличением давления оста-

точного газа в камере наблюдается увеличение степени неоднородности перемешивания в системе. Для всех обработанных образцов происходит увеличение микротвердости, что связано с формированием интерметаллидов в результате обработки компрессионными плазменными потоками.

### Литература

1. Асташинский В. М., Ананин С. И., Костюкевич Е. А. и др. Структура и механические свойства титана, обработанного компрессионными плазменными потоками // Proc. of the V symposium of Belarus, Serbia and Montenegro on physics and diagnostics of laboratory and astrophysical plasmas. Минск, 2004. С.171–174.
2. Физика и применение плазменных ускорителей / Под. ред. А. И. Морозова. Мн., 1974.

## ИЗУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОГО СЛАБОГО ТОКА В ПРОЦЕССАХ ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛЕПТОНОВ

С. Н. Севбитов Т. В. Шишкина

Глубоконеупругое лептон-нуклонное рассеяние, широко исследуемое в настоящее время, предоставляет обширную информацию о структуре нуклонов, а также о характере их взаимодействия. Анализ данных таких экспериментов [1–3] стимулирует создание и развитие ряда моделей строения нуклонов. Основной целью подобных проектов является исследование нуклонов в рамках феноменологического подхода, концентрирующееся главным образом на исследовании поляризационных структурных функций  $g_1^p$ ,  $g_1^n$ ,  $g_2^p$  и  $g_2^n$ . Они позволяют получать информацию о функциях распределения кварков внутри нуклонов.

Взаимодействия, обусловленные обменом заряженным слабым током имеют уникальное значение, поскольку позволяют проводить исследования величин, не содержащих больших вкладов электромагнитной природы.

В работе рассмотрены процессы глубоконеупругого рассеяния (ГНР), обусловленные заряженным слабым током,

$$l(\bar{l}) + N \rightarrow \nu(\bar{\nu}) + X, \quad \nu(\bar{\nu}) + N \rightarrow l(\bar{l}) + X \quad (1)$$

с учетом поляризации взаимодействующих частиц. На основе феноменологического подхода получены ковариантные выражения дифференциальных сечений процессов (1) в рамках Стандартной Модели электро-слабого взаимодействия для произвольной кинематической и спиновой конфигурации с учетом масс лептонов (см. работу [4]). При описании структуры нуклона в рамках феноменологического подхода используется адронный тензор  $W_{\alpha\beta}$ , приведенный в работе [5], зависящий от 4-импульса  $p$  и 4-вектора поляризации нуклона  $\eta$  и переданного 4-

импульса  $q$ , а также от неполяризационных и поляризационных структурных функций  $W_i = W_i(q^2, pq)$  и  $G_j = G_j(q^2, pq)$ ,  $i = 1..5$ ,  $j = 1..9$ .

Полученные сечения использованы для извлечения структурных функций из экспериментальных данных, и следовательно, для проверки и анализа теоретических моделей строения нуклона.

Особый интерес представляет изучение продольных и поперечных поляризационных асимметрий:

$$A_{\square[\perp]} = \left( \frac{d^2\sigma^{\uparrow\uparrow[\uparrow]}}{dxdy} - \frac{d^2\sigma^{\uparrow\downarrow[\uparrow]}}{dxdy} \right) / \left( \frac{d^2\sigma^{\uparrow\uparrow[\uparrow]}}{dxdy} + \frac{d^2\sigma^{\uparrow\downarrow[\uparrow]}}{dxdy} \right). \quad (2)$$

Здесь  $d^2\sigma^{\uparrow\uparrow}/dxdy$  ( $d^2\sigma^{\uparrow\downarrow}/dxdy$ ) – дифференциальное сечение рассеяния продольно поляризованного лептонного пучка на продольно поляризованной мишени с векторами поляризации, имеющими одинаковые (противоположные) направления;  $d^2\sigma^{\uparrow\Rightarrow}/dxdy$  ( $d^2\sigma^{\uparrow\Leftarrow}/dxdy$ ) – дифференциальное сечение рассеяния продольно поляризованных лептонов на мишени, поляризованной перпендикулярно направлению лептонного пучка с  $P_N^\perp = +1$  ( $P_N^\perp = -1$ ), где  $P_N^\perp$  – степень поперечной поляризации,

С целью численного анализа получим асимметрии в рамках кварк-партонной модели, где адрон предполагается состоящим из точечных партонов, пренебрежимо мало взаимодействующих в области ГНР.

При описании поляризованного рассеяния возникают следующие поляризационные структурные функции (см. обзор в работе [6]):

$$g_1^W(x) = \Delta q(x) + \Delta \bar{q}(x), \quad g_2^W(x) = \Delta q(x) - \Delta \bar{q}(x), \quad \Delta q(x) = q_\uparrow(x) - q_\downarrow(x),$$

$$\Delta \bar{q}(x) = \bar{q}_\uparrow(x) - \bar{q}_\downarrow(x), \quad q_{\uparrow[\downarrow]}(x) = \sum_{q_i} a_{q_i} f_{q_i, \uparrow[\downarrow]}(x), \quad \bar{q}(x) = \sum_{\bar{q}_i} a_{\bar{q}_i} f_{\bar{q}_i, \uparrow[\downarrow]}(x), \quad (3)$$

$$a_{q_i} = \sum_{q_j} (V_{q_i q_j})^2, \quad a_{\bar{q}_i} = \sum_{\bar{q}_j} (V_{\bar{q}_i \bar{q}_j})^2.$$

Здесь  $f_{q_i, \uparrow[\downarrow]}(x)$  – функция распределения кварков (антикварков) определенного аромата в адроне, или вероятность переноса кварком (антикварком) 4-импульса  $p_{q_i, \uparrow[\downarrow]} = xp$ , для кварков, продольно поляризованных вдоль и противоположно направлению вектора  $\mathbf{p}$ ;  $V_{q_i q_j}$  – элементы матрицы Кобаяши-Маскавы. Продольная поляризационная асимметрия (2) в рамках кварк-партонной модели определяется следующими выражениями:

$$\frac{d^2[\sigma^{\pm\uparrow\uparrow} - \sigma^{\pm\uparrow\downarrow}]}{dxdy} = \sigma_0[\pm 2xy(2 - y - \beta xy)g_1^W + 2x(1 + \beta x)(2 - 2y + y^2 - \beta xy)g_2^W],$$

$$\frac{d^2[\sigma^{\pm\uparrow\uparrow} + \sigma^{\pm\uparrow\downarrow}]}{dxdy} = \sigma_0[2x(2 - 2y + y^2 - \beta xy)F_1^W \pm 2xy(2 - y)F_3^W]. \quad (4)$$

В низшем порядке теории возмущений сечения растут пропорционально энергии рассеиваемого лептона  $E_l$ . Как показал численный анализ [4], поляризационные асимметрии достигают значительных величин порядка  $10 \div 20\%$ , особенно в области малых  $x$ , и значений  $y$ , близких к 1, что соответствует малой энергии рассеянного лептона  $E_l' \ll E_l$ . Эта кинематическая область соответствует наиболее глубокому зондированию внутренней структуры нуклона и предоставляет важную информацию об особенностях взаимодействия поляризованных частиц.

Асимметрии являются главным источником информации о поляризационных структурных функциях. Так, на основе поляризационных асимметрий (2), можно получить

$$g_1^\pm(x) = \pm \frac{1}{\sigma_0 x [2y_1^2 - 2/3]} \left[ \frac{(1 + y_1^2)}{2} \frac{d(\sigma^{\pm\uparrow\uparrow} - \sigma^{\pm\uparrow\downarrow})}{dx} - \frac{2}{3} \frac{d^2(\sigma^{\pm\uparrow\uparrow} - \sigma^{\pm\uparrow\downarrow})}{dxdy} \right], \quad (5)$$

$$g_2^\pm(x) = - \frac{1}{\sigma_0 x [2y_1^2 - 2/3]} \left[ \frac{(1 - y_1^2)}{2} \frac{d(\sigma^{\pm\uparrow\uparrow} - \sigma^{\pm\uparrow\downarrow})}{dx} - \frac{1}{3} \frac{d^2(\sigma^{\pm\uparrow\uparrow} - \sigma^{\pm\uparrow\downarrow})}{dxdy} \right],$$

где  $y_1 = 1 - y$ ,  $g^+(x)$  ( $g^-(x)$ ) соответствует рассеянию лептонов (антилептонов).

В рамках кварк-партонной модели можно достичь заметного упрощения исследуемых величин. Интерес представляет получение как кварковых распределений  $\Delta f_q(x) = f_q^\uparrow(x) - f_q^\downarrow(x)$ , так и интегральных величин  $\Delta f_q = \int_0^1 \Delta f_q(x) dx$ , определяющих вклад кварков определенного аромата (валентных или моревых кварков) в спин нуклона  $\langle S_z \rangle_q = \Delta f_q / 2$ .

Ограничиваясь структурными функциями  $g_{1,2}^\pm(x)$ , в силу их линейной зависимости нельзя вычислить кварковые распределения для отдельных ароматов  $\Delta u(x)$ ,  $\Delta \bar{u}(x)$ ,  $\Delta d(x)$ , ..., однако в предположении отсутствия вклада моревых кварков можно получить следующие выражения:

$$\Delta u(x) = [g_1^+(x) + g_2^+(x)]/2, \quad \Delta d(x) = [g_1^-(x) + g_2^-(x)]/2, \quad (6)$$

$$\Delta \bar{u}(x) = [g_1^-(x) - g_2^-(x)]/2, \quad \Delta \bar{d}(x) = [g_1^+(x) - g_2^+(x)]/2.$$

Заметим, что все вклады кварков двух поколений могут быть определены, если привлечь информацию также об асимметриях в процессах ГНР, обусловленных слабым нейтральным током.

Для усредненных кварковых распределений имеются дополнительные условия [7]:

$$a_3 = F + D = \Delta u + \Delta \bar{u} - \Delta d - \Delta \bar{d} = 1.254 \pm 0.006, \quad (7)$$

$$a_8 = (3F - D)/\sqrt{3} = (\Delta u + \Delta \bar{u} + \Delta d + \Delta \bar{d} - \Delta s - \Delta \bar{s})/\sqrt{3} = 0.397 \pm 0.020,$$

возникающие при рассмотрении распадов нейтронов и гиперонов. В этом случае

$$\Delta u + \Delta \bar{u} = (a_3 + \sqrt{3}a_8)/2 + \Delta s + \Delta \bar{s}, \quad \Delta d + \Delta \bar{d} = (-a_3 + \sqrt{3}a_8)/2 + \Delta s + \Delta \bar{s}, \quad (8)$$

$$\Delta s + \Delta \bar{s} = (a_3 - \sqrt{3}a_8)/4 + \int_0^1 [g_1^+(x) - g_2^+(x) + g_1^-(x) + g_2^-(x)] dx / 4.$$

Предполагая следующую симметрию поляризационных распределений кварков моря:  $\Delta s = \Delta \bar{s}$ , имеем

$$\Delta u = \int_0^1 [g_1^+(x) + g_2^+(x)] dx / 2, \quad \Delta s = \Delta \bar{s} = -\sqrt{3}a_8/6 + \int_0^1 [g_1^+(x) + g_1^-(x)] dx / 6,$$

$$\Delta \bar{u} = a_3/2 + \sqrt{3}a_8/6 - \int_0^1 [g_1^+(x) + 3g_2^+(x) - 2g_1^-(x)] dx / 6, \quad (9)$$

$$\Delta d = -a_3/2 + \int_0^1 [g_2^+(x) + g_1^-(x)] dx / 2,$$

$$\Delta \bar{d} = \sqrt{3}a_8/6 + \int_0^1 [2g_1^+(x) - 3g_2^+(x) - g_1^-(x)] dx / 6.$$

Приведенные формулы позволяют извлечь детальную информацию о спиновой структуре на основе исследования феноменологических параметров взаимодействия в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию поляризованных частиц.

### Литература

1. *Adeva B. et al. (SMC) Spin asymmetries  $A_1$  and structure functions  $g_1$  of the proton and the deuteron from polarized high energy muon scattering // Phys. Rev. 1998. Vol. D58. №112001.*
2. *Airapetian A. et al. (HERMES) Measurement of the proton spin structure function  $g_1^p$  with a pure hydrogen target // Phys. Lett. 1998. № 4. P. 484-492.*
3. *Roeck A. D., Gehrmann T. // Physics with Polarized Proton at HERA: Proc. of Int. Workshop. Hamburg, 1997.*
4. *Sevbitov S. N., Shishkina T. V. Charged weak current processes in deep inelastic scattering. Phenomenology // The actual problems of microworld physics: Proc. of VIIIth Int. School-Seminar. Gomel, 2005.*
5. *Шушклина Т. В., Марфин И. Б. Рассеяние поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах: Феноменология. Кварк-партоновая модель. Мн., 2004.*
6. *Anselmino M., Efremov A., Leader E. The theory and phenomenology of polarized deep inelastic scattering // Phys. Rep. 1995. Vol. 261. №1. P. 1 – 124.*
7. *Ashman J., Badelek B., Baum G. et al. An investigation of the spin structure of the proton in deep inelastic scattering of polarized muons on polarized protons // Nucl. Phys. 1989. Vol. B328. №1. P. 1-35.*

# ПЛОТНОСТЬ ФОТОННЫХ СОСТОЯНИЙ В ОДНОМЕРНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ С ДЕФЕКТНЫМ АНИЗОТРОПНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

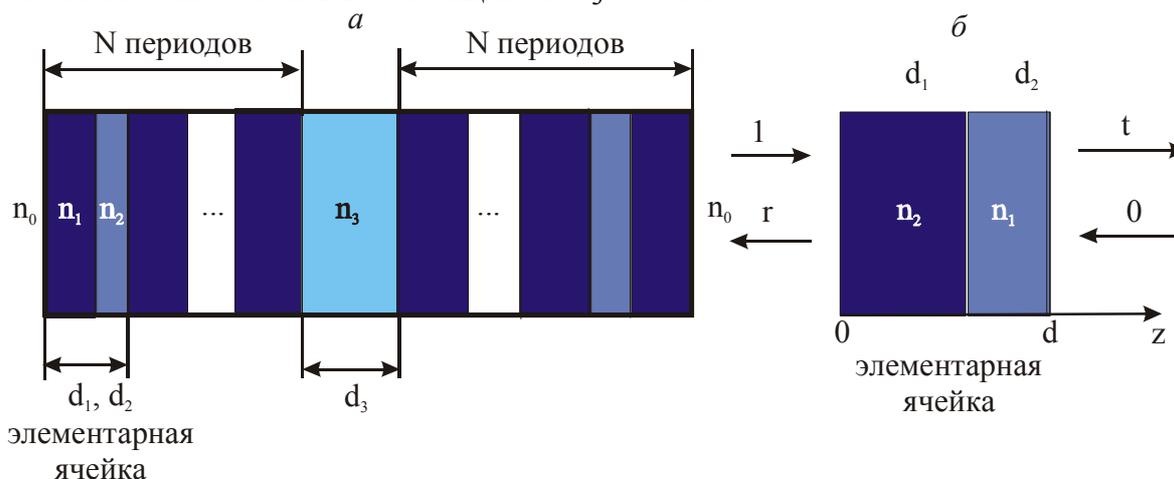
Е. Е. Ушакова, С. Н. Курилкина

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы внимание многих исследователей привлекают фотонные кристаллы (ФК), отличительной особенностью которых является наличие фотонных запрещенных зон – частотных областей, в которых оптические моды и спонтанная эмиссия полностью отсутствуют [1]. Частным случаем ФК являются ограниченные слоисто-периодические структуры (СПС), технология изготовления которых достаточно разработана. Вследствие широких перспектив практического применения представляют интерес несовершенные СПС, содержащие дефектное включение [2]. Однако, как правило, в качестве последнего рассматривается изотропный слой. В настоящем сообщении анализируется влияние анизотропии включения на характеристики пропускания одномерного фотонного кристалла.

## ПЛОТНОСТЬ ФОТОННЫХ СОСТОЯНИЙ В ОДНОМЕРНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ С ДЕФЕКТНЫМ АНИЗОТРОПНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассмотрим представленный на *рис. 1а* одномерный фотонный кристалл, ограниченный с двух сторон воздухом  $n_0 = 1$ . Исследуемая структура имеет  $2N$  периодов, каждый из которых состоит из двух слоев: оксида циркония ( $ZrO_2$ ) толщиной  $d_1 = 120$  нм и плавленного кварца ( $SiO_2$ ) толщиной  $d_2 = 90$  нм. В центре указанной структуры помещен кристаллический слой ВВО толщиной  $d_3 = 1$  мм.



*Рис. 1 а* Слоисто-периодическая структура с дефектным анизотропным включением, *б* граничные условия для элементарной ячейки

Пусть на структуру под углом  $\gamma_0$  падает световой пучок. В соответствии с [3] матрица преобразования, связывающая поле на входе и выходе структурной ячейки  $\mathbf{M}$ , а также всей среды  $\mathbf{M}^N$  в целом, может быть представлена в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/t & r^*/t^* \\ r/t & 1/t^* \end{pmatrix}, \mathbf{M}^N = \frac{1}{\sin \beta} [\mathbf{M} \sin N\beta - \mathbf{I} \sin(N-1)\beta] \quad (1)$$

где  $t, r$  – соответственно коэффициент пропускания и отражения структурного элемента,  $\beta$  – Блоховская фаза, определяемая выражением:

$$\cos \beta = \operatorname{Re}(1/t) \quad (2)$$

В случае, когда структурный элемент фотонного кристалла образован двумя слоями, матрица преобразования  $\mathbf{M}$  образована в результате умножения матриц двух типов:

$$\mathbf{M} = \Delta_{12} \mathbf{\bar{I}}(-p_2) \Delta_{21} \mathbf{\bar{I}}(-p_1), \Delta_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}^+ & a_{ij}^- \\ a_{ij}^- & a_{ij}^+ \end{pmatrix}, \mathbf{\bar{I}}(p_i) = \begin{pmatrix} e^{ip_i} & 0 \\ 0 & e^{-ip_i} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$p_i = \frac{\omega}{c} n_i \cos \gamma_i d_i; a_{ij}^+ = 1/t_{ij}; a_{ij}^- = r_{ij}/t_{ij}.$$

Для ТЕ волн

$$t_{ij} = \frac{2n_i \cos \gamma_i}{n_i \cos \gamma_i + n_j \cos \gamma_i}; r_{ij} = \frac{n_i \cos \gamma_i - n_j \cos \gamma_i}{n_i \cos \gamma_i + n_j \cos \gamma_i}. \quad (4)$$

Здесь  $t_{ij}, r_{ij}$  – коэффициенты пропускания и отражения на границе  $n_i \rightarrow n_j$ . Для ТМ волн соответствующие выражения получаются из (4) при замене  $n_i \rightarrow 1/n_i$ . Для структуры, ограниченной некоторой преломляющей средой, представив матрицу преобразования в виде, аналогичном (1), получаем выражение коэффициента пропускания  $t^\#$ :

$$\frac{1}{t^\#} = \frac{1}{\mathbf{T}_{01}} \left\{ \frac{1}{\mathbf{t}_N} + 2i \operatorname{Im} \left( \frac{\mathbf{r}_N}{\mathbf{t}_N} \right) \mathbf{r}_{01} - \frac{\mathbf{R}_{01}}{\mathbf{t}_N^*} \right\}; \quad (5)$$

$$\frac{1}{\mathbf{t}_N} = \frac{1}{\mathbf{t} \sin \beta} (\sin N\beta - \sin(N-1)\beta), \frac{\mathbf{r}_N}{\mathbf{t}_N} = \frac{\mathbf{r} \sin N\beta}{\mathbf{t} \sin \beta}.$$

Наличие дефектного анизотропного слоя учитывается введением матрицы  $\mathbf{M}_D$ , описывающей прохождение излучения через дефект.

$$\mathbf{M}_D = \Delta_{13} \mathbf{\bar{I}}(-p_3) \Delta_{31}. \quad (6)$$

При этом коэффициент пропускания определяется соотношением (5), в котором следует произвести замену:

$$\frac{1}{t_N} \rightarrow \frac{1}{t_S} = \frac{1}{t_N^2 t'_R} + \frac{r_N^* r'_R}{|t_N|^2 t'_R} + \frac{r_N r'^*_R}{t_N^2 t'^*_R} + \frac{|r_N^*|^2}{|t_N|^2 t'^*_R}. \quad (7)$$

Здесь  $t'_R, r'_R$  – коэффициенты пропускания и отражения для дефектного слоя.

Важной характеристикой, определяющей интенсивность излучения в среде, является плотность фотонных состояний  $\rho = \partial k / \partial \omega$ , выражение для которой можно получить, учитывая смысл коэффициента пропускания  $t^\# = |t^\#| \exp i k \tilde{d}$ , где  $k$  – эффективное волновое число,  $\tilde{d}$  – путь, пройденный светом в периодической среде.

$$\rho(\omega) = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{\tilde{d}} \frac{dy}{x^2 + y^2} \frac{dx - dy}{x - y}, \quad x = \text{Re}(t^\#); y = \text{Im}(t^\#). \quad (8)$$

Воспользуемся полученными выражениями для анализа особенностей локализации световой энергии в одномерном фотонном кристалле, содержащем в качестве включения кристаллический слой (см. рис.2).

Как видно, наличие дефектного включения ведет к появлению дополнительных узких максимумов частотной зависимости плотности фотонных состояний  $\rho$  внутри фотонной запрещенной зоны (рис. 2а). При этом наиболее ярко выраженные максимумы имеют место на границе запрещенной зоны (рис. 2б), однако их положение изменяется по сравнению со случаем бездефектной среды. Максимальная плотность фотонных состояний, как видно из рисунков, наблюдается на частотах, соответствующих границе фотонной запрещенной зоны. Следовательно, на данных частотах возможна локализация энергии, а также усиление оптических нелинейных эффектов в ПС с анизотропным дефектом.

Отметим, что максимумы  $\rho$  для ТЕ и ТМ волн различны (рис. 2). Увеличение угла падения ведет к уменьшению максимумов  $\rho$  и возрастанию смещения друг относительно друга максимумов, соответствующих ТЕ и ТМ волнам. Положение дефектных максимумов  $\rho$  внутри запрещенной зоны чувствительно к числу периодов структуры, толщине каждого слоя в периоде (рис. 2). При наличии дефектного анизотропного включения в СПС происходит модуляция коэффициента пропускания (рис. 2).

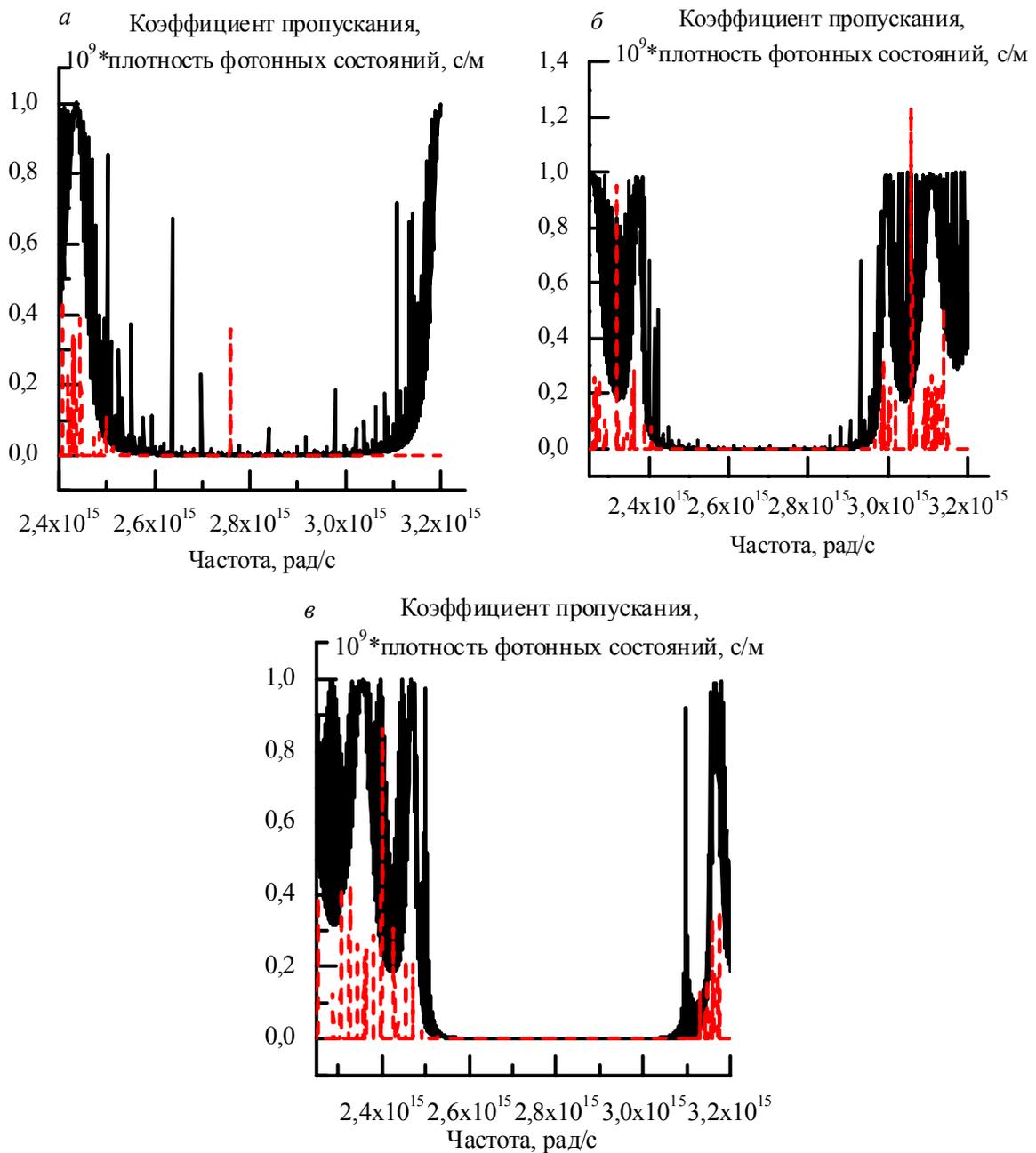


Рис. 2 Частотная зависимость коэффициента пропускания и плотности фотонных состояний ТЕ- (*a*) ТМ- волны (*б*, *в*) *a*)  $\gamma_0 = 30^\circ$ ,  $N = 12$ , *б*)  $\gamma_0 = 3^\circ$ ,  $N = 16$ , *в*)  $\gamma_0 = 30^\circ$ ,  $N = 16$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящем сообщении показано, что наличие анизотропного включения обуславливает существенную модификацию частотной зависимости плотности фотонных состояний: появление дополнительных узких максимумов внутри фотонной запрещенной зоны, чувствительных к геометрии структурного элемента ФК, изменение поло-

жения максимумов  $\rho$  на границе фотонных запрещенных зон и возникновение зависящей от величины анизотропии «модуляции» коэффициента пропускания.

Отметим, что максимумы частотной зависимости плотности фотонных состояний для ТЕ и ТМ волн различны, что обуславливает различие в условиях достижения наибольшей локализации их энергии в среде.

Полученные результаты могут быть использованы при расчете и оптимизации фильтров, устройств задержки, оптических нелинейных преобразователей.

### Литература

1. *Yablonovich E.* Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58. – P. 2059.
2. *Kurilkina S., Kroening M., Kazak N., Belyi V., Khilo N.* Formation of radially and azimuthally polarized Bessel light beams under the interaction with a layered- periodical medium having defect inclusions// Optical Design and Engineering II / Editors: Laurent Mazuray, Rolf Wartmann. Proc. SPIE, 5962, 59622S1 – 59622S8 (2005).
3. *Jon M. Bendickson, Jonathan P. Dowling, Michael Scalora* Analytic expressions for the electromagnetic mode density in finite, one – dimensional, photonic band – gap structures //Phys. Rev. E. – 1996. – Vol. 53, №4. – P. 4107 – 4121.

## ПРИБОР ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА БАЗЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕРМОПАРЫ ТИП К И ТЕРМОРЕЗИСТОРА РТ1000

**Т. К. Фенюк**

Простейший (и, кстати, наиболее точный) метод калибровки значений температуры заключается в составлении и размещении в памяти ЭВМ градуировочной таблицы соответствия значений термо-э.д.с. и температуры, либо термо-сопротивления и температуры (для термо-резистивных преобразователей). Серьезным единственным недостатком табличного метода является его высокая ресурсоемкость, с точки зрения его размещения (при широком температурном диапазоне требуется очень большой объем таблицы).

Когда требуется наиболее точнее подойти к измерению температуры, получить наиболее линейную зависимость, то в этом случае выбор однозначно приходится на термо-резистивные преобразователи, но данный случай не обходится без уменьшения измеряемого интервала температур, что порой весьма осложняет поставленную задачу измерения. Выходом, является комбинированное применение обоих видов первичных преобразователей, что учтено при разработке прибора измерения температуры.

Главными элементами прибора являются соответственно его первичные преобразователи электрического сигнала, в данном случае ими являются термопара и терморезистор. Так как первичный преобразователь является измерительным преобразователем, то он должен характеризоваться следующими параметрами, которые собственно лежат в основе построения и дальнейшей работы прибора:

- коэффициентом преобразования, т.е. отношением изменения выходного напряжения преобразователя к вызвавшей это изменение физической величине. В данном случае этот коэффициент не достаточно велик для обоих преобразователей.

- рабочим диапазоном (минимальным и максимальным уровнем измеряемой физической величины). Для термопары (тип К) в данном приборе диапазон составил:  $T \in [0^\circ \tilde{N}; 900^\circ \tilde{N}]$ . Разумеется – это не предел, а лишь нужный экспериментальный интервал измерения температуры. Для термо-сопротивления диапазон составил:  $T \in [0^\circ \tilde{N}; 900^\circ \tilde{N}]$ .

- погрешностью преобразования в рабочем диапазоне измеряемой величины. В данном случае, погрешность определялась исходя не из приборной (точнее не из погрешности измерения самого первичного преобразователя), а составила заведомо определенную величину  $\delta = \pm 1^\circ C$  для обоих методов, что связано непосредственно с достаточной точностью измерения.

- выходным уровнем напряжения (тока) электрического сигнала. Для термопары (тип К) это значение, относительно измеряемого диапазона, составило:  $U_{\max} = 20,644mV, U_{\min} = 0mV$ . Очевидно, данное значение очень мало для непосредственного измерения, и ведет, при незначительных колебаниях измеряемой величины, к ухудшению отношения сигнал/шум, т.е. уровень реального сигнала практически становится равным уровню шума, что собственно сводит возможность измерения к нулю, поэтому было целесообразным применить масштабирование выходного электрического сигнала. Так же необходимо учесть входной рабочий диапазон измерительной системы. В данном случае таковой является 10-ти разрядный АЦП, соответственно количество возможных состояний:

$$m = \log_2 N \Rightarrow N = 2^{10} = 1024. \quad (1.1)$$

Максимальное отношение сигнал/шум соответствует для такого АЦП:

$$c/u = 20 \lg N \sqrt{1,5} = (6,02m + 1,76) \text{ дБ} = 61,96 \text{ дБ}. \quad (1.2)$$

Но данное соотношение справедливо только для идеальных АЦП. У реальных же АЦП, точность изготовления производителем некоторых узлов не достаточна, что ведет к появлению некоторых погрешностей преобразования, поэтому он измеряется экспериментально и по полученным данным определяется отношение эффективного количества разрядов:

$$m_{эфф} = \frac{c/m - 1,76}{6,02}. \quad (1.3)$$

В случае данного прибора применяется достаточно высококачественный АЦП:

$$c/m \approx 60 \Rightarrow m_{эфф} \approx \frac{60 - 1,76}{6,02} = 9,6 \approx 10 = m. \quad (1.4)$$

В итоге получаем значение реального измерительного кванта шкалы АЦП:

$$h = \frac{A_{\max}}{N} = \frac{5B}{1024} = 0,0048B = 4,8mB. \quad (1.5)$$

Поэтому, для возможности измерения температуры с погрешностью  $\delta = \pm 1^\circ C$ , было произведено масштабирование выходного сигнала до приемлемого уровня (уровня перекрытия кванта АЦП + 10% запас, для уменьшения вероятности воздействия шумов на измерительную систему), в соответствии с выражением для применяемого операционного усилителя с компенсацией температуры «холодного спая» AD595:

$$U_{out} = (U_{TermocoupleK} + 11mV) \cdot 247,3 \approx 10mV/^\circ C. \quad (1.6)$$

Таким образом, уровень выходного  $U$  при измерении:  $U_{\max} = 4,9928 V$ ,  $U_{\min} = 0 V$ . Для терморезистора, находящегося в составе измерительного моста (для уменьшения влияния самонагревания; тип Pt1000), выходной уровень напряжения измеряемого сигнала, преобразованного относительно изменяющегося диапазона сопротивления и температуры, согласно уравнению моста составил, при использовании предварительного ОУ AD627, с КУ  $k=7$ :  $U_{\max} = 4.999V$ ,  $U_{\min} = 0V$ ,  $U_{out} \approx 10mV/^\circ C$ .

- нелинейность коэффициента преобразования. В обоих методах измерения данная нелинейность была скомпенсирована градуировочными таблицами, которые были рассчитаны, относительно таблиц реальных преобразователей, для случая с применением предварительного усиления.

Принципиальная электрическая схема прибора измерения температуры представлена на рисунке. Главным элементом схемы, организующим

функционирование, является микроконтроллер AVR архитектуры ATmega16, в котором содержится код управляющей программы, представляющий собой определенный алгоритм измерения, составленный разработчиком.

Остальными, входящими в прибор, элементами, являются два ОУ: AD627, AD595. Оба служат, как обсуждалось, для масштабирования входных сигналов от первичных преобразователей на шкалу используемого АЦП. Важной частью схемы является блок управления нагрузкой, который работает под управлением микроконтроллера и включает в себя микросхему МОС308, транзисторный каскад для ее управления, симистор ВТА41, собственно который позволяет управлять нагрузкой с током до  $I=40A$  и напряжением до  $U=800V$ . Микросхема ADM232AAN служащая преобразователем логики TTL в логику интерфейса RS232. Остальные элементы являются согласующими для работы устройства в целом.

В работе прибор чрезвычайно прост! Программа автоматически производит все операции по определению температуры: получение значения входного напряжения на АЦП, поиск по соответствующей таблице, вывод результата, контроль нагрузки по выбранному алгоритму (с гистерезисом либо без него), передача на терминал, переход в первоначальное состояние.

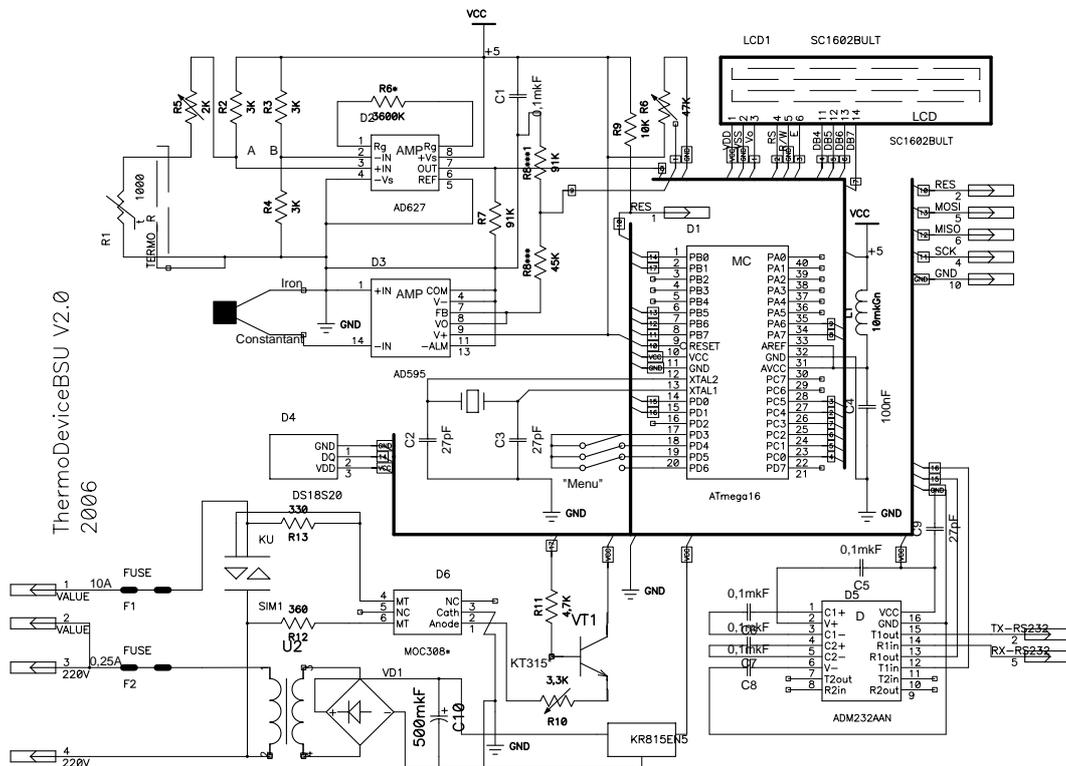


Рисунок. Принципиальная электрическая схема прибора измерения температуры ThermoDeviceBSU V2.0

Стоит отметить тот факт, что главный управляющий программный код разработан для функционирования в нелинейном режиме, используя при этом общие принципы работы с системным ядром, делая в конечном итоге рассмотренный прибор измерения температуры, в сочетании с достаточно низкой себестоимостью, вполне приемлемой частью автоматического измерительного комплекса в составе АСУ (автоматическая система управления).

#### Литература

1. *Стильбанс Л. С.* Физика полупроводников / М., 1967.
2. *Ямный В. Е., Яновский В. П.* Основы автоматизации физического эксперимента / Минск: БГУ, 2004.
3. *ATMEL* Microcontroller AT90S4433 / 2002.
4. *ANALOG DEVICES* Monolithic Thermocouple Amplifiers with Cold Junction Compensation AD594/AD595 / 1997.
5. *ANALOG DEVICES* Micropower, Single and Dual Supply Rail-to-Rail Instrumentation Amplifier AD627 / 2001.

### ВЛИЯНИЕ КИСЛОРОДА НА ФОТОНАВЕДЕННОЕ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ В ПОЛИМЕРНОМ СЛОЕ

Д. А. Фролова

Кислород воздуха оказывает влияние на фотопревращение полимеров, приводя к тушению электронно-возбужденных состояний и окислению компонентов полимерного материала [1;2]. При записи фотонаведенного двулучепреломления в полимерной пленке эти явления могут уменьшать максимально достигаемую величину анизотропии. Одним из таких типов регистрирующих материалов с фотонаводимым двулучепреломлением являются бензальдегидсодержащие полимеры, анизотропия в которых образуется за счет реакции сшивания бензальдегидных групп макромолекул под действием линейно-поляризованного УФ излучения.

Процесс записи двулучепреломления в слоях бензальдегидсодержащих полимеров описывают при помощи осцилляторной модели [3]. Она предполагает, что поляризованное УФ излучение поглощается ансамблем хаотически ориентированных осцилляторов. Возбуждение осциллятора *A* приводит к его превращению в осциллятор *B*, параллельный *A* и фотохимически неактивный. Одновременно с этим идет конкурирующий процесс переноса энергии с возбужденной частицы *A\** на молекулярный кислород  $O_2$ , в результате чего образуется синглетный кислород  $O_2^*$ , который, в свою очередь, вступает в реакцию фотосенсибилизированного окисления [4] частицы *A*.

Известно, что вероятность возбуждения частицы-осциллятора линейно поляризованным светом пропорциональна квадрату проекции напряженности электрического вектора волны на направление колебаний осциллятора, т.е.  $\cos^2 \theta$ , где  $\theta$  – угол между осциллятором и электрическим вектором. Следствием этой зависимости является развитие ориентационной анизотропии осцилляторов  $A$  и образование анизотропного ансамбля осцилляторов  $B$ . При этом распределение продуктов реакции окисления  $AO_2$  изотропно, так как синглетный кислород вступает в реакцию окисления независимо от ориентации в пространстве частиц  $A$ .

В случаях, когда ослабление интенсивности активирующего излучения по толщине полимерного слоя значительно, распределение света и реагентов по объему образца становится неравномерным.

Следствием этого является то, что в ходе фотохимических реакций концентрации веществ будут изменяться по-разному, и концентрации веществ и интенсивность активирующего излучения  $I(y,t)$ , являются функциями двух переменных – времени протекания реакции  $t$  и расстояния  $y$  данной точки от облучаемой поверхности образца. Распределение интенсивности света по толщине слоя определяется законом Бугера-Ламберта-Бера в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial I(y,t)}{\partial t} = -I(y,t)(\sigma_A A(y,t) + \sigma_B B(y,t)), \quad (1)$$

где  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$  – сечения поглощения частиц  $A$  и  $B$ ;  $A(y,t)$ ,  $B(y,t)$  – их общие концентрации.

Система дифференциальных уравнений, определяющая превращение всех участников реакции, примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A(\theta, y, t)}{\partial t} = -k_r A^*(\theta, y, t) - k_{ox} A(\theta, y, t)[O_2^*] \\ \frac{\partial A^*(\theta, y, t)}{\partial t} = \sigma_A I(y, t) A(\theta, y, t) \cos^2 \theta - k_r A^*(\theta, y, t) - k_t A^*(\theta, y, t)[O_2] \approx 0 \\ \frac{\partial [O_2^*]}{\partial t} = k_t A^*(y, t)[O_2] - k_{ox} A(y, t)[O_2^*] \approx 0 \\ \frac{\partial B(\theta, y, t)}{\partial t} = k_r A^*(\theta, y, t) \end{array} \right. , \quad (2)$$

где  $k_r$  – константа скорости образования фотопродукта  $B$ ,  $k_t$  – константа скорости переноса энергии с осциллятора  $A^*$  в возбужденном состоянии на молекулярный кислород  $O_2$ ,  $k_r$  – константа скорости дезактивации возбужденного состояния  $A^*$ ,  $k_{ox}$  – константа скорости окисления.

Синглетный кислород и частицы  $A^*$  – являются промежуточными продуктами данной многоступенчатой фотохимической реакции, т.е их количество достигает определенного уровня и не изменяется в силу установления баланса скоростей их образования и расходования, поэтому для решения системы (2) можно полагать, что скорость изменения их концентраций равна нулю.

В случае анизотропного поглощения активирующего излучения, создающего ориентационно-упорядоченное распределение частиц, уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial I(y,t)}{\partial y} = -I(y,t) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (A(\theta, y, t)\sigma_A \cos\theta + B(\theta, y, t)\sigma_B \cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (3)$$

где  $\sigma_A \cos\theta$  и  $\sigma_B \cos\theta$  – проекции сечения поглощения осцилляторов  $A$  и  $B$  на направление распространения светового пучка.

Вводя величину экспозиции  $u(y)$  на удалении  $y$  от облучаемой поверхности слоя в момент времени  $t$ , получим закон поглощения в виде:

$$\frac{\partial u(y)}{\partial y} = -u(y) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sigma_A A(\theta, u) + \sigma_B B(\theta, u)) \cos\theta d\theta d\varphi, \quad (5)$$

где  $A(\theta, u) = \frac{A_0}{2\pi} \exp(-k_1 u(y) \cos^2 \theta)$  и  $B(\theta, u) = \frac{A_0}{2\pi} k_2 (1 - \exp(-k_1 u(y) \cos^2 \theta))$ ,

$$k_1 \equiv \sigma_A \frac{k_r + k_t[O_2]}{k_r + k_t[O_2]}, \quad k_2 \equiv \frac{k_r}{k_r + k_t[O_2]}.$$

Проинтегрировав (5) по углам, можно получить уравнение для вычисления  $u(y)$ , зависящих от экспозиции  $H$  на облучаемой поверхности слоя:

$$\frac{\partial u(y)}{\partial y} = -\frac{A_0}{2} \left( \frac{\sigma_A - k_2 \sigma_B}{k_1} (1 - \exp(-k_1 u(y))) + \sigma_B k_2 u(y) \right) \quad (6)$$

Решение уравнения (6) дает при начальном условии  $u(0) = H$  распределение экспозиции по толщине слоя с течением времени  $H(y, t)$ . Очевидно, что величина локального фотонаведенного двулучепреломления примет вид[3;5]:

$$\delta n(y, t) = \frac{(n^2 + 2)^2}{6n} \frac{A_0}{2} (R_A - k_2 R_B) \times \left( \frac{1 - \exp(-k_1 H(y, t))}{k_1 H(y, t)} - \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^2} \exp(-k_1 H(y, t) \xi^2) d\xi \right) \quad (7)$$

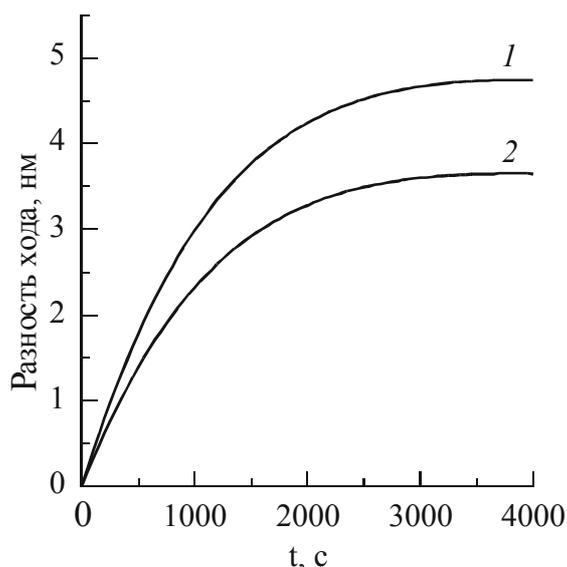


Рис. 1. Рассчитанные кинетики разности хода:

1 – в вакууме, 2 – в воздухе;  $[O_2] = 510^{-3}$  моль/л,  
 $n=1,5$ ;  $A_0=1$  моль/л;  $I_0 = 10$  мВт/см<sup>2</sup>

лучепреломление в слоях бензальдегидсодержащих полимеров толщиной 5–6 мкм, достигаемое в присутствии кислорода на 30% меньше, чем в вакууме. Экспериментально полученное значение составляет 35%.

Таким образом, моделирование записи двулучепреломления в воздухе дает возможность качественно объяснить влияние кислорода на развитие анизотропии в полимерном слое, а также позволяет выбрать условия для минимизации деструктивного влияния кислорода.

При визуализации двулучепреломляющих изображений существенна разность хода для ортогональных поляризаций зондирующего пучка:

$$\Delta(t) = \int_0^l \delta n(y, t) dy, \quad (8)$$

где  $l$  – толщина полимерного слоя.

Константы скоростей были оценены по литературным данным [6;7] для процессов образования и тушения синглетного кислорода. Расчетом показано (рис.1), что максимальное дву-

### Литература

1. Рэнби Б., Рабек Я. Фотодеструкция, фотоокисление, фотостабилизация полимеров / Пер. с англ. В. Б. Иванова; Под ред. Н. М. Эмануэля. М., 1978.
2. Шляпнико В. Я. Фотохимические превращения и стабилизация полимеров / М., 1979.
3. Могильный В.В., Станкевич А.И. Двулучепреломление фоточувствительных полимерных слоев, наведенное линейно-поляризованным светом // Взаимод. излучений с твердым телом. Материалы V междунар. конф. Минск, 2003.–Ч.1.–С. 179.
4. Braun A. M., Oliveros E. Applications of singlet oxygen reactions: mechanistic and kinetic investigations // Pure&Appl. Chem. Vol. 62. 1990. P. 1467–1476.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики / Пер. с англ. С. Н. Бреуса, А. И. Головашкина, А. А. Шубина; Под ред. Г. П. Мотулевич. М., 1973.
6. Wilkinson L., Helman W.P., Ross A.B. Rate constants for the decay and reactions of the lowest electronically excited state of molecular oxygen in solution. An expanded and revised compilation // J. Phys. Chem. Ref. Data. Vol. 22. 1993. P. 113–262.
7. Wilkinson I., Brummer J. G. Quantum yields for the photosensitized formation of the lowest electronically excited singlet state of molecular oxygen in solution // J. Phys. Chem. Ref. Data. Vol. 10. 1981. P. 809–999.

# СОВРЕМЕННЫЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА РАСПРОСТРАНЕННОСТЬ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР В КОСМОЛОГИЧЕСКИХ СЦЕНАРИЯХ МИРА НА БРАНЕ

Ю. А. Целков

Проверка космологических следствий из современных фундаментальных физических теорий является, вместе с ускорительными экспериментами, одним из закономерных способов установления адекватности стандартной модели. Вместе с гравитационными волнами и нейтрино, первичные черные дыры (ПЧД) способны нести информацию о ранней Вселенной [1,2]. В данной работе ставится задача получить ограничения на распространенность ПЧД при различных красных смещениях в модели мира на бране Randall-Sundrum II (RS2), рассматриваемой в контексте теории суперструн и представляющей нашу Вселенную как гиперповерхность, локализованную в пятимерном пространстве анти-де Ситтера.

Распространенность ПЧД вводится как отношение

$$\alpha(t) = \frac{\rho_{PBH}(t)}{\rho_{rad}(t)}, \quad (1)$$

где  $\rho_{PBH}$  и  $\rho_{rad}$  – плотность ПЧД и энергии излучения соответственно. Начальные массы сформированных к моменту времени  $t_i$  ПЧД есть

$$M_i = 16 f M_4 \frac{l_4}{l} \left( \frac{t_i}{t_4} \right)^2, \quad (2)$$

где  $f \sim 1$ ,  $l$  – радиус кривизны дополнительного измерения, а  $l_4$ ,  $t_4$ ,  $M_4$  – четырехмерные планковские длина, время и масса. Особенностью модели RS2 является предсказание существования нестандартной высокоэнергетической фазы в ранней Вселенной [3-6], оканчивающейся к моменту

$$t_c = \frac{t_4}{2} \frac{l}{l_4}, \quad (3)$$

во время которой масштабный фактор ведет себя как  $a \sim t^{1/4}$ , при этом  $\rho_{rad} \sim t^{-1}$ . Это ведет к значительному росту массы ПЧД:

$$M(t) = M_i \left( \frac{t}{t_i} \right)^{2F/\pi}, \quad (4)$$

где  $F$  – коэффициент аккреционной эффективности [4,7], отражающий специфику взаимодействия ПЧД и окружающей материи. Так, в случае бесстолкновительной аккреции  $F=1$ . Ранее [4-7] значение  $F$  выбиралось

на основе качественных соображений, однако в [8] было показано, что  $F = 8/3\sqrt{3}$  и обосновано применение гидродинамического приближения.

После окончания высокоэнергетической фазы ПЧД испаряются, испуская хоккинговское излучение за время

$$t_{ev} \approx \frac{t_4}{0.0024g} \frac{l}{l_4} \left( \frac{M(t_c)}{M_4} \right)^2, \quad (5)$$

где  $g$  – число типов частиц, испускаемых ПЧД при температуре  $T_{bh} = T_4 l / 2\pi r_{bh}$ ,  $T_4 = 10^{32} K$  – планковская температура, а

$$r_{BH} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \sqrt{\frac{l}{l_4}} \sqrt{\frac{M}{M_4}} l_4 – \text{гравитационный радиус пятимерной ПЧД.}$$

Факт модификации поведения пятимерной ПЧД в ранней Вселенной ведет к наблюдательным ограничениям на их распространенность в этих моделях, так как значение распространенности (1) к моменту (5) будет

$$\alpha(t_{ev}) = \alpha_i(M_i) \frac{M(t_c)}{M_i} \frac{a(t_{ev})}{a(t_i)}. \quad (6)$$

Отношение масштабных факторов при этом

$$\frac{a(t_{ev})}{a(t_i)} = \left( \frac{t_c}{t_i} \right)^{1/4} \left( \frac{t_{ev}}{t_c} \right)^{1/2}, \quad \text{если } t_{ev} < t_{eq}, \quad (7)$$

$$\frac{a(t_{ev})}{a(t_i)} = \left( \frac{t_c}{t_i} \right)^{1/4} \left( \frac{t_{eq}}{t_c} \right)^{1/2} \left( \frac{t_{ev}}{t_{eq}} \right)^{2/3}, \quad \text{если } t_{ev} > t_{eq}, \quad (8)$$

где  $t_{eq} \approx 72\ 600$  лет, момент равновесия вещества и излучения.

Следовательно, получая из наблюдений ограничение для массовой доли ПЧД при разных красных смещениях к моменту их испарения в разные эпохи  $\alpha(t_{ev})$ , можно через (6–8) восстановить искомое ограничение на начальную распространенность  $\alpha(t_i)$ .

Проиллюстрируем это на нескольких примерах и рассмотрим сначала как можно получить ограничения из наблюдаемого теперь спектра диффузионных гамма-квантов (т.е. при малых  $z$ )[6].

Напомним, что с точки зрения обнаружения наиболее благоприятны для наблюдений ПЧД, испаряющиеся в данную эпоху, то есть те, у которых  $t_{ev} \approx 13.6$  млрд. лет. Из (5) получим массу в конце фазы активной аккреции для таких ПЧД в зависимости от радиуса кривизны  $l$ , а из (4) – начальные массы.

Считая, что спектр наблюдаемых диффузионных гамма-квантов произведен такими испаряющимися ПЧД, можно получить начальную распространённость, если учесть, что производимый ими спектр излучения будет

$$I(E) = \frac{c}{4\pi} \frac{M^*}{E} n(t_{ev}, M_i(M^*)), \quad (9)$$

где  $M^* = M(t_c)$ ,  $n$  – концентрация ПЧД в эпоху испарения, вычисленная с учетом эволюции масштабного фактора, а  $E \sim 5T_{bh}$  – энергия гамма-излучения ПЧД. Результаты сопоставления (9) с экспериментальными данными [6], представлены на *рис. 1* из которого видно, что пятимерные ПЧД ведут к значительному ужесточению ограничений на их распространённость.

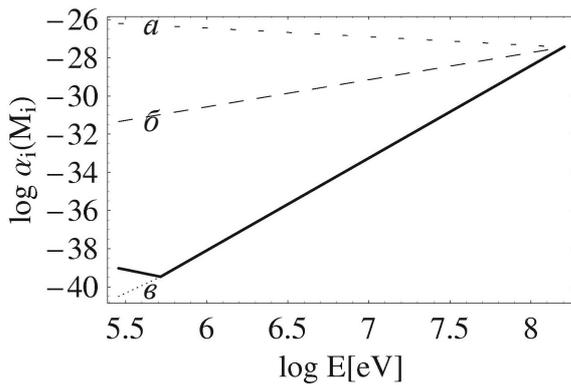
Следующее ограничение можно получить из анализа остаточных степеней ионизации водорода  $x_H$  хоккинговским излучением ПЧД при больших красных смещениях, что влияет как на распространение излучения, так и на формирование звезд 3-го поколения при  $z \approx 20$ . Известно, что  $x_H < 10^{-4}$  [9]. Учитывая связь между барионной и фотонной плотностями энергий и полагая,

что на ионизацию  $H$  идет  $\sim 100 \text{ eV}$ , найдем

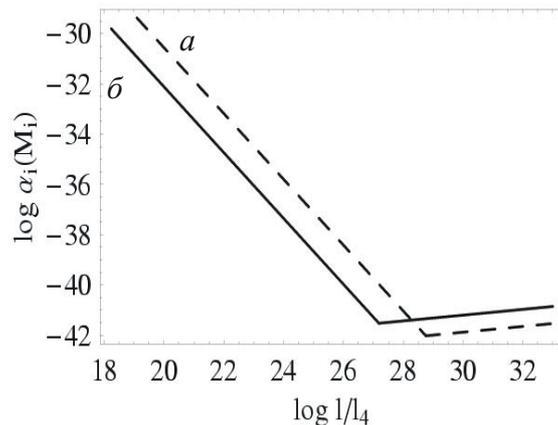
$$\alpha(t_{ev}) \approx \frac{1,2 \times 10^{-8}}{1 + z_{ev}}, \quad (10)$$

Из (6–8) получим результат, приведенный на *рис. 2*.

Подобным образом можно получить ограничения для ПЧД из различ-



*Рис. 1.* Ограничения на начальную распространённость ПЧД на основании спектра диффузионных фотонов:  
 $a - F = 0,5$ ,  $b - F = 1$ ,  $в - F = 1,54$



*Рис. 2.* Ограничения на начальную распространённость ПЧД на основании Ионизации водорода:  
 $a - z_{ev} = 20$ ,  $b - z_{ev} = 1100$

ных эпох и при различных процессах, начиная от эпохи первичного нуклеосинтеза.

Результаты вычислений приведены в таблице. Как видно, ограничения на распространенность ПЧД, вытекающие из модели RS2, на много порядков ниже аналогичных в случае четырехмерия, представленных в последнем столбце, что ведет и к пересмотру спектра первичных флуктуаций, ответственных за образование космических структур.

Таблица

Ограничения при  $l=l_{min}$ ,  $l_{max}$  и максимальное ограничение при  $l=l^*$

Источник ограничений	Логарифм из:					
	$\alpha_i(l_{max})$	$l_{min}/l_4$	$\alpha_i(l_{min})$	$l^*/l_4$	$\alpha_i(l^*)$	$\alpha_i(4D)$
Полная плотность материи	-30	20	-18	30	-31	-18
Диффузионные фотоны	-39	20	-27	30	-39,5	-27
Избыток антипротонов	-35	20	-28	30	-36	-29
Распад дейтерия при 400 с	-27,3	15	-20,7	20,7	-28,5	-18
Распад дейтерия при $10^8$ с	-28,7	16,5	-20	24	-29,5	-19
Распад дейтерия при $10^{13}$ с	-30	18	-19	27	-30,5	-19,5
Распространенность He	-27	14	-17	19	-25,5	-17,5
Спектр СМВ при $z=2 \cdot 10^6$	-30	16,6	-21	24	-31	-21
Спектр СМВ при $z=1100$	-34	18,3	-22,5	27	-34,2	-21
Ионизация H при $z=1100$	-41	18,3	-29,7	27	-41,5	-28,5
Ионизация H при $z=20$	-41,7	19	-29,3	28,7	-42	-28,5

### Литература.

1. Зельдович Я. Б. Новиков И. Д. // Астрон. Журн. 1966, Т. 43, с 758.
2. Hawking S. W. // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1971, v.152, p75.
3. Guedens R., Clancy D. and Liddle A. R. // Phys. Rev. D66, 043513 (2002) (astro-ph/0205149).
4. Guedens R., Clancy D. and Liddle A. R. // Phys. Rev. D66, 083509 (2002) (astro-ph/0208299).
5. Clancy D., Guedens R. and Liddle A. R. // Phys. Rev. D68, 023507 (2003) (astro-ph/0301568).
6. Sendouda Y., Nagataki S., Sato K // Phys. Rev. D68, 103510 (2003) (astro-ph/0309170)
7. Sendouda Y., Kohri K., Nagataki S. and Sato K. // Phys. Rev. D71, 063512 (2005) (astro-ph/0408369).
8. Tikhomirov V.V., Tsalkou Yu. A. // Phys. Rev. D72, 121301(R) (2005) (astro-ph/0510212).
9. Насельский П. Д. // Письма в Астрон. Журн. 1978, 4, с 387.

## КВАНТОВАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ НА ПРИМЕСНОМ ЦЕНТРЕ КРИСТАЛЛА АЛМАЗА

А. С. Чернухо

Квантовая теория информации является одной из передовых современных теорий. Как известно, в течение уже достаточно длительного периода традиционная вычислительная техника развивается, в основном, экстенсивным путем. Прогресс в области компьютерной техники достигается за счет миниатюризации ее базовых элементов. Однако ясно, что долго двигаться таким путем не удастся – уже в наши дни велика озабоченность невозможностью дальнейшего совершенствования в традиционном направлении. Это проявляется в серьезной заинтересованности научного сообщества в создании так называемого квантового компьютера. Ясно, что нет никакого смысла развивать технику аналогичную существующей, только значительно более дорогую – должны существовать непротиворечивые доказательства того факта, что квантовые компьютеры дадут значительный прирост производительности, если не общей, то хотя бы в нескольких ключевых направлениях. Активная деятельность вокруг квантовой теории информации развернулась как раз после обнаружения алгоритмов, демонстрирующих кардинальное увеличение производительности квантовой техники по сравнению с традиционной. Первым стал алгоритм Дойча - Йоса [1]. Немного позже Шор открыл способ быстрой факторизации чисел [2], а Гровер – поиска в базе данных [3]. Все алгоритмы, конечно, должны использовать исключительные свойства квантовой теории, чтобы обойти классические аналоги. Такими свойствами являются перепутанность и параллелизм. Следует также обратить внимание на успехи в создании собственно оборудования для квантовых вычислений. Усилия здесь прикладываются в множестве различных направлений: использование единичных спинов, ансамблей атомов, квантовых точек, сверхпроводящих элементов (SQUID), и т.д. Конечно же, как только научная группа полу чает более или менее работоспособный образец квантового оборудования, производится проверка одного из квантовых алгоритмов. В этой работе будет представлена проверка алгоритма Дойча-Йоса на примесном NV-центре в кристалле алмаза и, кроме того, реализация белловских состояний на этом же центре. Техника получения алмазов с единичными NV-дефектами была разработана и реализована в университете Штуттгарта [4].

Мы будем рассматривать дефект в кристалле алмаза типа «азот-вакансия» связанный с ближайшим атомом углерода  $^{13}\text{C}$ . Схема нижних

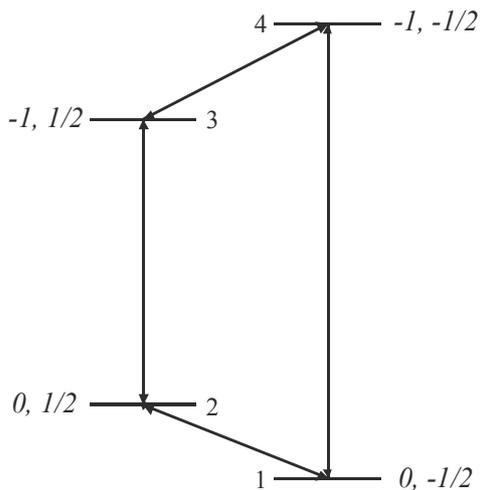


Рис. 1. Схема уровней NV дефекта в кристалле алмаза  
Частоты переходов : 1–4 2.88 ГГц,  
1–2 10МГц, 3–4 130 МГц

четырёх уровней дефекта, находящегося в сильном магнитном поле, приведена на рис. 1. Переходы 1–4 и 2–3 лежат в радиоволновой области, в то время как 3–4 – в микроволновой. Частота перехода 1–2 очень мала (порядка 10МГц), поэтому использование этого перехода не представляется возможным. Хочется отметить, что в алмазе существует более ста цветовых центров, повышенный интерес к дефекту NV типа связан с тем, что связь такого центра с фоновыми возбуждениями решетки чрезвычайно слаба. Это приводит к тому, что продольные времена релаксации системы порядка секунд, а поперечные составляют десятки мкс

(сотни для очень чистых образцов алмаза, т.к. время релаксации сильно зависит от концентрации атомов азота), причем приведенные времена даны для комнатной температуры, что делает такие центры реальными претендентами на использование в качестве основы для квантового компьютера. Создание Белловского состояния осуществляется особенно просто – необходимо приложить лишь два импульса:  $\pi/2$ -импульс в канале 2–3 и  $\pi$  в канале 3–4. Второй импульс должен быть селективным. Результаты симуляции этого процесса с учетом релаксации представле-

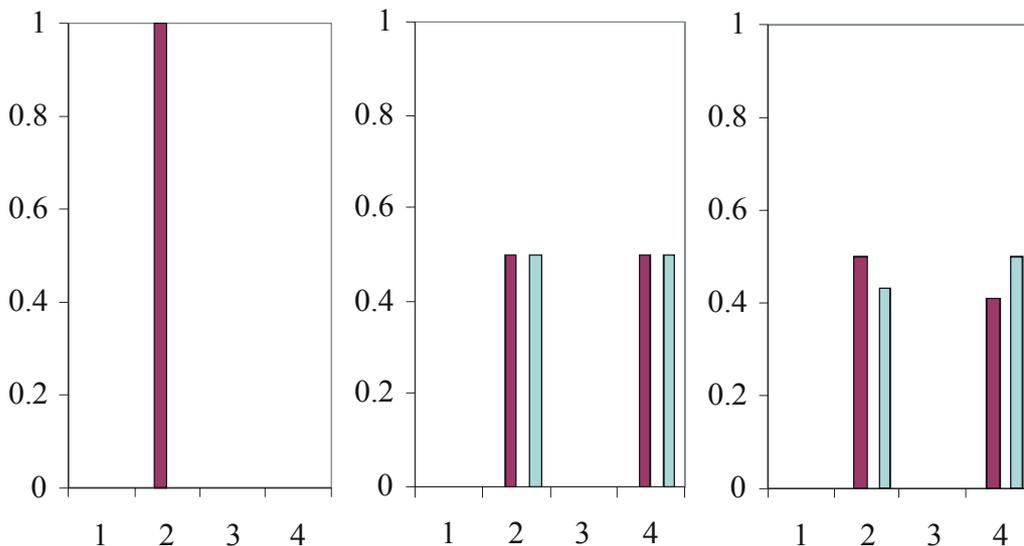
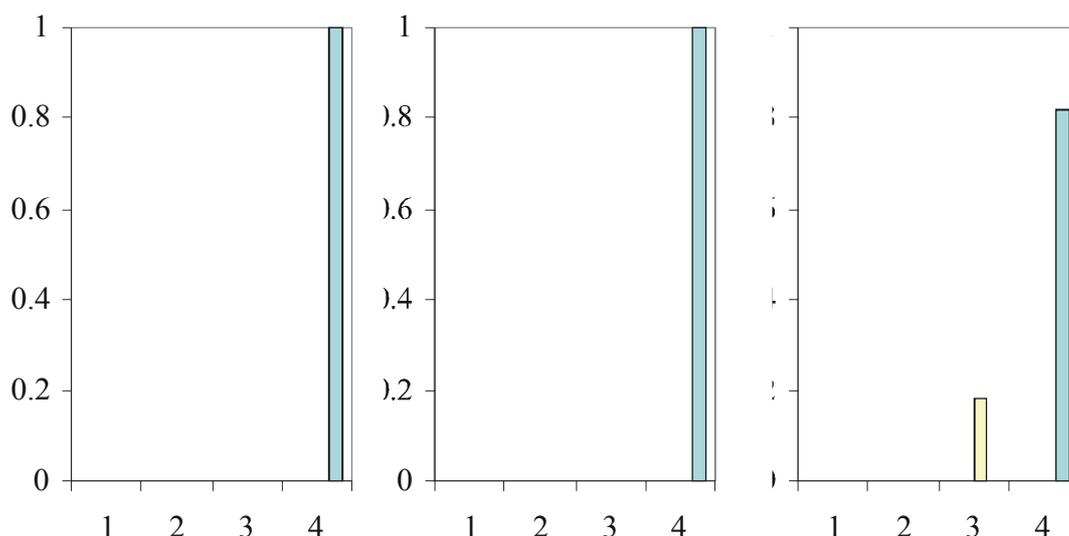


Рис.2. Результаты симуляции процесса создания Белловских состояний.  
Справа исходное состояние, по центру идеальное конечное состояние,  
слева конечное состояние с учетом релаксации

ны на *рис. 2*. Самым первым алгоритмом, продемонстрировавшим существование областей, в которых квантовый компьютер имеет подавляющее преимущество над классическим, стал алгоритм Дойча – Йоса. Этот алгоритм, очевидно, не имеет практической ценности сам по себе, однако он является самым простым в смысле реализации и, тем не менее, демонстрирует возможности применения таких явления квантового мира как параллелизм и перепутанность. Обычно, как только исследовательская группа получает работоспособный образец, реализующий квантовый бит, она реализует именно этот алгоритм. По этой причине мы и решили осуществить его симуляцию на примесном NV центре. Последовательность импульсов в этом случае более сложна и имеет вид:  $\pi$  в канале 2–3,  $3\pi/2$  в канале 3–4,  $2\pi$  либо  $4\pi$  в канале 1–4 и, наконец,  $-\pi/2$  в канале 3–4. Альтернатива для третьего импульса задает либо постоянную, либо сбалансированную функцию алгоритма. Результаты симуляции представлены на *рис. 3, 4*.

Таким образом, сравнительно большие времена релаксации позволяют достаточно эффективно реализовать алгоритм. Из диаграмм видно, что к окончанию алгоритма распадается примерно 18% населенностей. Это, в частности, достигается за счет оптимизации последовательности импульсов до четырех, что значительно снизило общее время, необходимое для реализации алгоритма.

В заключение отметим, что реализация высокоэффективных квантовых алгоритмов является, безусловно, одной из важнейших задач современной науки. Однако для этого необходимы, в первую очередь, квантовые биты высокой стабильности. До тех пор, пока такие долгоживущие



*Рис. 3* Результаты стимуляции алгоритма Дойча – Йоса для постоянной функции.

Справа – исходное состояние, по центру – идеальное состояние,  
слева – конечное состояние с учетом релаксации

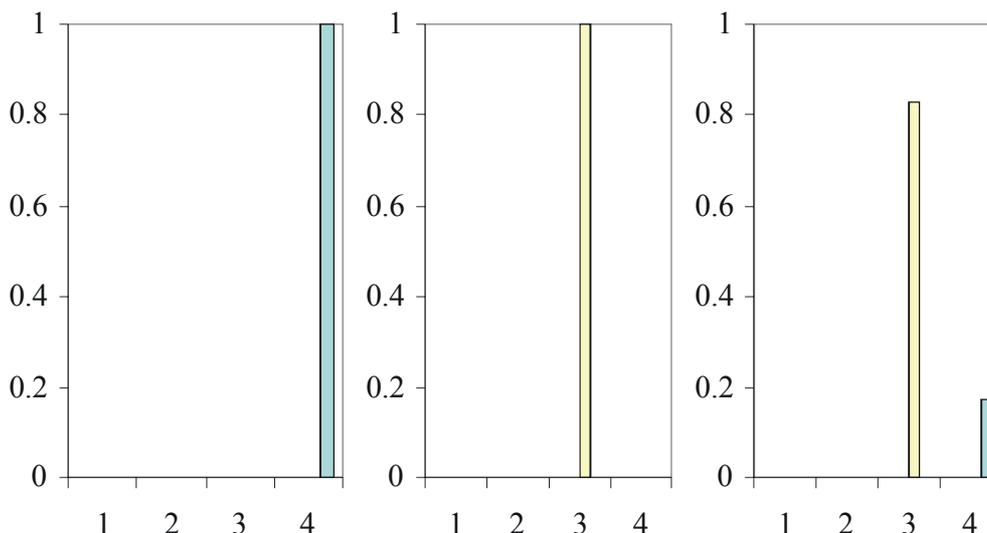


Рис.4 Результаты стимуляции алгоритма Дойча – Йоса для сбалансированной функции.  
Справа – исходное состояние, по центру – идеальное состояние,  
слева – конечное состояние с учетом релаксации

элементы не будут получены, воплотить в жизнь алгоритмы вроде алгоритма Шора или Гровера будет весьма сложно.

#### Литература

1. *Deutsch D. and Jozsa R.* Rapid Proc. R. Soc. London *A439* (1992) 553–558.
2. *Shor P.* SIAM J. Comput. 26 (1997) 1484–1509.
3. *Grover L. K.* Proc. 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), May (1996) 212–219.
4. *Jelezko F., Gaebel T., Popa I., Gruber A., Wrachtrup J.* Coherent oscillations in a single electron spin at room temperature.

## СПЕКТРАЛЬНО-КИНЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ НАНОКРИСТАЛЛОВ CdSe И ОРГАНИЧЕСКИХ ЛИГАНДОВ

А. А. Яровой

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наметился устойчивый интерес к разработке функциональных гетероструктур на основе полупроводниковых нанокристаллов (НК) и органических молекул, в которых реализуются фотоиндуцированное разделение заряда [1] или направленный перенос энергии [2], что представляет интерес для разработки функциональных устройств в нанотехнологиях. В данной работе излагаются принципы формирования в жидких растворах композитов на основе полупроводниковых НК

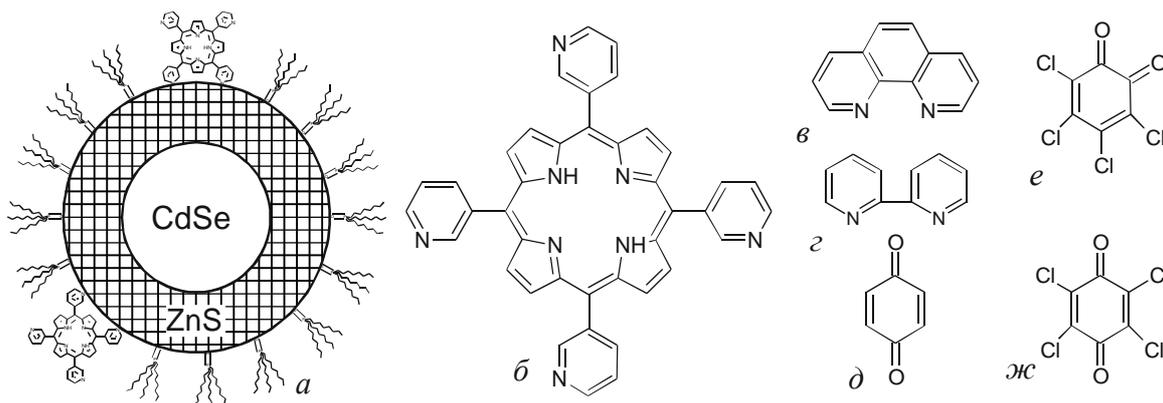


Рис. 1. Объекты исследования: *a* – гетероструктура «нанокристалл-порфирин», *б* – тетра-(*m*-пиридил)-порфирин, *в* – 1,10-фенантролин, *г* – 2,2'-дипиридин, *д* – 1,4-бензохинон (1,4-BQ), *е* – тетра-хлоро-1,2-бензохинон (tCl-1,2-BQ), *ж* – тетра-хлоро-1,4-бензохинон (tCl-1,4-BQ) CdSe/ZnS и CdSe, поверхностно активированных органическими компонентами (рис.1), а также рассматриваются возможные пути и механизмы релаксационных процессов в таких объектах.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В экспериментах по титрованию НК Catskill Green (CdSe/ZnS,  $d = 2.4$  нм, 2 монослоя ZnS) в толуоле при 295 К молекулами тетра-(*m*-пиридил)-порфирина ( $H_2P(m-Pyr)_4$ ), фенантролина и дипиридина образование композитов «НК-органический лиганд» реализуется за счет координационной связи между атомами Zn НК и периферическими атомами N органической компоненты. Формирование таких композитов проявляется в тушении фотолюминесценции (ФЛ) НК при увеличении молярного отношения  $X = C_{\text{лиганд}}/C_{\text{НК}}$ . Как видно из рис. 2, в случае фенантролина и дипиридина ход кривых тушения ФЛ ( $I/I_0$ ) НК примерно одинаков (при  $X=11$  значения  $I/I_0$  составляют 0.87-0.90), тогда как в случае  $H_2P(m-Pyr)_4$  тушение ФЛ НК сильнее (при  $X=8$   $I/I_0=0.4$ ).

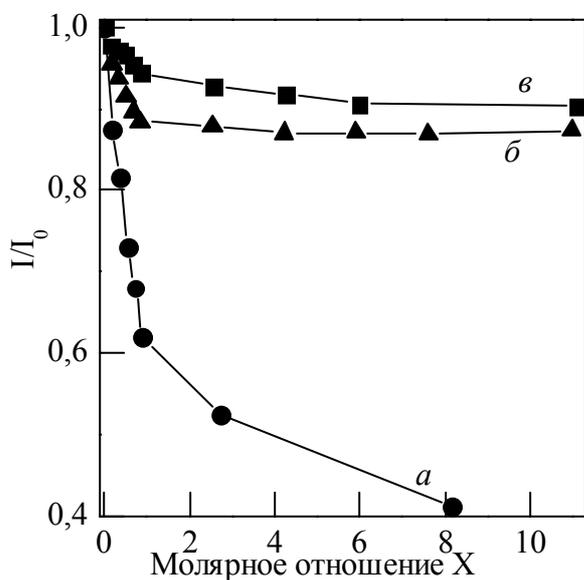


Рис. 2. Зависимость интенсивности ФЛ НК Catskill Green от молярного отношения лиганда в толуоле при 295 К:

*a* – тетра-(*m*-пиридил)-порфирин,  
*б* – 1,10-фенантролин, *в* – 2,2'-дипиридин

Различия в тушащем действии фотолюминесценции наночастиц молекулами порфирина по сравнению

нию с молекулами фенантролина и дипиридина объясняются несколькими причинами: 1) в молекуле порфирина вращение мезо-пиридилльных колец относительно одиночной С–С связи при расстоянии между атомами N в соседних пиридилльных кольцах  $r=10\text{\AA}$  обеспечивает реальное двухточечное взаимодействие с поверхностью НК; 2) в случае молекул фенантролина и дипиридина расстояние между соседними атомами азота существенно меньше, что по геометрическим соображениям (учет расстояния между соседними атомами Zn в поверхностном монослое ZnS) может не обеспечить двухточечного взаимодействия этих лигандов с поверхностью НК. Тушение ФЛ НК во всех исследованных системах можно связать с возмущающим действием «якорных» групп лигандов на свойства поверхностных состояний НК, влияющих на безызлучательную дезактивацию делокализованных экситонов в НК.

Для изучения закономерностей релаксационных процессов в гетерогенных нанокompозитах, в которых возможно тушение фотолюминесценции НК по механизму фотоиндуцированного переноса электрона на лиганд, в данной работе были исследованы системы на основе НК Aloe Green (CdSe,  $d=2,6$  нм) и ряда хинонов (см. рис. 1). Молекулы хинона и его производные характеризуются низкими потенциалами восстановления (например, для молекулы 1,4-BQ  $E_{1/2}^{\text{red}} = -0.45$  В [3]) и используются как эффективные акцепторы электрона. Выбор НК Aloe Green в качестве донорной компоненты обусловлен тем, что данный НК не имеет поверхностных монослоев ZnS. Поэтому возможный фотоиндуцированный пере-

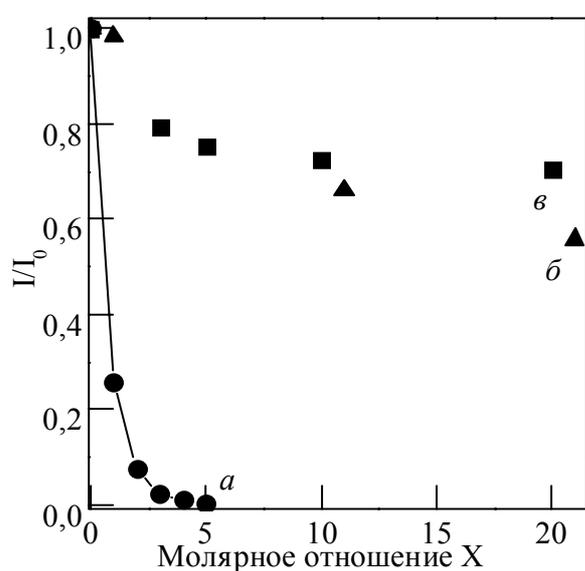


Рис. 3. Зависимость интенсивности ФЛ НК Aloe Green от молярного отношения акцептора в толуоле при 295 К: а – tCl-1,2-BQ, б – tCl-1,4-BQ, в – 1,4-BQ

нос электрона из зоны проводимости НК на низшие вакантные молекулярные орбитали (НВМО) хинона будет происходить напрямую без участия ZnS, создающего потенциальный барьер для такого процесса.

При добавлении возрастающего количества хинона в раствор НК в толуоле наблюдалось падение интенсивности фотолюминесценции НК. При этом положение и форма спектров фотолюминесценции и поглощения НК не изменялись. Как видно из рис. 3, наиболее сильное тушение фотолюминесценции наблюдается при титрова-

нии НК молекулами tCl-1,2-BQ (кривая *a*), тогда как в случае 1,4-BQ и tCl-1,4-BQ (зависимости *b* и *в*) это тушение значительно слабее. Так, при молярном отношении  $X=20$ , значение  $I/I_0$  составляет 0.7 для 1,4-BQ, 0.55 для tCl-1,4-BQ и  $\leq 0.01$  для tCl-1,2-BQ. Введение атомов хлора в молекулу 1,4-BQ усиливает ее электроноакцепторные свойства [3]. Этим можно объяснить большее тушение в случае tCl-1,4-BQ по сравнению с 1,4-BQ. Существенное возрастание тушения фотолюминесценции в случае можно связать с тем, что в этой молекуле атомы кислорода находятся в соседних положениях, что также приводит к усилению электроноакцепторных свойств. Кроме того для молекулы tCl-1,2-BQ возможно двухточечное взаимодействие с поверхностью НК, т.е. константа связывания молекул tCl-1,2-BQ с НК больше, чем для tCl-1,4-BQ. Для выяснения возможных путей релаксации возбужденных состояний в нанокompозите «НК - tCl-1,2-BQ» были проведены измерения кинетик затухания фотолюминесценции НК. Кинетика затухания ФЛ НК носила неэкспоненциальный характер, что обусловлено как дисперсией по размерам, так и внутренними свойствами НК (наличие поверхностных ловушек) [4]). В таблице представлены результаты измерений, проведенных при различных молярных отношениях в толуоле при 295 К, аппроксимированных в виде суммы трех экспонент.

Полученные результаты показывают, что при увеличении молярного отношения  $X$  наблюдается сокращение всех трех компонент времен затухания. При этом сокращение среднего времени жизни ФЛ гораздо меньше по сравнению с падением интенсивности ФЛ при одних и тех же значениях молярного отношения  $X=C_{\text{хинон}}/C_{\text{НК}}$ . Это позволяет сделать вывод о том, что в системе «НК-хинон» фотоиндуцированный перенос электрона на хинон может происходить с верхних энергетических уровней зоны проводимости НК, конкурируя с электронной релаксацией в нижнее состояние. Данные фемтосекундной абсорбционной спектроскопии показывают [6], что такой перенос CdSe $\rightarrow$ 1,4-BQ реализуется за времена 200-400 фс. Наблюдаемую ФЛ НК в наносекундном диапазоне времен обычно относят к радиационной электроно-дырочной рекомбинации из нижнего состояния зоны проводимости или из близко расположенного состояния поверхностной ловушки (shallow trap) [5].

Таблица 1

Параметры компонент затухания фотолюминесценции НК Aloe Green

X	$\langle \tau \rangle$	$\tau_1$ , нс	$A_1$	$\tau_2$ , нс	$A_2$	$\tau_3$ , нс	$A_3$
0	31,0	0,67	0,67	7,71	0,169	37,32	0,162
0,5	30,6	0,63	0,704	7,18	0,141	37,01	0,155
1	29,0	0,37	0,778	5,87	0,118	35,62	0,103
2	24,1	0,32	0,900	5,47	0,054	32,40	0,046

Таким образом, в исследованной нами системе «НК – tCl-1,2-BQ» сильное падение интенсивности ФЛ связано с эффективным переносом электрона на хинон, а сравнительно малое падение среднего времени жизни отражает изменение вероятности радиационной электронодырочной рекомбинации из нижнего состояния зоны проводимости (или ловушки) за счет возмущающего действия присоединенного лиганда.

#### Литература

1. *Hagfeldt A., Gratzel M. J.* Molecular Photovoltaics // *Acc. Chem. Res.* 2000. V. 33. p. 269–277.
2. *Clapp A.R., Medintz I.L., Mauro J.M., Fisher B.R., Bawendi M.G., Mattoussi H. J.* Fluorescence Resonance Energy Transfer Between Quantum Dot Donors and Dye-Labeled Protein Acceptors // *J. Am. Chem. Soc.* 2004. V. 126. p. 301–310.
3. *Murov S., Carmichael I., Hug G.*, Handbook of Photochemistry / Marcel Dekker. New York, 1993. Second Edition.
4. *Schegel G., Bohnenberger J., Potapova I., Mews A.* Fluorescence Decay Time of Single Semiconductor Nanocrystals // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. p.137401-(1-4).
5. *Burda C., Green T.C., Link S., El-Sayed M.A.* Electron Shuttling Across the Interface of CdSe Nanoparticles Monitored by Femtosecond Laser Spectroscopy. // *J. Phys. Chem. B.* 1999. V. 103. p.1783–1788.

## СТЭРЭАСЭЛЕКТЫҰНЫ СІНТЭЗ ФУНКЦИЯНАЛЬНА ЗАМЕШЧАНЫХ $\alpha$ -МЕТЫЛКЕТОНАҰ ПРАЗ ЦЫКЛАПРАПАНОЛЬНЫЯ ІНТЭРМЕДЫЯТЫ

А. Л. Гурскі

Хіральныя  $\alpha$ -метылкетонныя фрагменты часта сустракаюцца ў структуры малекул полікецідаў, а таксама з'яўляюцца інтэрмедыятамі ў іх сінтэзе [1].

Намі прапанаваны зручны метад сінтэза функцыянальна замешчаных  $\alpha$ -метылкетонаў праз паслядоўнасць рэакцый тытан-каталізуймага цыклапрапанавання гомалілавых спіртоў [2,3] і раскрыцця трохскадовага цыкла [4]. Рэакцыя гомалілавага спірту **1**, лёгка дасягальнага ў аптычна чыстай форме [5], з этылпрапіянатам пад дзеяннем этылмагнэзбраміду ў прысутнасці тэтраізапрапаксиду тытану пры пакаёвай тэмпературы давала цыклапрапанол **2** з выхадам 65%. У выніку рэакцыі атрымліваўся *транс*-ізамер (*цыс*-ізамер прысутнічаў у рэакцыйнай сумесі ў рэшткавых колькасцях). Суадносіны *сін/анты* дыястэрыямераў склалі 90:10. Падчас правядзення рэакцыі пры тэмпературы  $-10^{\circ}\text{C}$  стэрэасэлектыўнасць узрасла да 95:5, аднак пры гэтым рэзка змяншаўся выхад цыклапрапанолу (да 30%).

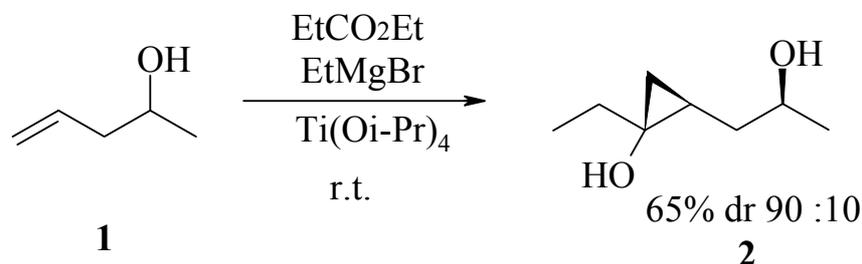


Схема 1

Спробы раскрыць цыклапрапанол **2** у  $\alpha$ -метылкетон з захаваннем стэрэахіміі пад дзеяннем KOH, LiOH, алкагалятаў, LDA, NaN як у пратонных, так і ў апрадонных рашчынніках скончыліся няўдала. Рэакцыя працякала павольна (дзiesiąткі гадзінаў) і суправаджалася поўнай рацэмізацыяй  $\alpha$ -метылкетоннага цэнтра. Намі было вынайздзена, што падчас награвання цыклапрапанолу **3** (з абароненым другасным гідракіслам), нанесенага на  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , раскрыццё трохвугляроднага цыклу адбываецца за 90 хвілін. Пры гэтым у выпадку, калі  $\text{Al}_2\text{O}_3$  папярэдне быў нейтралізаваны віннай кіслёй (5 мас. %), эпімерызацыя  $\alpha$ -метылкетона была

заповолена. Суадносіны дьястэрыямераў атрыманага функцыяналізаванага  $\alpha$ -метылкетона **4** складала 85:15.

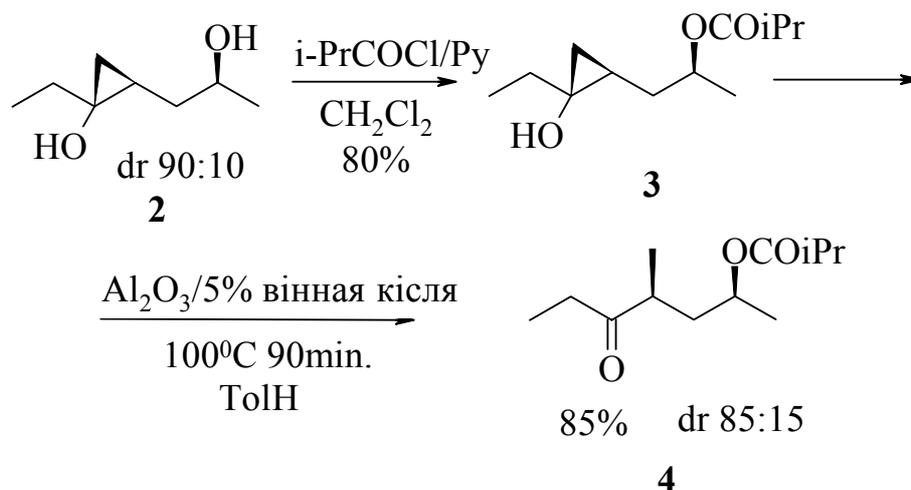


Схема 2

Для высвятлення адноснай канфігурацыі злучэння **4** быў праведзены яго сустрэчны сінтэз (Схема 3). Лактон **5** дьястэрэасэлектыўна алкілявалі метылядыдам, у выніку чаго лактон **6** быў атрыманы з dr 80:20 (асноўны ізамер *транс*). Рэакцыя **6** з этылмагнэзбрамідам у прысутнасці тэтраізапрапаксіду тытану давала цыклапрапанол **7**, які, пасля абароны другаснага гідраксілу, уводзіўся ў рэакцыю раскрыцця кальца ў вынайджаных намі ўмовах. Сігналы ў  $^1\text{H}$  ЯМР спектры асноўнага *сін*-дьястэрэамера **8** супалі з сігналамі злучэння **4**.

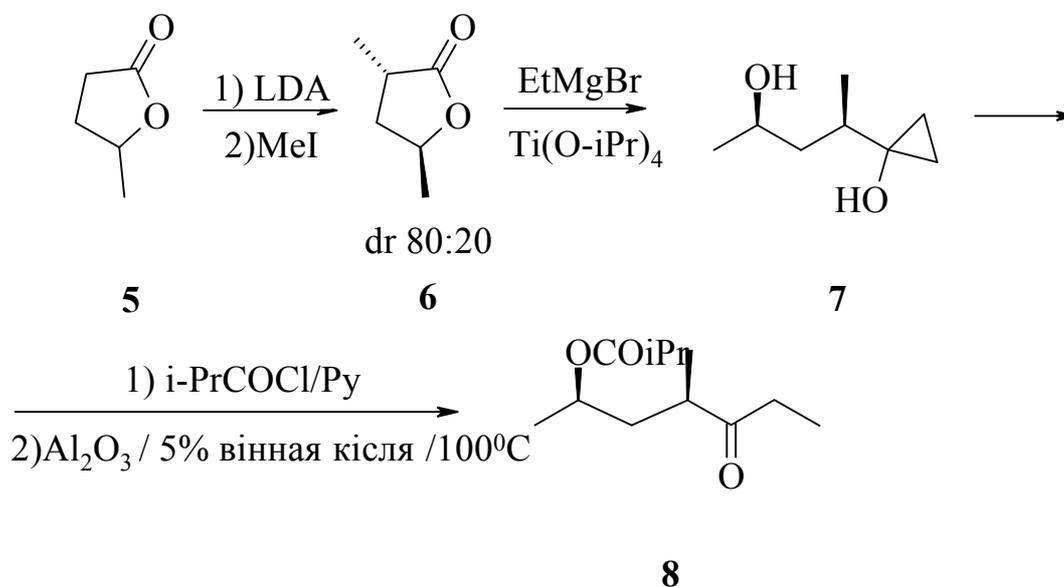


Схема 3

Такім чынам, намі распрацаваны падыход да стэрэасэлектыўнага сінтэза *сін-α*-метыл-γ-гідросікетонаў праз рэакцыю дыястэрэасэлектыўнага цыклапрапанавання з наступным раскрыццём трохвугляроднага цыкла зыходзячы з лёгкадасяжных у аптычна чыстай форме гомалілавых спіртоў.

### Літаратура

1. *Paterson I., Florence G. J., Gerlach K., Scott J. P.* Total Synthesis of the Antimicrotubule Agent (+)-Discodermolide Using Boron-Mediated Aldol Reactions of Chiral Ketones // *Angew. Chem. Int. Ed.* 2000. V.39. № 2. P.377–380.
2. *Савченко А. И., Кулинкович О. Г.* Гидроксициклопропанирование гомоаллиловых спиртов взаимодействием смесей их титановых алкоколятов и сложных эфиров с этилмагнийбромидом // *ЖОрХ.* 1997. Т. 33. № 6. С.913–915.
3. *Quan L. G., Kim S. H., Lee J. C., Cha J. K.* Diastereoselective Synthesis of trans-1,2-Dialkylcyclopropanols by the Kulinkovich Hydroxycyclopropanation of Homoallylic Alcohols // *Angew. Chem. Int. Ed.* 2002. V.41. № 12. P. 2160–2162.
4. *Kulinkovich O. G.* The Chemistry of Cyclopropanols // *Chem. Rev.* 2003. Vol. 103. № 7. P.2597 – 2633.
5. *Racherla U. S., Brown H. C.* Chiral synthesis via organoboranes. 27. Remarkably rapid and exceptionally enantioselective (approaching 100 %-ee) allylboration of representative aldehydes at  $-100^{\circ}\text{C}$  under new, salt-free conditions // *J. Org. Chem.* Vol. 51. № 1. P. 401–404.

## УЛУЧШЕННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА 1, 2-ДИЗАМЕЩЕННЫХ ЦИКЛОПРОПАНОЛОВ

Д. Г. Кананович

Одним из наиболее полезных синтетических применений титанациклопропанов **1**, легко генерируемых из  $\text{Ti}(\text{O}i\text{-Pr})_4$  и 2 экв. реактива Гриньяра, является превращение сложных эфиров в моно- ( $\text{R}^2 = \text{H}$ ) и дизамещенные циклопропанолаы **2** (схема 1) [1].

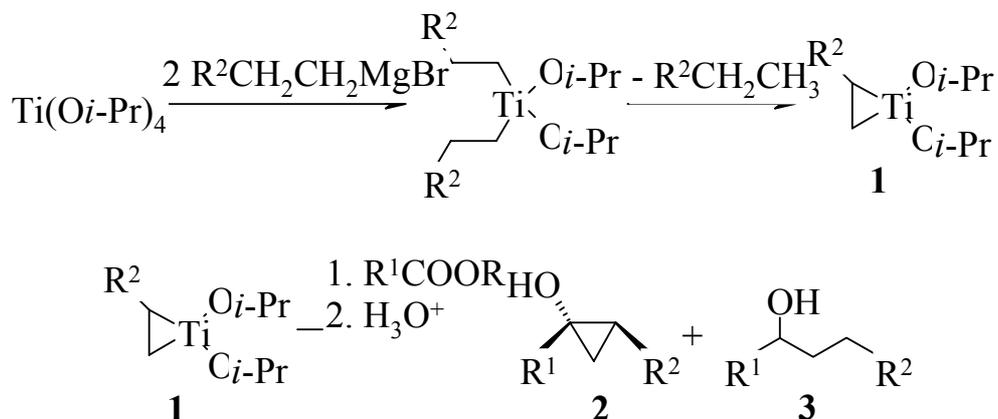


Схема 1

В отличие от реакции с EtMgBr, приводящей к образованию монозамещенных циклопропанолов с хорошими и отличными выходами [2], реакция с участием гомологов EtMgBr протекает менее гладко и усложняется образованием 15–20 % вторичных спиртов **3** [3, 4], которые, как правило, трудно отделить от соответствующих *цис*-циклопропанолов **2** колоночной хроматографией или перегонкой в вакууме. При использовании 1, 2-дизамещенных циклопропанолов **2** в качестве синтетически полезных интермедиатов в направленном синтезе природных веществ мы столкнулись с необходимостью модификации предложенного ранее метода их синтеза [3], позволяющей избежать образования **3**.

Для выяснения механизма образования вторичных спиртов **3** нами было исследовано распределение дейтерия в продуктах взаимодействия метилпивалата  $t\text{-BuCO}_2\text{Me}$  с изотопомеченным реактивом Гриньяра  $(\text{CD}_3)_2\text{CHMgBr}$  в присутствии каталитических количеств (15 % мольн.)  $\text{Ti}(\text{O}i\text{-Pr})_4$ . Наряду со смесью дейтерированных *цис*- и *транс*-циклопропанолов **4**, эта реакция приводит к дейтерированному вторичному спирту **5** (схема 2). Характер распределения дейтерия в **5** определен на основании сравнения его  $^{13}\text{C}$  ЯМР спектра со спектром соответствующего недейтерированного спирта. Сигналы атомов углерода C-3 ( $\delta = 79,0$  ppm) и C-5 ( $\delta = 19,2$  ppm) смещены в более сильное поле по сравнению с аналогичными сигналами не содержащего дейтерий соединения ( $\delta = 79,5$  и  $20,1$  ppm соответственно) благодаря изотопному эффекту и расщеплены в триплеты (1:1:1,  $J = 21,2$  и  $19,2$  Hz), что свидетельствует о наличии по одному атому D в этих положениях. Сигналы изотопмеров **5**, содержащих только атомы протия при C-3 и C-5, проявляются в виде синглетов с  $\delta = 79,5$  и  $19,60$  ppm. Интегрирование  $^1\text{H}$  ЯМР спектра позволяет определить, что около 85 % атомов водорода при C-3 и 30 % у C-5 замещены на атомы дейтерия. Такое распределение дейтерия позволяет предположить, что вторичный спирт **5** образуется в результате  $\beta$ -гидридного распада алкилированного по атому титана  $\beta$ -титанакетона **6**, который является интермедиатом синтеза циклопропанолов (схема 2) [5, 6].

Подавив стадию  $\beta$ -гидридного элиминирования в  $\beta$ -титанакетонах можно предотвратить образование вторичных спиртов **3**. Эта цель может быть достигнута применением в реакции циклопропанирования сложных эфиров наряду с 1 моль реактива Гриньяра, необходимого для генерации титанацклопропанов **1**, магнийорганического соединения, не содержащего  $\beta$ -водородных атомов, например  $\text{CH}_3\text{MgI}$  или  $\text{CH}_3\text{MgBr}$  [7]. Применив эту комбинацию реагентов мы разработали улучшенный метод синтеза циклопропанолов **2**, практически не содержащих спиртов **3** (менее 1–3 % по ЯМР).

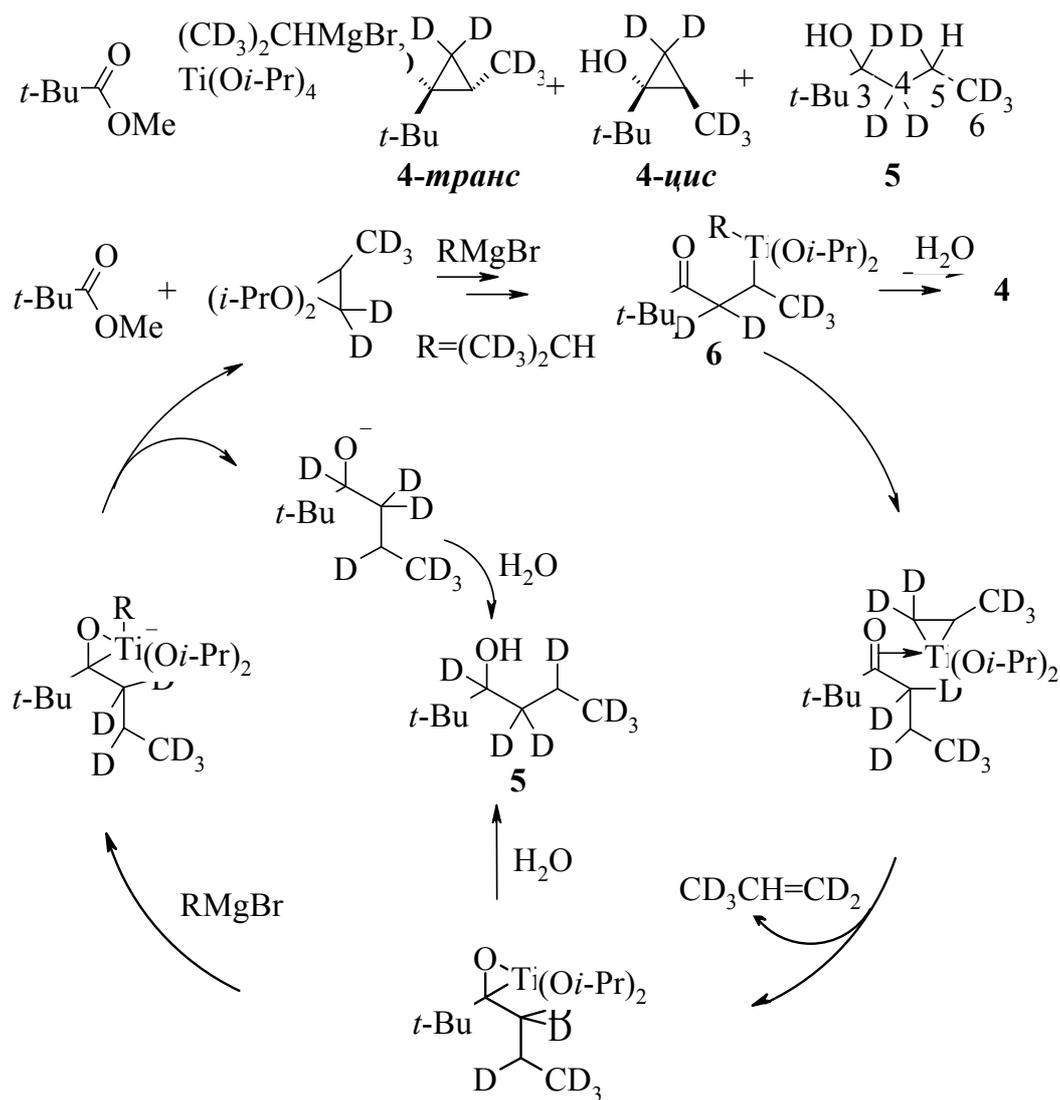


Схема 2

Добавление 1-2 экв.  $\text{MeMgI}$  или  $\text{MeMgBr}$  к раствору 1 экв.  $\text{Ti}(\text{O}i\text{-Pr})_4$  в диэтиловом эфире или тетрагидрофуране приводит к образованию желтого или оранжевого раствора, который не реагирует со сложными эфирами, и, вероятно, содержит ат-комплексы титана в равновесии с другими титанорганическими частицами. Добавление к полученному раствору сложного эфира и затем 1,5–2 экв. соответствующего реактива Гриньяра приводит к образованию 1, 2-дизамещенных циклопропанолов **2 а-д** с выходами 77–85 %.

В качестве побочного продукта в этом превращении образуются небольшие количества (8–13 %) вторичных спиртов **7**, которые легко отделяются от соответствующих циклопропанолов **2 а-д** колоночной хроматографией или перегонкой в вакууме.

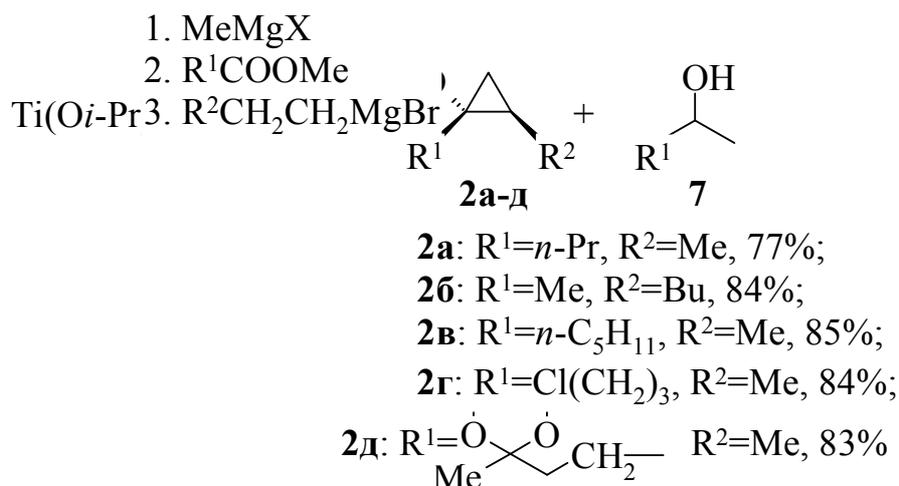


Схема 3

### Литература

1. *Kulinkovich O. G., de Meijere A.* 1, n-Dicarbonyl titanium intermediates from monocarbonyl organometallics and their application in organic synthesis // *Chem. Rev.* 2000. V. 100. P. 2789–2834.
2. *Кулинкович О. Г., Свиридов С. В., Василевский Д. А., Притыцкая Т. С.* Реакция этилмагнийбромида с эфирами карбоновых кислот в присутствии тетраизопропоксититана // *Ж. Орг. Хим.* 1989. Т. 25. № 10. С. 2244–2245.
3. *Кулинкович О. Г., Свиридов С. В., Василевский Д. А., Савченко А. И.* Катализируемое тетраизопропоксититаном взаимодействие алкилмагнийгалогенидов со сложными эфирами как удобный метод получения замещенных циклопропанолов // *Ж. Орг. Хим.* 1991. Т. 27. № 7. С. 1428–1430.
4. *Chaplinski V.* Titan-vermittelte Cyclopropanierung der Carbonylgruppe in Carbonsäurederivaten. Dissertation / Göttingen, 1995.
5. *Kulinkovich O. G.* Titanacyclopropanes as versatile intermediates for carbon-carbon bond formation in reactions with unsaturated compounds // *Pure Appl. Chem.* 2000. V. 72. P. 1715–1719.
6. *Wu Y.-D., Yu Z.-X.* A theoretical study on the mechanism and diastereoselectivity of the Kulinkovich hydroxycyclopropanation reaction // *J. Am. Chem. Soc.* 2001. V. 123. № 24. P. 5777–5786.
7. *Chaplinski V., Winsel H., Kordes M., de Meijere A.* A new versatile reagent for the synthesis of cyclopropylamines including 4-azaspiro[2.n]alkanes and bicyclo[n.1.0]alkylamines // *Synlett.* 1997. P. 111–114.

**ПОЛНЫЙ СИНТЕЗ ПОЛОВОГО ФЕРОМОНА  
ОБЫКНОВЕННОГО СОСНОВОГО ПИЛИЛЬЩИКА  
*DIPRION PINI* L И ФОРМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ПОЛОВОГО  
ФЕРОМОНА РЫЖЕГО СОСНОВОГО ПИЛИЛЬЩИКА  
*NEODIPRION SERTIFER***

**Ю. Г. Кожемякин, К. Н. Прохоревич**

Основными компонентами половых феромонов обыкновенного и рыжего соснового пилильщиков являются ацетаты (2*S*,3*R*,7*R*)-3,7-диметилтридекан-2-ола (**20**) [1] и (2*S*,3*S*,7*S*)-3,7-диметилпентадекан-2-ола (**28**) [2] соответственно. Нами был разработан удобный метод получения (2*S*,3*R*,7*R*)-**20**, а также осуществлен формальный синтез (2*S*,3*S*,7*S*)-**28**.

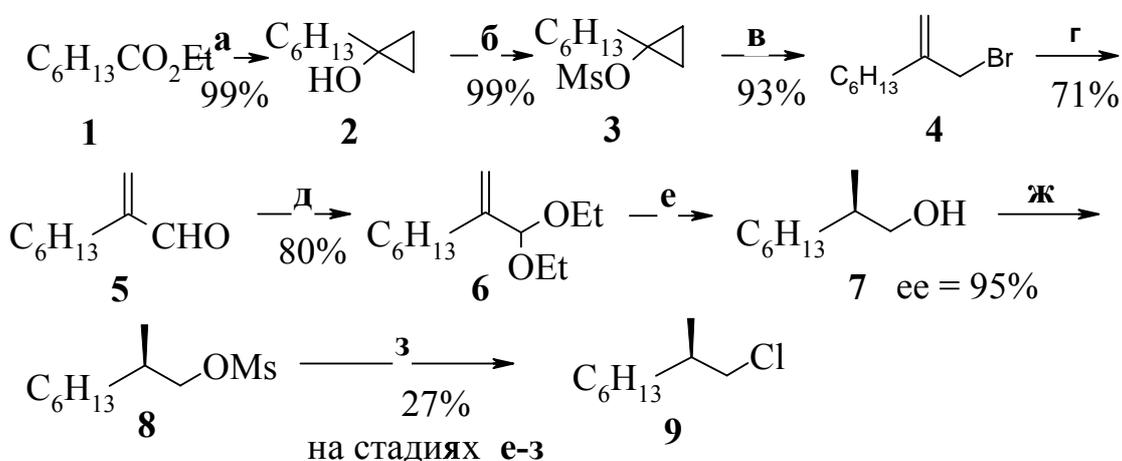


Схема 1

Взаимодействие сложного эфира **1** с EtMgBr в присутствии Ti(O*i*-Pr)<sub>4</sub> [3] и последующее мезилирование спиртовой группы полученного циклопропанола **2** привели к мезилату **3** (схема 1). Циклопропил-аллильная изомеризация мезилата **3** под действием MgBr<sub>2</sub> в эфире [4] дала аллилбромид **4**. Окисление бромидов **4** по Корнблему в мягких условиях [5] привело к альдегиду **5** с выходом 65 % на 4 стадии. Стандартным методом был получен диэтилацеталь **6**, который был энантиоселективно восстановлен пекарскими дрожжами *Saccharomyces cerevisiae* до хирального спирта **7** с ee = 95 % [6] и выходом около 35 % [7, 8]. Спирт **7** был переведен в мезилат **8**, а затем в хлорид **9** [9] с общим выходом 14 % на 8 стадий.

Диастереомерно обогащенный лактон **11** был получен в 2 стадии из этилкротоната **10** (схема 2). Радикальное присоединение этилового спирта к α, β-ненасыщенному сложному эфиру с последующей лактонизацией

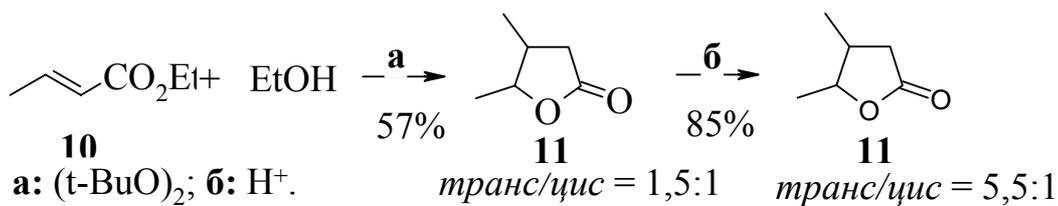
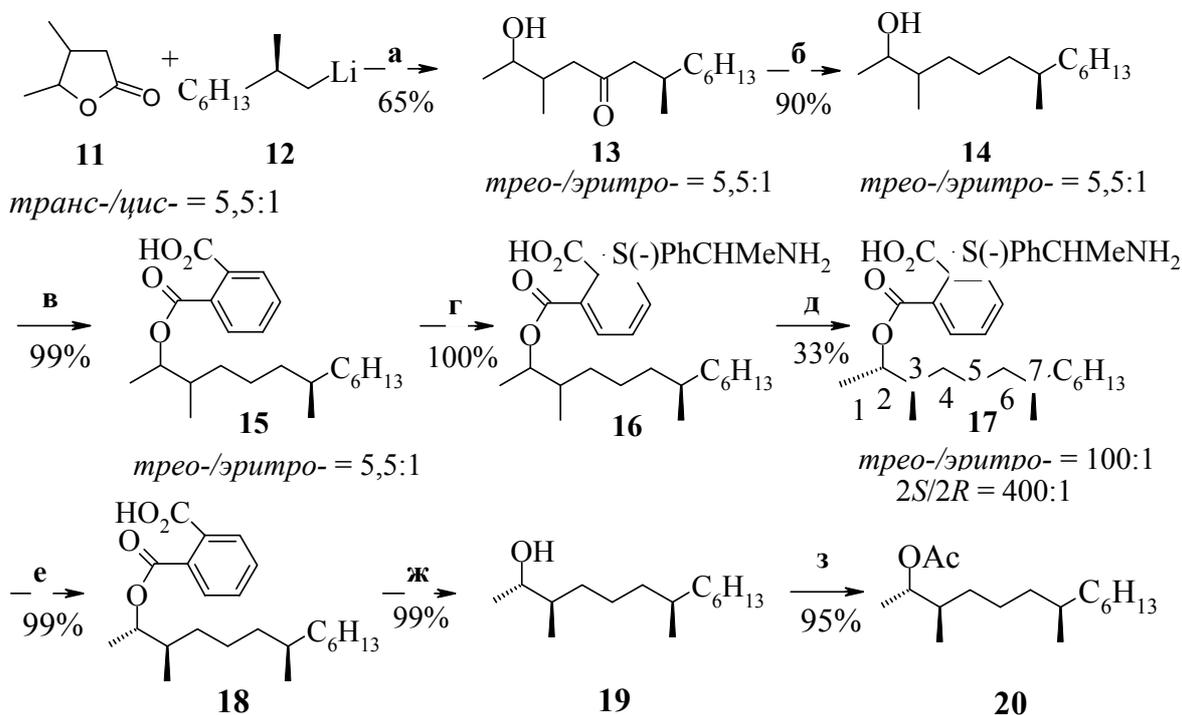


Схема 2

привело к 3,4-диметил-4-бутанолиду **11** с соотношением *транс-/цис-* = 1,5 : 1 [10]. Нагревание смеси *транс-* и *цис-* лактонов в присутствии каталитических количеств хлорной кислоты привело к получению термодинамически равновесной смеси с содержанием 85 % *транс-* лактона **11** [11].



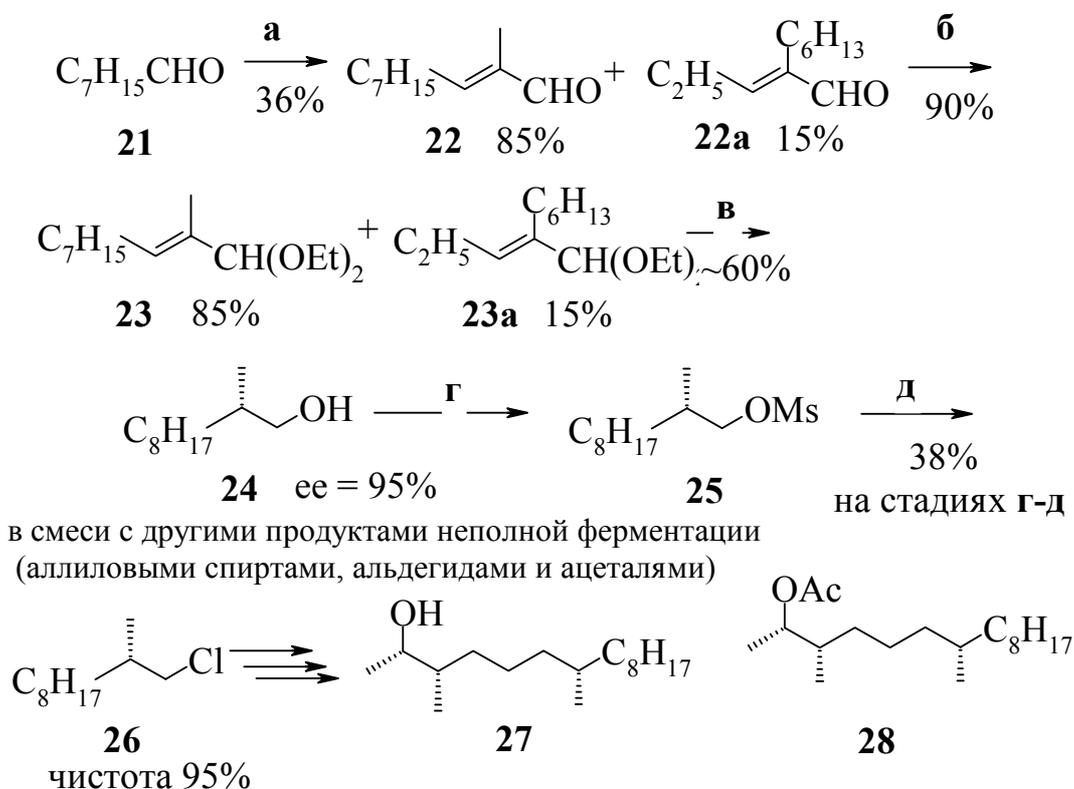
**a:** H<sup>+</sup>; **б:** N<sub>2</sub>H<sub>4</sub>, KOH; **в:** o-C<sub>6</sub>H<sub>4</sub>(CO)<sub>2</sub>O, Et<sub>3</sub>N; **г:** S(-)-PhCHMeNH<sub>2</sub>;  
**д:** 10 перекристаллизаций; **е:** H<sup>+</sup>; **ж:** KOH; **з:** Et<sub>3</sub>N, AcCl.

Схема 3

Сочетание лактона **11** с хиральным алкиллитием **12**, полученным из хлорида **9**, привело к кетоспирту **13** с соотношением *трео-/эритро-* = 5,5 : 1, восстановление которого по Кижнеру-Вольфу [2] дало спирт **14** с тем же соотношением диастереомеров (Схема 3). Синтез кислого фталата **15** и его соли с S(-)-PhCHMeNH<sub>2</sub> **16** [12] позволили после 10 перекристаллизаций получить индивидуальный диастереомер **17** с выходом 32 % исходя из спирта **14**, de = 98 % и энантиомерным избытком 2*S* = 99,5 % [6, 13, 14]. Последовательный гидролиз соли **17** в кислоте и

кислого фталата **18** в щелочном метаноле привели к хиральному спирту **19** с общим выходом 19 % исходя из лактона **12**. Ацилированием спирта **19** был получен ацетат **20**, который является феромоном обыкновенного соснового пилильщика [1].

Стереохимический результат восстановления прохиральной углерод-углеродной связи пекарскими дрожжами зависит от числа заместителей при ней [15, 16]. Так, тризамещенная двойная связь ацетала **23** энантио-селективно восстанавливается дрожжами в хиральный спирт **24** с 2*S*-конфигурацией (схема 4), в отличие от восстановления ацетала **6** с дизамещенной двойной связью с образованием спирта **7** 2*R*-конфигурации (схема 1) [7, 8].



**а:** EtCHO, KOH; **б:** HC(OEt)<sub>3</sub>, H<sup>+</sup>; **в:** пекарские дрожжи; **г:** MsCl, Et<sub>3</sub>N; **д:** Bu<sub>4</sub>NCl.

Схема 4

Конденсация альдегида **21** с пропаналем привела к смеси ненасыщенных *транс*-альдегидов **22** и **22 а** в соотношении 85 : 15 [16], которая была превращена в соответствующую смесь ацеталей (Схема 4). Оказалось, что ферментация ацетала **23а** протекает значительно медленнее, чем ацетала **23**, что привело к продукту энзиматического восстановления — спирту **24** с ee = 95 % [6].

Превращение спирта **24** в мезилат **25**, а затем в хлорид **26** [9] привело к последнему с общим выходом 7,5 % на 5 стадий с чистотой продукта 95 %.

Полученный хиральный хлорид **26** был использован в синтезе (2*S*,3*S*,7*S*)-3,7-диметилпентадекан-2-ола (**27**), ацетат которого **28** является половым феромоном рыжего соснового пилильщика *Neodiprion sertifer* – опасного вредителя хвойных лесов [2].

### Литература

1. Bergstrom G., Wassgren A. B., Anderbrant O., Fagerhag J., Edlund H., Hedenstrom E., Hogberg H. E., Geri C., Auger M. A., Varama M., Hansson B. S., Lofqvist J. // *Experimentia*. 1995. V. 51. P. 370–380.
2. Hogberg H. E., Hedenstrom E., Wassgren A. B., Hjalmarsson M., Bergstrom G., Lofqvist J., Norin T. // *Tetrahedron*. 1990. 46. № 8. P. 3007–3018.
3. Kulinkovich O. G., de Meijere A. // *Chem. Rev.* 2000. 100. № 8. P. 2789–2834.
4. Kozyrkov Yu. Yu., Kulinkovich O. G. // *Synlett*. 2002. № 3. P. 443–446.
5. Babler J. H., Coghlan M. J., Feng M., Fries P. // *J. Org. Chem.* 1979. V. 44. № 10. P. 1716–1717.
6. Dale J. A., Dull D. L., Mosher H. S. // *J. Org. Chem.* 1969. V. 34. № 9. P. 2543–2549.
7. Ferraboschi P., Reza-Elahi S., Versa E., Rivolta F. M., Santaniello E. // *Synlett*. 1996. № 12. P. 1176–1178.
8. Ferraboschi P., Reza-Elahi S., Versa E., Rivolta F. M., Santaniello E. // *Tetrahedron: Asymmetry*. 1999. V. 10. № 14. P. 2639–2642.
9. Binkley R. W., Ambrose M. G., Hehemann D. G. // *J. Org. Chem.* 1980. V. 45. № 22. P. 4387–4391.
10. Троянский Э. И., Свитанько И. В., Никишин Г. И. // *Изв. АН СССР, Сер. хим.* 1985. № 1. С. 133–139.
11. Bartlett P. A., Myerson J. // *J. Am. Chem. Soc.* 1978. 100. №12. 3950–3952.
12. Ault A. // *Org. Syn.* 1969. V. 49. P. 93–98.
13. Дунина В. В., Рухадзе Е. Г., Потапов В. М. Получение и исследование оптически активных веществ. Учебное пособие. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. С. 296–298.
14. Bekish A. V., Prokhorevich K. N., Kulinkovich O. G. // *Tetrahedron Lett.* 45. № 27–28. P. 5253–5255.
15. Serra S., Fuganti C. // *Tetrahedron: Asymmetry*. 2001. 12. №9. 2191–2196.
16. Hogberg H.-E., Hedenstrom E., Fagerhag J., Servi S. // *J. Org. Chem.* 1992. V. 57. № 7. P. 2052–2059.

## РАЗРАБОТКА ПОДХОДОВ К СИНТЕЗУ БИОЛОГИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ИЗОПРЕНОИДОВ И ПОЛИКЕТИДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИЭТИЛАЦЕТАЛЯ 3-БРОММЕТИЛ-3-БУТЕНАЛЯ

И. В. Минеева

Пренильные соединения являются весьма распространенным классом природных соединений, имеющих в своей структуре повторяющийся С-5

фрагмент. Это эфирные масла многих растений (роза, полынь, герань), смолы хвойных деревьев, животные и растительные красители и пигменты. Поиск эффективных методов получения различных изопреноидов остается актуальным [1].

Недавно в нашей исследовательской группе был разработан одностадийный метод превращения легкодоступных сульфонов циклопропанолов в 2-замещенные аллилбромиды под действием бромида магния, наличие некоторых функциональных групп не мешает протеканию реакции [2]. Так, 1-(2,2-диэтоксипропил)циклопропил-метансульфонат (**1**) может быть превращен в диэтилацеталь 3-бромметил-3-бутенала (**2**). Указанный аллилбромид **2** имеет две особенности – защищенную альдегидную группы и аллилбромидный фрагмент, активный в реакциях сочетания, делающие его перспективным строительным блоком при построении пренильных систем.

Для получения аллилбромида **2** мы исходили из этил-3,3-диэтоксипропионата (**3**), который при взаимодействии с тремя эквивалентами этилмагнийбромида в присутствии 20 мольных % тетраизопророксида титана (IV) в тетрагидрофуране был превращен в соответствующий циклопропанол **4** с выходом 70 %. Последний под действием 1.2 эквивалентов мезилхлорида в присутствии 2 эквивалентов триэтиламина в диэтиловом эфире давал мезилат **1** с выходом 95 %. Мезилат **1** в реакции с 2 эквивалентами бромида магния, полученного из магния и дибромэтана в диэтиловом эфире, давал целевой аллилбромид **2** с выходом 88 % (схема 1).

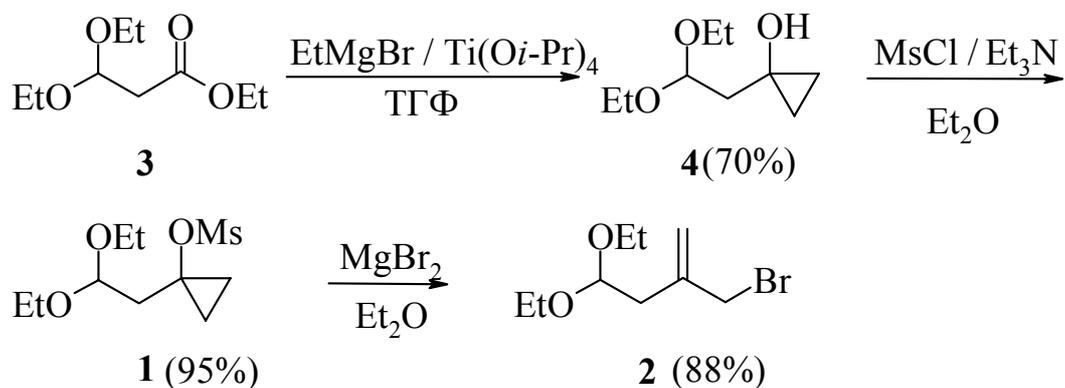


Схема 1

Используя сульфоновую методологию Джулия, ключевой аллилбромид **2** был введен в реакцию аллильного сочетания с пренилтолилсульфоном (**5**) под действием 1.5 эквивалентов ЛДА в качестве основания с образованием сульфона **6** с выходом 50 % [3]. Гидролиз и последующее элиминирование тозилльной группы альдегида **7** привели к дигидроцитралю (**8**) с выходом 70 % (схема 2).

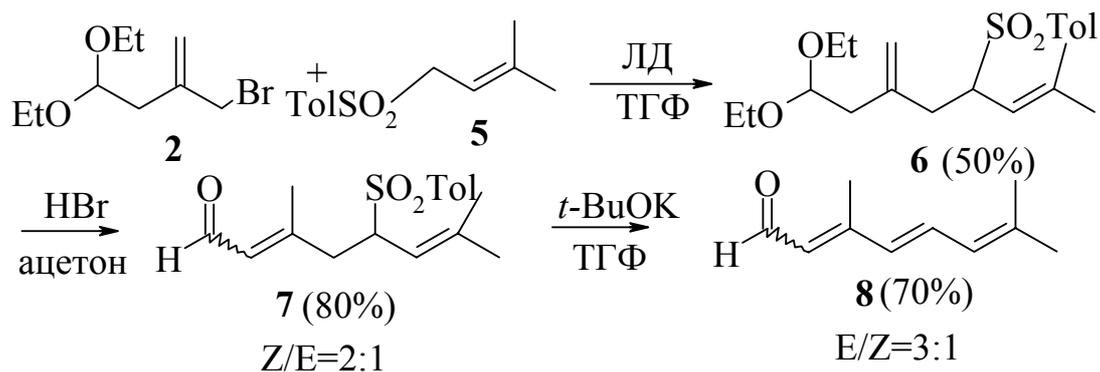


Схема 2

Дигидроцитраль (8) был получен и в следующей последовательности реакций (схема 3). Конденсация аллилбромида 2 с преналем (9) под действием цинка в тетрагидрофуране дала аллиловый спирт 10 с выходом 80 %, который в условиях кислотного гидролиза бромоводородной кислотой в ацетоне привел к образованию полиена 8.

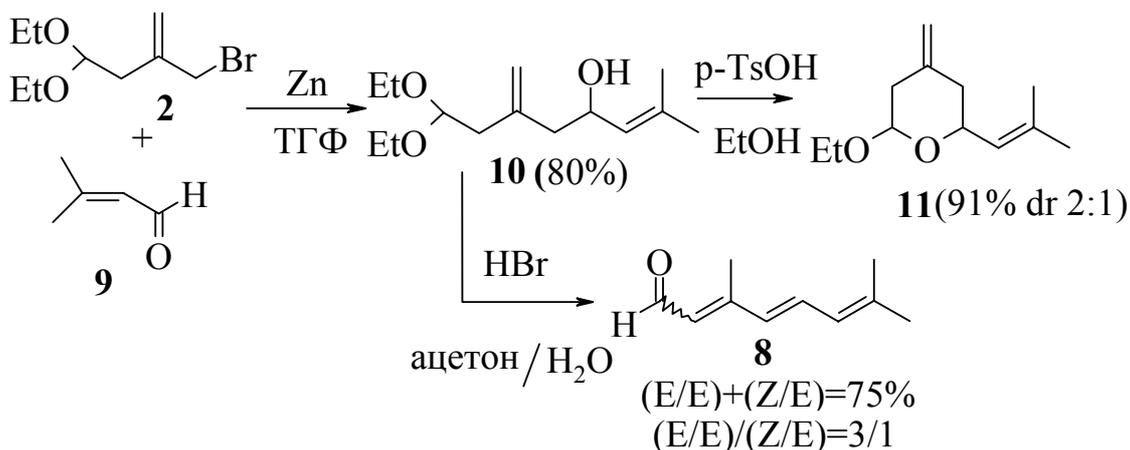


Схема 3

При действии на аллиловый спирт каталитических количеств *p*-толуолсульфокислоты в этаноле был выделен пиран 11 с выходом 91 % (схема 3). Данное превращение оказалось наиболее перспективным, поскольку подобные пирановые фрагменты содержатся в поликетидях, в частности, в макролидном противоопухолевом препарате лаулималиде [4]. Так, синтез целевых пирановых лактонов был отработан на модельных субстратах. Для этого аллилбромид 2 был сконденсирован с изовалериановым альдегидом 12 с образованием гомоаллилового спирта 13 с выходом 75 %, который под действием *p*-толуолсульфокислоты в метаноле дал соответствующий ацеталь 14 (92 %). Окисление ацеталей 14 по Джонсу привело к выделению кислоты 15 с 67 % выходом. Было найдено, что под действием хромового ангидрида в уксусной кислоте на со-

единение **14** образуется лактон **16** (50 %), изомеризация двойной связи в котором гладко протекает под действием триэтиламина с выходом целевого лактона **17** 90 % (схема 4).

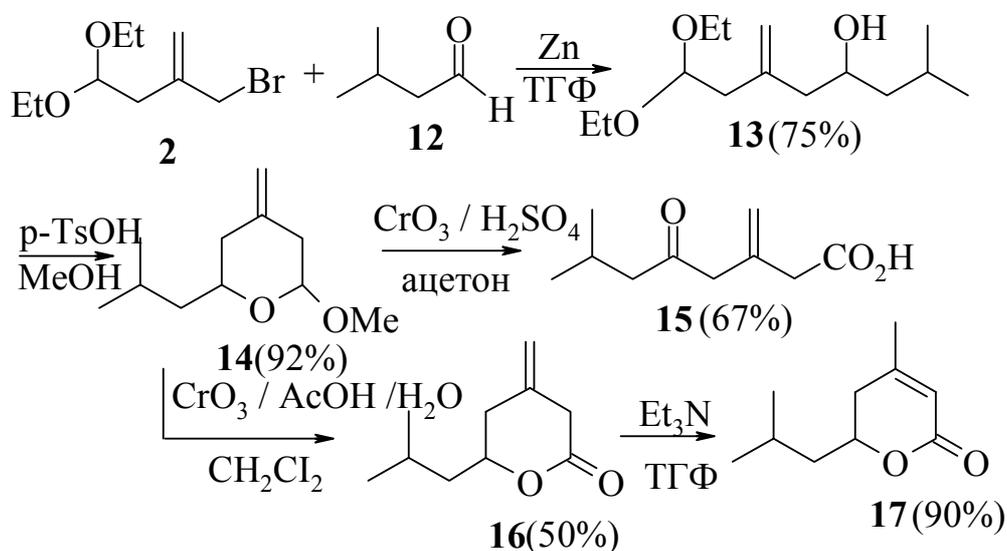


Схема 4

Структуры всех полученных соединений были подтверждены методом  $^1\text{H}$ ,  $^{13}\text{C}$  ЯМР и ИК спектроскопии.

### Литература

1. Прилежаева Е. Н. Сульфоны и сульфоксиды в полном синтезе биологически активных природных соединений // Успехи химии. 2000. Т. 69. № 5. С. 403–446.
2. Kozyrkov Yu. Yu., Kulinkovich O. G. A simple and efficient conversion of tertiary cyclopropanols to 2-substituted allyl halides // Synlett. 2002. P. 443–446.
3. Magnus P. T. Recent development in sulfone chemistry // Tetrahedron. 1977. V. 33. P. 2019–2044.
4. Mulzer J., Oler E. Microtubule-stabilizing marine metabolite laulimalide and its derivatives: synthetic approaches and antitumor activity // Chem. Rev. 2003. V. 103. P. 3753–3778.

## ВЛИЯНИЕ ФЛАВОНОИДОВ НА РАДИАЦИОННО-ИНДУЦИРОВАННОЕ ОКИСЛЕНИЕ ЭТАНОЛА

С. А. Прадун, И. Б. Гринцевич

Полифенолы растительного происхождения, флавоноиды (ФЛ), обладают широким спектром полезных фармакологических свойств, многие из которых обусловлены их антиоксидантной активностью [1]. Некоторые ФЛ используются в качестве гепатопротекторов, в том числе – при заболеваниях печени, обусловленных чрезмерным потреблением алкоголя [2]. Известно, что повреждение печени в таких случаях от части свя-

зано с ацетальдегидом (АА), образующимся из этанола по различным механизмам, в том числе – неферментативным, протекающим с участием гидроксиэтилпероксильных радикалов [2]. Поэтому важным вопросом является выяснение способности ФЛ к регулированию свободнорадикальных процессов окисления этанола.

Таким образом, целью настоящей работы являлось установление возможности ФЛ ингибировать образование ацетальдегида при радиационно-индуцированном окислении этанола.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Флавоноиды (Aldrich) использовали в работе без предварительной очистки. Структурные формулы соединений приведены на рис. 1. Этанол очищали на цеолите марки «Wolfen Zeosorb LA» и дважды перегоняли с использованием 3-х метровой ректификационной колонки.

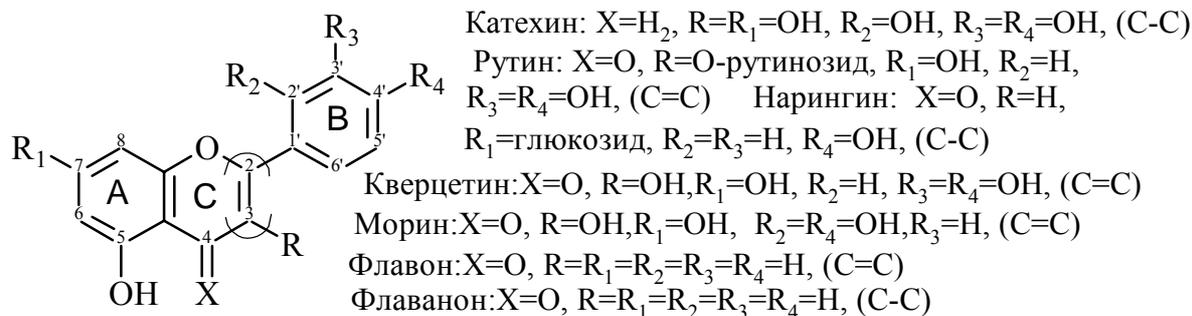


Рис. 1. Структурные формулы использованных в работе соединений и принятый порядок нумерации атомов в структуре ФЛ

Растворяли навески исследуемых веществ в этаноле, насыщенном воздухом (без продувки растворов) и запаивали в ампулах.

Инициатор свободнорадикальных процессов:  $\gamma$ -излучение (<sup>60</sup>Co). Облучение проводили в запаянных ампулах. Мощность дозы – (0,65±0,03) Гр/с, интервал поглощенных доз – 0,19 – 0,99 кГр.

Анализ АА проводили методом ГЖХ. Анализ ФЛ проводили с использованием ВЭЖХ с детектором переменной длины волны. УФ-спектры ФЛ и их продуктов снимали в проточной кювете детектора жидкостного хроматографа в режиме «stop flow».

Радиационно-химические выходы образования/разложения веществ определяли по коэффициенту угла наклона прямых накопления/расходования веществ в координатах «доза-концентрация».

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Свободнорадикальные превращения этанола в присутствии кислорода воздуха определяются реакциями с участием пероксильных радикалов (1) – (4), приводящими к образованию двух основных продуктов – АА и  $\text{H}_2\text{O}_2$  [3]. Основной особенностью химии пероксильных радикалов, образующихся из гидроксилсодержащих органических субстратов (этанол в данном случае), является то, что такие радикалы подвергаются фрагментации с образованием карбонильного соединения и гидропероксильного радикала (2).



Как видно из таблицы, гидроксилсодержащие ФЛ ингибируют образование АА при радиоллизе азрированного этанола. В литературе приводятся данные о том, что ФЛ активно взаимодействуют с пероксильными радикалами, восстанавливая их до соответствующих гидропероксидов (5) за счет реакционно-способных ОН-групп [4].



где R – H, CH(OH)CH<sub>3</sub>.

Ингибирующая способность катехина, в структуре которого присутствуют только ОН-группы, вероятно обусловлена реакциями восстановления пероксильных радикалов (5). Радиационная устойчивость катехина (см. таблицу) свидетельствует о том, что феноксильные радикалы ФЛ, образующиеся в реакции (5), участвуют в неких процессах с восстановлением исходной структуры катехина. Нами также было показано, что катехин и его аналоги проявляют наибольшую радиационную устойчивость и в реакциях с  $\alpha$ -гидроксиэтильными радикалами, участвуя в аналогичных реакциях окисления-восстановления с регенерированием исходной структуры [5].

При блокировании С3-ОН кверцетина гликозидным остатком (рутин) выход разложения снижается в 4,5 раза, снижается также антиоксидантная активность соединения (см. таблицу). Аналогичные изменения вызывает замена кольца В кверцетина с ОН-группами в *o*-положении друг относительно друга на *m*-конфигурацию (морин). Эти данные согласуются

с известной информацией о том, что наиболее активными ОН-группами в структуре флавонолов являются ОН-группы в положениях С3, С3', С4' [1].

Как видно из таблицы, расходятся при радиоллизе только флавонолы, особенностью структуры которых является наличие С2-С3 двойной связи в кольце С и С3-ОН. При этом происходит разрушение С2-С3 двойной связи кольца С, о чем свидетельствует схожесть УФ-спектров продуктов превращений флавонолов со спектром таксифолина (аналог кверцетина с насыщенной С2-С3 связью): максимум поглощения при ~290 нм, характерное плечо при 320-340 нм. Данные для морина представлены на рис. 2 – 3, для ФЛ (I), (II) спектры продуктов имели схожую структуру. Отметим, что флавоны, в структуре которых присутствует С2-С3 двойная связь, но отсутствуют ОН-группы, имели выход разложения, близкий к нулю.

Таблица

**Радиационно-химические выходы образования ацетальдегида (АА) и выходы разложения добавок при радиоллизе азрированного этанола в присутствии добавок флавоноидов. Концентрация добавок 1 мМ.**

№ п/п	Добавка	G, молекула/100 эВ	
		АА	Добавка
-	Без добавок	5,62±0,47	-
I	Кверцетин	3,71±0,32	-2,25±0,13
II	Морин	4,51±0,19	-1,36±0,19
III	Рутин	4,25±0,21	-0,49±0,17
IV	Флавоны	4,82±0,46	~0
V	Нарингин	н.о.*	~0
VI	Флаванон	5,13±0,12	~0
VII	Силимарин	н.о.	~0
VIII	Катехин	4,54±0,28	~0

\*н.о. – не определялось

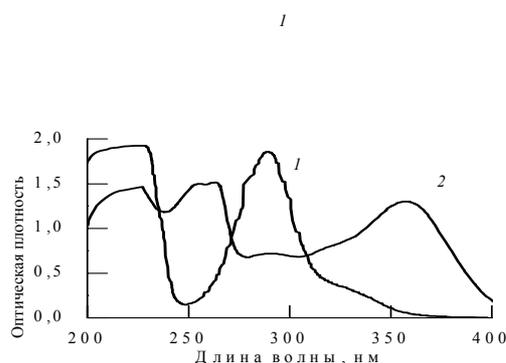


Рис. 2. УФ-спектры таксифолина (1) и морина (2)

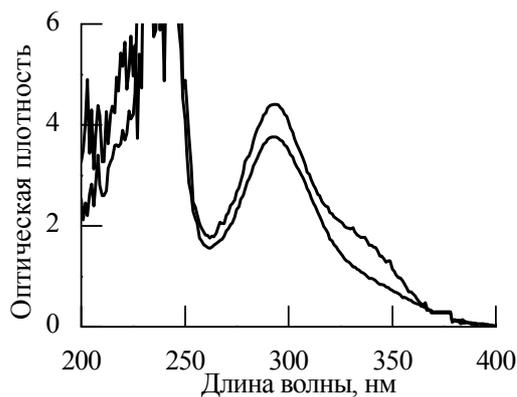


Рис. 3. УФ-спектры продуктов морины при радиоллизе аэрированного этанола

Полученные данные указывают на вовлечение С3-ОН и С3', С4'-ОН молекулы флавонолов на первой стадии взаимодействия с пероксильными радикалами (5). Для флавонолов особенностью феноксильных радикалов, образующихся в реакции (5), является их способность к образованию мезомерных форм со свободной валентностью в кольце С, которые, наиболее вероятно, рекомбинируют с пероксильными радикалами с разрушением С2-С3 двойной связи кольца С. Сходный механизм был предложен авторами работы [3] при свободнорадикальных превращениях рутина в аэрированном этаноле.

Таким образом, было показано, что гидроксилсодержащие ФЛ ингибируют образование АА при радиационно-индуцированном окислении этанола за счет реакций восстановления/присоединения пероксильных радикалов. ФЛ, обладающие С2-С3 двойной связью в кольце С и ОН-группами в положении С3 либо в кольце В, при этом расходуются. Катехин, в структуре кольца С которого отсутствует С2-С3 двойная связь, проявляет достаточную радиационную устойчивость за счет протекания реакций с восстановлением исходной структуры.

### Литература

1. *Girgio P. P.* Flavonoids as antioxidants // *J. Nat. Prod.* 2000. V. 63. P. 1035–1042.
2. *Di Luzio N.R.* Prevention of the acute ethanol-induced fatty liver by antioxidants // *Physiologist.* 1963. V. 6. P. 169–173.
3. *Wuguo D., Yongke H., Xingwang F.* Radiolysis of rutin in aerated ethanolic solution // *Radiat. Phys. Chem.* 1998. V. 53. P. 629–633.
4. *Saskia A.B.E. van Acker, Dirk-Jan van den Berg, Michel N.J.L. Tromp et al.* Structural aspects of antioxidant activity of flavonoids // *Free Rad. Biol. Med.* 1996. V. 20. № 3. P. 331–342.
5. *Hryntsevich I. B., Shadyro O. I.* Reactions of  $\alpha$ -hydroxyethyl radicals with flavonoids of various structures // *Bioorg. Med. Chem. Lett.* 2005. V. 15. № 19. P. 4252–4255.

## ЗАКОНОМЕРНОСТИ АЗОТНОКИСЛОЙ ДЕЛИГНИФИКАЦИИ ЛЬНЯНЫХ ВОЛОКОН

**В. И. Шадрина**

Традиционным источником целлюлозы является древесина. Однако вырубка лесов представляет собой глобальную экологическую проблему. Таким образом, актуальна замена древесной целлюлозы целлюлозой однолетних растений.

Целлюлоза однолетних растений составляет более 12 %-ов целлюлозы, получаемой во всем мире [1]. Использование недревесных, однолетних, растений в том числе, льна, для выделения целлюлозы в период с 1995 по 1998 годы возросло более чем на 60 % и, по прогнозам [2], к 2010 году достигнет 19,8 %.

Республика Беларусь является известным производителем льняных волокон. Основной потребитель льна – текстильная промышленность. Для переработки льна в высококачественные текстильные изделия пригодны только длинное льняное волокно. Однако длинное волокно составляет около 20 % от всего волокна, получаемого при первичной переработке льна. Остальное льняное волокно является коротким. Такое волокно либо перерабатывают в теплоизоляционные материалы, либо сжигают. Вместе с тем, короткое льняное волокно является ценным источником целлюлозы. Содержание целлюлозы во льне может достигать 90 % [3]. Доля лигнина в льняных волокнах колеблется в диапазоне от 1 % до 5 %, а в льняной костре может достигать 32 % [3, 4].

Процесс удаления лигнина из целлюлозосодержащих материалов называется делигнификация. Как известно [5–7], отличным делигнифицирующим агентом для недревесного волокнистого сырья является азотная кислота. Эффективность делигнификации обусловлена высокой селективностью взаимодействия азотной кислоты с лигнином. При взаимодействии азотной кислоты с лигнином протекает электрофильное замещение в ароматическом ядре (нитрозирование, нитрование), электрофильное вытеснение, алифатическое замещение, присоединение, окисление [5]. Азотнокислая делигнификация обеспечивает глубокую очистку растительного сырья от лигнина в достаточно мягких условиях (умеренные температуры и атмосферное давление) [6, 7]. Привлекательность использования азотной кислоты связана также с возможностью рециклизации отработанных растворов.

Настоящая работа посвящена выявлению закономерностей азотнокислой делигнификации волокон льна.

Исходным материалом служили короткие волокна льна. Массовая доля костры и сорных примесей в волокне составляет 1,0 %. Содержание лигнина равно 6,2 %; число Каппа – 18,1; содержание пентозанов – 3,7 %; зольность – 1,4 %.

Азотнокислая делигнификация волокон включала следующие стадии: пропитку льняного волокна водным раствором азотной кислоты в течение 30 мин при комнатной температуре; варку набухшего волокна в том же растворе азотной кислоты при температуре 60°C и экстракцию модифицированного лигнина 1 %-ным водным раствором едкого натра (2 ч, 80°C). После варки и экстракции волокнистую массу промывали горячей водой до нейтральной реакции.

Варьировали концентрацию азотной кислоты (от 2-х до 5-ти масс %) и продолжительность (от 1 до 5 ч) варки. Все эксперименты проведены в идентичных условиях процессов пропитки и экстракции. Для пропитки и экстракции выбраны условия, заведомо благоприятствующие процессу азотнокислой делигнификации [7, 8].

Глубину делигнификации оценивали по трем параметрам: содержанию лигнина Классона [9], числу Каппа [10] и степени делигнификации (СД) льняных волокон [11].

Варьируя концентрацию азотной кислоты, варку льноволокна осуществляли в течение 2 ч при температуре 60°C, полагая (на основании данных [12]), что в этих условиях лигнин претерпевает релаксационный переход в высокоэластическое состояние. Реализуемая в высокоэластическом состоянии, кооперативная сегментальная подвижность лигнина обуславливает доступность его структуры для проникновения модифицирующих агентов.

Результаты варьирования концентрации азотной кислоты приведены в табл. 1. Из табл. 1 видно, что делигнификация разбавленными, 2÷5 %-ными, растворами азотной кислоты обеспечивает высокий выход небелёной целлюлозы (около 80 %) и степень делигнификации, превышающую 50 %. Максимальная степень делигнификации составляет 66,7 % при использовании 4 %-ной азотной кислоты (табл. 1). Увеличение концентрации азотной кислоты от 2,0 % до 4,0 % уменьшает долю остаточного лигнина в небелёном волокне на 1,0 %. Повышение концентрации от 4-х до 5-ти процентов содержание лигнина не изменяет. В итоге, содержание лигнина падает более чем в 2 раза: от 6,2 % в исходном волокне до 2,7 % после варки с 4 %-ной азотной кислотой.

Жёсткость целлюлозы, то есть способность к отбелке, определяемая числом Каппа, также закономерно падает с увеличением концентрации азотной кислоты: от 8,3 до 7,0 (табл. 1).

Таблица 1

**Результаты делигнификации льняного волокна растворами азотной кислоты различных концентраций**

Концентрация раствора HNO <sub>3</sub> , %	Выход целлюлозы, %	Содержание лигнина Классона, %	Число Каппа	СД, %
2,0	83	3,7	8,3	51,1
3,0	80	3,6	7,9	54,2
4,0	78	2,7	7,0	66,7
5,0	81	2,7	7,0	65,3

В результате варки с 4 %-ной кислотой жесткость целлюлозы и доля лигнина уменьшаются более, чем в 2 раза (табл. 1) по сравнению с исходными значениями. Таким образом, оптимальная концентрация варочного раствора азотной кислоты, составляет 4,0 %.

Кинетику варки исследовали, используя 4 %-ный варочный раствор азотной кислоты. Результаты эксперимента представлены в табл. 2 и на рис. 1.

Как следует из табл. 2, продолжительность варки не оказывает существенного влияния на выход льняной целлюлозы.

На рис.1 приведена графическая зависимость содержания остаточного лигнина в льняной целлюлозе от продолжительности варки в 4 %-ной азотной кислоте.

Из рис. 1 видно, что кинетика азотнокислой делигнификации льна характеризуется быстрой начальной стадией. В течение первых минут варки наблюдается резкое, практически двукратное, уменьшение доли лигнина в волокне с последующим замедлением. Так, через 4 ч. содержание остаточного лигнина в небелёной целлюлозе составляет 2,0 %, а через 5 ч. – 1,8 % (рис. 1), то есть падает примерно в 3,5 раза по сравнению с таковым для исходного волокна.

Аналогичным образом изменяется и число Каппа, уменьшаясь примерно в 3,4 раза в результате 4-х и 5-ти часовых варок по сравнению с таковым для исходных волокон льна (табл. 2).

Таблица 2

**Результаты делигнификации льняного волокна 4 %-ным водным раствором азотной кислоты при различной продолжительности варки**

Продолжительность варки, ч	Выход целлюлозы, %	Число Каппа	СД, %
0	100	18,1	0
1	80	8,1	61,3
2	78	7,0	66,7
3	80	6,6	69,0
4	78	5,5	74,8
5	77	5,3	77,7

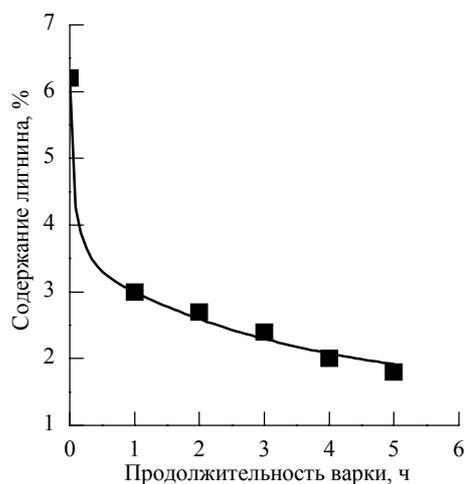


Рис. 1. Кинетическая кривая азотнокислой делигнификации льноволокна

Удлинение варки закономерно повышает степень делигнификации льна: после 4 ч. варки СД составляет 74,8 %, не существенно возрастая после 5 ч. (табл. 2).

Таким образом, условия азотнокислой делигнификации льняных волокон, позволяющие достичь высокой СД, следующие: концентрация азотной кислоты 4,0 %, продолжительность варки 4 ч (температура варки составляла 60 °С).

### Литература

1. *Bowyer J. L., Stockmann V. E.* An exciting bio-based raw material for the global panels industry // *Forest Product Journal*. 2001. V. 49(193). P. 10–21.
2. *Pande H.* Non-wood fiber and global fiber supply // *Unasylva*. 1998. V. 51. № 1. P. 44.
3. *Целлюлоза и ее производные* / под ред. Н. Байклза и Сегала. Т. 1. М., 1974.
4. *Бочек А. М., Шевчук И. Л., Лаврентьев В. Н.* Получение микрокристаллической и порошкообразной целлюлозы из коротких волокон и стеблей льна // *Журнал прикладной химии*. 2003. Т. 76. Вып. 10. С. 1725–1728.
5. *Никитин В. М.* Теоретические основы делигнификации. М., 1981.
6. *Непенин Н. Н., Непенин Ю. Н.* Очистка, сушка и отбелка целлюлозы. Прочие способы производства целлюлозы. Т. 3. М., 1994.
7. *Shishonok M. V., Torgashov V. I., Gert E. V. et al.* Investigation of condition for nitric acid delignification of rye straw // *Cell. Chem. and Technol*. 1997. V. 31. № 5–6. P. 425–438.
8. *Андабурский С. И.* Применение различных оснований для щелочной экстракции лигнина в процессе азотнокислой варки целлюлозы // *Химия древесины*. 1978. № 3. С. 8–11.
9. *Оболенская А. В., Щеголёв В. П., Аким Г. Л. и др.* Практические работы по химии древесины и целлюлозы. М., 1965.
10. *Технология целлюлозно-бумажного производства. Руководство к лабораторным работам* / Сост.: Н.П.Старостенко, П.А.Демченков. Л., 1964.
11. *Петрова С. Н., Волкова И. Ю., Лебедева Т. Н., Захаров А. Г.* Изучение влияния состава раствора на свойства целлюлозосодержащего материала при его окислительной делигнификации // *Известия вузов. Химия и химическая технология*. 2003. Т. 46. Вып. 1. С. 84–85.
12. *Фенгел Д., Вегенер Г.* Древесина: химия, ультраструктура, реакции. М., 1988.

## СОДЕРЖАНИЕ

### МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

<b>Бедюк Н. В.</b> Дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами неавтономный случай.....	3
<b>Бракоренко Т. А.</b> Эффект отрицательного коэффициента Пуассона твердых тел.....	7
<b>Василевский К. В.</b> Слабые решения дифференциальных уравнений первого порядка с переменными областями определения кусочно-сглаживающихся операторных коэффициентов.....	10
<b>Городецкий Д. А.</b> Проектирование устройств модулярной арифметики.....	15
<b>Гуревский Е. Е.</b> Устойчивость многокритериальной задачи разбиения.....	18
<b>Журавков М. А., Чумак Н. Г.</b> Вероятностные подходы оптимального проектирования в механике разрушения.....	21
<b>Литовко А. А.</b> многообразии перестановочных матриц.....	25
<b>Костян Д. М.</b> Нелинейные дифференциальные уравнения со свойством Пенлеве.....	29
<b>Максимович О. В.</b> Замкнутые наследственные свойства графов, их приводимость.....	33
<b>Мотевич А. В.</b> теорема единственности сильных решений задачи Гурса для двумерного гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменными областями.....	37
<b>Петровская Л. И.</b> Проектирование линейного спецпроцессора для решения одномерного уравнения теплопроводности.....	41
<b>Платонов А. А.</b> О квазиустойчивости векторной комбинаторной задачи с параметрическим принципом оптимальности.....	45
<b>Погоцкая И. В.</b> Априорная оценка задачи Коши для гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменными областями определения при нелокальных начальных условиях.....	49
<b>Урбанович М. А.</b> Оптимизация тайлинга при параллельной реализации численного решения одномерного уравнения теплопроводности.....	53
<b>Ходос С. П.</b> Энергетическое неравенство задачи Коши для сингулярного гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменными областями определения.....	58
<b>Щемелева К. Н.</b> О конечной характеризованности одного класса реберных графов гиперграфов ограниченного ранга в классе расщепляемых графов.....	62
<b>Щербаков С. С.</b> Внутренние усилия и напряжения в заделанном по концам плоском кривом брусе при произвольном месте приложения сосредоточенной нагрузки.....	66

### ФАКУЛЬТЕТ РАДИОФИЗИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ

<b>Дежурко А. М., Верхотуров А. Е.</b> Параллельный метод сопряженных градиентов для заполненных и разреженных матриц.....	70
<b>Демидчик С. В.</b> Обнаружение патологий голосового аппарата с помощью методов автоматического распознавания дикторов.....	73

<b>Железнякова Т. А.</b> Влияние низкоинтенсивного лазерного излучения на температуру облучаемой ткани.....	76
<b>Карчевская И. Н.</b> Система управления длиной волны излучения полупроводникового двухволнового лазера .....	80
<b>Квартальный Д. В.</b> Анализ инжекционной эффективности в квантовокаскадных гетероструктурах.....	83
<b>Кравцевич Л. И., Потоцкий В. Л.</b> Разработка программных средств для тестирования фоточувствительных интегральных приборов с зарядовой связью.....	88
<b>Масленков А. А.</b> Алгоритм менденхолла-веллера для расчета угла рассеяния заряженных частиц в СЦМ.....	92
<b>Михайлик А. В., Чиж Д. П.</b> Моделирование одночастичным методом монтекарло переноса электронов в арсениде галлия .....	96
<b>Петров П. В., Дымович А. В., Янкович П. В.</b> Компьютеризированные средства измерения .....	99
<b>Пугач А. А.</b> Бумага на основе углеродных нанотрубок.....	104
<b>Сидоревич А. Н.</b> Реализация функций проверки серийных номеров для защиты программного обеспечения.....	107
<b>Столяров А. В.</b> Устройство кардиомониторинга на основе мобильного телефона класса «smartphone» .....	110
<b>Трофимчук В. А.</b> Способы и алгоритмы эффективной программной реализации криптографических преобразований .....	114
<b>Циер С. А.</b> Исследование структуры дефектов, созданных импульсным лазерным излучением в оптически прозрачных материалах.....	117
<b>Шингарёв И. П.</b> Разработка и реализация алгоритма анализа распределения интенсивности флуоресценции .....	121
<b>Шинкевич Т. Ю.</b> Исследование поглощающих свойств рассеивающих объектов и сред с использованием базисных измерений .....	125
<b>Яцко К. В., Колтович Д. В.</b> Структурные изменения в легированных мышьяком слоях <i>si</i> сплавов при термическом отжиге.....	129
<b>Бракоренко Т. А.</b> Эффект отрицательного коэффициента Пуассона твердых тел.....	132

#### ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

<b>Горбацевич А. К., Дедиц Е. Ю.</b> Коротковолновое приближение для уравнений распространения гравитационных волн в искривленном пространстве-времени.....	137
<b>Деревяго А. Н.</b> Использование методов эмиссионной спектроскопии для измерения времен индукции и реакции в пропан – воздушной смеси .....	140
<b>Дрозд Е. С., Константинова Е. Э.</b> Влияние различных видов гиполипидемической терапии на реологические свойства эритроцитов при ишемической болезни сердца.....	144
<b>Ермалицкая К. Ф.</b> Исследование влияния третьих элементов на интенсивность линий в спектрах сплавов на основе меди.....	148
<b>Карпусенко Е. В.</b> Влияние меланина на кислотный гемолиз эритроцитов.....	151

<b>Крылова Л. Г.</b> Влияние спонтанного испускания на пороговые и динамические характеристики $ub-eg$ лазера с диодной накачкой .....	154
<b>Леонов А. В., Феранчук И. Д.</b> Исследование квазиклассического предела в модели джейнса-каммингса .....	158
<b>Петухоў Ю. А.</b> Структурна-фазавыя змяненні і механічныя ўласцівасці сістэмы нікель-цырконій, апрацаванай кампрэсійнымі плазменнымі патокамі ...	161
<b>Полуянова М. Г.</b> Модификация фазового состава и микротвердости системы $Si/Al_2O_3$ , подвергнутой воздействию компрессионного плазменного потока .....	165
<b>Севбитов С. Н., Шишкина Т. В.</b> Изучение заряженного слабого тока в процессах глубокоэластичного рассеяния поляризованных лептонов .....	168
<b>Ушакова Е. Е., Курилкина С. Н.</b> Плотность фотонных состояний в одномерном фотонном кристалле с дефектным анизотропным включением .....	172
<b>Фенюк Т. К.</b> Прибор измерения температуры на базе применения термодпары тип К и терморезистора $rt1000$ .....	176
<b>Фролова Д. А.</b> Влияние кислорода на фотонаведенное двулучепреломление в полимерном слое .....	180
<b>Целков Ю. А.</b> Современные астрофизические ограничения на распространённость первичных черных дыр в космологических сценариях мира на бране .....	184
<b>Чернухо А. С.</b> Квантовая обработка информации на примесном центре кристалла алмаза .....	188
<b>Яровой А. А.</b> Спектрально-кинетические свойства композитов на основе полупроводниковых нанокристаллов $CdSe$ и органических лигандов .....	191

#### ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

<b>Гурскі А. Л.</b> Стэрэасэлектывы сінтэз функцыянальна замешчаных $\alpha$ -метылкетонаў праз цыклапрапанольныя інтэрмедыяты .....	196
<b>Кананович Д. Г.</b> Улучшенный метод синтеза 1, 2-дизамещенных циклопропанолов .....	198
<b>Кожемякин Ю. Г., Прохоревич К. Н.</b> Полный синтез полового феромона обыкновенного соснового пилильщика <i>diprion pini</i> I и формальный синтез полового феромона рыжего соснового пилильщика <i>neodiprion sertifer</i> .....	202
<b>Минеева И. В.</b> Разработка подходов к синтезу биологически активных изопреноидов и поликетидов с использованием диэтилацеталя 3-бромметил-3-бутенала .....	205
<b>Прадун С. А., Гринцевич И. Б.</b> Влияние флавоноидов на радиационно-индуцированное окисление этанола .....	208
<b>Шадрина В. И.</b> Закономерности азотнокислой делигнификации льняных волокон .....	213

Научное издание

**СБОРНИК РАБОТ  
63-Й НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
СТУДЕНТОВ И АСПИРАНТОВ  
БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТА**

Минск, 23-26 мая 2006 г.

**В трех частях**

**Часть 1**

В авторском издании

Ответственный за выпуск *А. Г. Захаров*

Компьютерная верстка *Л. С. Кошелевич, И. Н. Подгурская, Е. Ф. Дубовик,  
С. Г. Берлинская*

Налоговая льгота – Общегосударственный классификатор  
Республики Беларусь ОК РБ 007-98, ч.1; 22.11.20.400.

Оригинал-макет подготовлен Отделом НИРС Управления подготовки кадров высшей  
квалификации Главного управления науки Белгосуниверситета

Подписано в печать. Формат 60<sup>⊕</sup>84/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл.печ.л. 17,78. Уч.-изд. л. 19,09. Тираж

Белорусский государственный университет  
Лицензия ЛВ № 315 от 14.07.98.  
220050, Минск, пр. Ф. Скорины, 4.

Республиканское унитарное предприятие  
«Издательский центр БГУ».  
Лицензия ЛП № 461 от 14.08.01.  
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.