ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 1 1995
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 517.9

В. В. ГОРОХОВИК, С. Я. ГОРОХОВИК

КРИТЕРИЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭПИЛИПШИЦЕВОСТИ МНОЖЕСТВ

В [1] (см. также [2, с. 241]) Р. Рокафеллар ввел для подмножеств пространств R^n понятие эпилипшицевости в точке и доказал эквивалентность этого свойства для замкнутых множеств условию непустоты внутренности касательного конуса Кларка в этой точке. В настоящей заметке вводится глобальный вариант понятия эпилипшицевости множеств и устанавливается критерий эпилипшицевости, распространяющий локальный критерий Р. Рокафеллара.

Пусть X — вещественное нормированное пространство.

Будем говорить, что множество $G\subset X$ является *(глобально) эпилипшицевым в направлении вектора* $e\in X$, $e\neq 0$, если на произвольном замкнутом гиперподпространстве $H\subset X$, не содержащем вектор e, может быть определена вещественнозначная функция $g:H\to R$, удовлетворяющая на всем H условию Липшица и такая, что

$$G=\{x+\alpha e\,|\,x\in H,\quad g(x)\leqslant\alpha\}.$$

Множество $G\subset X$, которое является эпилипшицевым в направлении хотя бы одного вектора $e\in X$, $e\neq 0$, будем называть *эпилипшицевым*.

Другими словами, множество $G\subset X$ эпилипшицево, если оно может быть представлено как надграфик некоторой липшицевой функции.

Оказывается, что свойство эпилипшицевости множества полностью характеризуется рецессивным конусом этого множества.

Говорят [3, 4], что вектор $h\in X$ определяет *рецессивное направление* для множества $G\in X$, если $x+th\in G$ для всех $x\in G$ и всех $t\geqslant 0$.

Для любого непустого множества $G\subset X$ совокупность всех векторов, определяющих рецессивные направления для множества G, образует выпуклый конус, который называется *рецессивным конусом* множества G и обозначается символом 0^+G. Если множество G является замкнутым, то замкнут и его рецессивный конус 0^+G.

Т е о р е м а. *Множество $G\subset X$, $G\neq X$, является эпилипшицевым в направлении вектора $e\in X$, $e\neq 0$, в том и только том случае, когда G замкнуто и $e\in\operatorname{int}(0^+G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Предположим, что множество $G\subset X$ является эпилипшицевым в направлении вектора $e\in X$, $e\neq 0$, и пусть функция $g:H\to R$ является липшицевой с константой $L>0$ и $G=\{z=x+\alpha e\,|\,x\in H,\ g(x)\leqslant\alpha\}$ (H — замкнутое гиперподпространство, не содержащее e). Рассмотрим выпуклый конус $K=\{z=x+\alpha e\,|\,x\in H,\ L\|x\|\leqslant\alpha\}$. Так как прямая сумма $H\oplus E$ ($E=\{\alpha e\,|\,\alpha\in R\}$ — одномерное подпространство, порожденное вектором e) топологически эквивалентно пространству X, то нетрудно убедиться, что K обладает непустой внутренностью, причем $e\in\operatorname{int}K$. Покажем, что $K\subset 0^+G$. С этой целью рассмотрим произвольные точки $z\in G$ и $w\in K$ и представим их в виде $z=x+\alpha e$, $w=u+\beta e$, где $x,\ u\in H$, $\alpha,\ \beta\in R$. Отметим, что эти представления определяются единственным образом, причем $g(x)\leqslant\alpha$, $L\|u\|\leqslant\beta$. Так как функция g липшицева на H и $x,\ x+tu\in H$, то $g(x+tu)\leqslant g(x)+$

$+tL\|u\|\leqslant\alpha+t\beta$ для всех $t\geqslant 0$. Из этого неравенства заключаем, что $z+tw=(x+tu)+(\alpha+t\beta)e\in G$ для всех $t\geqslant 0$. Так как точка $z\in G$ выбрана произвольным образом, то $w\in 0^+G$ и, следовательно, $K\subset 0^+G$. Таким образом, $\operatorname{int}(0^+G)\neq\varnothing$ и $e\in\operatorname{int}(0^+G)$. Замкнутость множества G следует из непрерывности функции g и представления $G=\{z=x+\alpha e\,|\,x\in H,\ g(x)\leqslant\alpha\}$.

Достаточность. Предположим, что множество G замкнуто и $e\in\operatorname{int}(0^+G)$. Для каждого $x\in X$ определим

$$\phi(x)=\inf\{\alpha\in R\,|\,x+\alpha e\in G\}$$

и покажем, что $|\phi(x)|<+\infty$ для всех $x\in X$.

Заметим, прежде всего, что так как $e\in\operatorname{int}(0^+G)$, то для некоторого $\rho>0$ имеет место включение $B(e,\rho)\subset 0^+G$, где $B(e,\rho)=\{x\in X\,|\,\|x-e\|\leqslant\leqslant\rho\}$. Следовательно, для любого вектора $y\in X$ и любого вещественного числа $\nu>0$ таких, что $\nu\|y\|\leqslant\rho$, справедливо включение $e+\nu y\in B(e,\rho)\subset 0^+G$, а поскольку 0^+G конус, то $y+\mu e\in 0^+G$ при всех $y\in X$ и $\mu\geqslant\rho^{-1}\|y\|$.

Рассмотрим теперь произвольные векторы $x\in X$ и $z\in G$. В силу сделанного выше замечания для вектора $y=x-z$ можно указать вещественное число $\mu>0$ такое, что $x-z+\mu e\in 0^+G$. Так как $z\in G$, то из определения рецессивного конуса следует, что $x+\mu e=z+(x-z+\mu e)\in G$. Значит, $\phi(x)<\mu<+\infty$.

Предположим теперь, что $\phi(\bar{x})=-\infty$ для некоторого $\bar{x}\in X$. Это означает, что $\bar{x}+\alpha e\in G$ для всех $\alpha\in R$. Рассмотрим произвольную точку $z\in X$ и выберем $\gamma>0$ так, что $z-\bar{x}+\gamma e\in 0^+G$. Так как $\bar{x}+\alpha e\in G$ для всех $\alpha\in R$, то в силу определения рецессивного конуса имеет место $z+(\alpha+\gamma)e=\bar{x}+\alpha e+(z-\bar{x}+\gamma e)\in G$ для всех $\alpha\in R$. Положив $\alpha=-\gamma$, получим $z\in G$. Таким образом, $G=X$, что противоречит предположению $G\neq X$. Следовательно, $\phi(x)>-\infty$ для всех $x\in X$.

Итак, функция $\phi{:}\,x\to\phi(x)$ определена и конечна всюду на X, причем в силу замкнутости G справедливо включение $x+\phi(x)e\in G$. Рассмотрим произвольные точки x_1, $x_2\in X$ и выберем $\mu=\rho^{-1}\|x_1-x_2\|$. Тогда $(x_1-x_2)+\mu e\in 0^+G$. Поскольку, $x_2+\phi(x_2)e\in G$, то $x_2+\phi(x_2)e+(x_1-x_2)+\mu e=x_1+(\phi(x_2)+\mu)e\in G$, что влечет

$$\phi(x_1)\leqslant\phi(x_2)+\mu=\phi(x_2)+\rho^{-1}\|x_1-x_2\|.$$

Аналогично получим

$$\phi(x_2)\leqslant\phi(x_1)+\rho^{-1}\|x_1-x_2\|.$$

Следовательно, функция $\phi{:}\,X\to R$ липшицева с константой $L=\rho^{-1}$.

Пусть H — произвольное замкнутое гиперподпространство в X, не содержащее вектор e. Заметим, что любой вектор $z\in X$ может быть единственным образом представлен в виде $z=x+\alpha e$, где $x\in H$, $\alpha\in R$. Покажем, что $G=\{z=x+\alpha e\,|\,x\in H,\ \phi(x)\leqslant\alpha\}=:Q$. Пусть $z\in G$ и пусть $z=x+\alpha e$, где $x\in H$, $\alpha\in R$. В силу определения функции ϕ имеем $\phi(x)\leqslant\alpha$ и, следовательно, $z\in Q$. Значит, $G\subset Q$. Для доказательства обратного включения заметим, что $x+\phi(x)e\in G$ для всех $x\in H$, а поскольку $e\in 0^+G$, то $x+\alpha e\in G$ для всех $x\in H$ и $\alpha\geqslant g(x)$. Это и означает, что $Q\subset G$. Таким образом, выбрав в качестве функции $g{:}\,H\to R$ сужение ϕ на H, мы получим требуемое представление для G. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что константа Липшица для функции g может быть выбрана равной

$$L=\inf\{\rho^{-1}\,|\,\rho>0,\quad B(e,\rho)\subset 0^+G\}.$$

Следствие. *Множество $G\subset X$, $G\neq X$, является эпилипшицевым тогда и только тогда, когда G замкнуто и* $\operatorname{int}(0^+G)\neq\varnothing$.

Сравнение данного критерия с соответствующим критерием Р. Рокафеллара для локальной эпилипшицевости указывает на наличие родственности между рецессивным конусом и касательным конусом Кларка.

В заключение отметим, что для случая $X=R^n$ представленные выше результаты были анонсированы авторами в [5].

Summary

It is proved that a subset G of a normed vector space X is epilipschitzian (in global sense) in the direction of a vector $e \in X$, $e \neq 0$, if and only if G is closed and $e \in \operatorname{int}(0+G)$, where $0+G$ is the recession cone of G.

Литература

1. Rockafellar R. T. Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets in R^n. — Nonlinear analysis. Theory, Methods and Applications. 1979. Vol. 3, N 1. P. 145—154.
2. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М., 1988.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., 1973.
4. Luc D. T. // Mathematical Programming, Ser. A. 1990/91. Vol. 49, N 1. P. 113—122.
5. Гороховик В. В., Гороховик С. Я. // Эпилипшицевость множеств и рецессивный конус. Тез. докл. 6-й конф. математиков Беларуси. Ч. 4. Гродно, 1992. С. 119.

Институт математики АН Беларуси,

Белорусский государственный экономический университет

Поступила в редакцию 01.07.93