

УДК 517.98

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КУСОЧНО-АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. В. Гороховик

Институт математики НАН Беларуси

e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Поступила 07.02.2007

Введение. Говоря нестрого, кусочно-аффинными называются такие отображения, которые “склеены” из конечного числа “кусков” некоторых аффинных отображений (точное определение приводится в разделе 2). По своей простоте этот класс нелинейных отображений наиболее близок к линейным и аффинным отображениям. Вместе с тем, любое непрерывное нелинейное отображение можно сколь угодно точно аппроксимировать на ограниченных подмножествах кусочно-аффинными отображениями. Благодаря таким аппроксимационным свойствам кусочно-аффинные отображения широко используются как в теоретических исследованиях, так и при построении численных методов решения самых различных задач нелинейного анализа (см., например, [1–4]). Настоящая работа продолжает исследования, начатые автором в [4–6]. В разделе 1 приводятся необходимые сведения о многогранных (не обязательно выпуклых) множествах. Раздел 2 посвящен обсуждению определения кусочно-аффинных отображений и их простейших свойств. В разделе 3 даны геометрические характеристики кусочно-аффинных отображений, в частности, доказано, что отображение является кусочно-аффинным в том и только том случае, когда его надграфик и подграфик относительно любого отношения частичного порядка, заданного на пространстве значений отображения выпуклым многогранным конусом, представимы в виде объединений конечного числа выпуклых многогранных подмножеств, т.е. являются многогранными (не обязательно выпуклыми) множествами. Ряд аналитических характеристик кусочно-аффинных отображений получен в разделе 4. В последнем разделе 5 аналогичные результаты представлены для кусочно-линейных отображений.

1. Необходимые сведения о многогранных (не обязательно выпуклых) множествах. Пусть X — конечномерное нормированное пространство и пусть X^* — сопряженное ему пространство линейных функций на X . Гиперплоскостями в X называются, как известно, множества вида $H(a^*, \alpha) := \{x \in X \mid a^*(x) = \alpha\}$, где $a^* \in X^*$, $a^* \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Каждая гиперплоскость порождает в X замкнутые полупространства

$$H_{\leq}(a^*, \alpha) := \{x \in X \mid a^*(x) \leq \alpha\}, \quad H_{\geq}(a^*, \alpha) := \{x \in X \mid a^*(x) \geq \alpha\}$$

и дополняющие их открытые полупространства

$$H_{>}(a^*, \alpha) := \{x \in X \mid a^*(x) > \alpha\}, \quad H_{<}(a^*, \alpha) := \{x \in X \mid a^*(x) < \alpha\}.$$

Так как $H_{\leq}(a^*, \alpha) = H_{\geq}(-a^*, -\alpha)$ и $H_{>}(a^*, \alpha) = H_{<}(-a^*, -\alpha)$, то далее преимущественно будут использоваться замкнутые полупространства вида $H_{\leq}(a^*, \alpha)$ и открытые полупространства вида $H_{>}(a^*, \alpha)$.

Исторически определение многогранного множества было дано в два этапа. Сначала рассматривались выпуклые многогранные множества (см., например, [7–10] и библиографию в них), а затем этот класс был дополнен [11, 4–6] невыпуклыми многогранными множествами.

Многогранным выпуклым множеством в X называется [7–10] такое множество $Q \subset X$, которое может быть получено как пересечение конечного числа замкнутых полупространств, т.е. такое, что $Q = \bigcap_{j=1}^k H_{\leq}(a_j^*, \alpha_j)$, где $a_j^* \in X^*$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Все пространство X также рассматривается как многогранное множество.

Таким образом, каждое многогранное выпуклое множество есть множество решений конечной системы линейных неравенств. Поэтому в значительной мере теория многогранных выпуклых множеств развивалась в рамках теории линейных неравенств [12, 13], а также теории линейного программирования [14, 15], предметом исследования которого являются задачи минимизации (максимизации) линейных функций на многогранных множествах.

Многогранным (не обязательно выпуклым) *множеством* в X называется [11] такое множество $Q \subset X$, которое может быть получено как объединение конечного числа многогранных выпуклых множеств, т.е. такое, что

$$Q = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{k(i)} H_{\leq}(b_{ij}^*, \beta_{ij}), \quad (1)$$

где $b_{ij}^* \in X^*$, $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k(i)$; $i = 1, \dots, m$.

Совокупность всех многогранных множеств пространства X будем обозначать ниже через $M(X)$. Символом $\mathcal{M}(X)$ обозначим булеву решетку всех подмножеств из X с теоретико-множественными операциями пересечения и объединения в качестве решеточных операций. В [16, 17] показано, что $M(X)$ является наименьшей подрешеткой в $\mathcal{M}(X)$, содержащей все замкнутые полупространства пространства X . Другими словами, многогранными множествами в X являются те и только те подмножества пространства X , которые могут быть получены из конечного семейства замкнутых полупространств посредством конечного числа операций пересечения и объединения. Из общей характеристики подрешеток следует (см. [11, 14]), что каждое многогранное множество Q может быть представлено также в двойственном виде

$$Q = \bigcap_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^{m(j)} H_{\leq}(c_{ij}^*, \gamma_{ij}), \quad (2)$$

где $c_{ij}^* \in X^*$, $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m(j)$; $j = 1, \dots, k$.

Заметим, что семейства замкнутых полупространств $H_{\leq}(b_{ij}^*, \beta_{ij})$, $j = 1, \dots, k(i)$; $i = 1, \dots, m$, и $H_{\leq}(c_{ij}^*, \gamma_{ij})$, $i = 1, \dots, m(i)$; $j = 1, \dots, k$, которые используются соответственно в (1) и (2) для представления одного и того же многогранного множества Q , могут быть, вообще говоря, различными.

2. Определение и простейшие свойства кусочно-аффинных отображений. Пусть X и Y — конечномерные нормированные пространства.

Конечное семейство выпуклых многогранных множеств $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ будем называть *многогранным покрытием* многогранного множества Q из X , если

$$M_i \subset Q, \quad i = 1, \dots, k, \quad \text{и} \quad Q = \bigcup_{i=1}^k M_i. \quad (3)$$

Семейство $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ будем называть *многогранным разбиением* многогранного множества Q , если выполняется условие (3) и условие

$$\text{ri } M_i \cap \text{ri } M_j = \emptyset, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j,$$

где $\text{ri } M$ — относительная внутренность множества M .

Многогранное покрытие (многогранное разбиение) $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ множества Q будем называть *телесным*, если каждое M_i , $i = 1, \dots, k$, имеет непустую внутренность, или, что то же самое, если

$$\dim \operatorname{aff} M_i = \dim X, \quad i = 1, \dots, k,$$

где $\operatorname{aff} M$ — аффинная оболочка множества M .

Определение (ср. с [18, 19]). Отображение $P : X \rightarrow Y$ будем называть *кусочно-аффинным*, если существует многогранное покрытие $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ пространства X и набор аффинных отображений $A_i : X \rightarrow Y$, $i = 1, \dots, k$, такие, что

$$P(x) = A_i(x), \quad x \in M_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Семейство всех кусочно-аффинных отображений из X в Y будем обозначать символом $PA(X, Y)$. В случае $Y = \mathbb{R}$ семейство всех кусочно-аффинных функций из X в $\mathbb{R}$ для краткости будем обозначать символом $PA(X)$.

Рассмотрим примеры кусочно-аффинных отображений.

1) Всякое аффинное, и, тем более, всякое линейное отображение является кусочно-аффинным. Таким образом, справедлива следующая цепочка включений:

$$L(X, Y) \subset A(X, Y) \subset PA(X, Y).$$

где $L(X, Y)$ и $A(X, Y)$ — пространство линейных и пространство аффинных отображений из X в Y соответственно.

2) Отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определенные равенствами $F(x, y) = \max\{x, y\}$ и $G(x, y) = \min\{x, y\}$ являются кусочно-аффинными. В качестве соответствующего разбиения для них можно взять $\{M_x, M_y\}$, где $M_x := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$, $M_y := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y\}$.

3) Отображение $G_\lambda : X \ni x \rightarrow \lambda x \in X$, где λ — произвольное фиксированное вещественное число, и отображение $F : X \times X \ni (x, y) \rightarrow x + y \in X$ являются линейными, и, следовательно, кусочно-аффинными отображениями.

Данное выше определение кусочно-аффинных отображений отличается от общепринятого определения (см., например, [18, 19]) тем, что в нем требуется, чтобы семейство σ было покрытием пространства X , а не разбиением. Такое требование менее ограничительно и поэтому часто удобнее при обосновании некоторых свойств кусочно-аффинных отображений. Покажем, что на самом деле данное здесь определение эквивалентно общепринятому определению.

Предложение 1. Для любого многогранного покрытия $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ выпуклого телесного многогранного множества Q семейство

$$\sigma' = \{M_i \in \sigma \mid \operatorname{int} M_i \neq \emptyset\}$$

является телесным многогранным покрытием множества Q .

Доказательство. Докажем, прежде всего, утверждение для случая $Q = X$. Введем обозначение $\hat{\sigma} := \{M_i \in \sigma \mid \operatorname{int} M_i = \emptyset\}$. Множество $\hat{M} := \cup\{M \mid M \in \hat{\sigma}\}$ является замкнутым и нигде не плотным в X множеством (как объединение конечного семейства замкнутых и нигде не плотных множеств [20, с. 114, предл. 1]), и, значит, $X \setminus \hat{M}$ всюду плотно в X . Но тогда всюду плотно в X и множество $M' := \cup\{M \mid M \in \sigma'\}$, поскольку $X \setminus \hat{M} \subset M'$. Вследствие замкнутости M' получаем равенство $M' = X$. Таким образом, для случая $Q = X$ утверждение доказано.

Пусть теперь $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ — многогранное покрытие произвольного телесного выпуклого многогранного множества Q и $\sigma' = \{M \in \sigma \mid \operatorname{int} M \neq \emptyset\}$. Представим множество Q

в виде $Q = \bigcap_{i=1}^p H_{\leq}(a_i^*, \alpha_i)$, где $a_i^* \in X^* \setminus \{0\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$. Нетрудно видеть, что семейство $\sigma \cup \{H_{\geq}(a_1^*, \alpha_1), \dots, H_{\geq}(a_p^*, \alpha_p)\}$ является многогранным покрытием всего пространства X . Из уже доказанного выше следует, что семейство $\sigma' \cup \{H_{\geq}(a_1^*, \alpha_1), \dots, H_{\geq}(a_p^*, \alpha_p)\}$ есть телесное многогранное покрытие X . Учитывая равенство $\text{int } Q = \bigcap_{i=1}^p H_{<}(a_i^*, \alpha_i)$ (см. [8, с. 62, теорема 6.5]), заключаем, что $\text{int } Q \subset \bigcup \{M \mid M \in \sigma'\} \subset Q$, а поскольку множество Q выпукло и замкнуто, то $\text{cl}(\text{int } Q) = Q$ (см., например, [8, с. 61, теорема 6.3]) и, следовательно, $Q \subset \text{cl}(\bigcup \{M \mid M \in \sigma'\}) = \bigcup \{M \mid M \in \sigma'\} \subset Q$.

Нетрудно заметить, что если семейство σ является многогранным разбиением множества Q , то σ' является телесным многогранным разбиением Q . Предложение доказано.

Предложение 2. Для любого многогранного покрытия $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ многогранного множества Q существует такое многогранное разбиение ω множества Q , каждый элемент которого содержится в некотором элементе σ .

Прежде чем привести доказательство данного предложения, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Пусть $\{H(a_i^*, \alpha_i), i \in S\}$ — семейство гиперплоскостей из X и пусть I и J — произвольные (возможно, пустые) подмножества индексов S . Тогда множества

$$D_I = \left(\bigcap_{i \in I} H_{\leq}(a_i^*, \alpha_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i \in S \setminus I} H_{\geq}(a_i^*, \alpha_i) \right)$$

и

$$D_J = \left(\bigcap_{i \in J} H_{\leq}(a_i^*, \alpha_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i \in S \setminus J} H_{\geq}(a_i^*, \alpha_i) \right)$$

либо совпадают, либо не пересекаются по относительным внутренностям.

Доказательство. Заметим, что для любого $i \in K := (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$ множества D_I и D_J принадлежат различным замкнутым полупространствам, порождаемым гиперплоскостью $H(a_i^*, \alpha_i)$. Если существует $i \in K$ такое, что хотя бы одно из множеств D_I или D_J не содержится целиком в $H(a_i^*, \alpha_i)$, то гиперплоскость $H(a_i^*, \alpha_i)$ собственно разделяет выпуклые множества D_I и D_J и, следовательно, $\text{ri } D_I \cap \text{ri } D_J = \emptyset$ (см. [8, с. 116, теорема 11.6]). Если $D_I \subset H(a_i^*, \alpha_i)$, $D_J \subset H(a_i^*, \alpha_i)$ для всех $i \in K$, то

$$D_I = \left(\bigcap_{i \in K} H(a_i^*, \alpha_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I \setminus K} H_{\leq}(a_i^*, \alpha_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in S \setminus (I \cup K)} H_{\geq}(a_i^*, \alpha_i) \right),$$

$$D_J = \left(\bigcap_{i \in K} H(a_i^*, \alpha_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i \in J \setminus K} H_{\leq}(a_i^*, \alpha_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in S \setminus (J \cup K)} H_{\geq}(a_i^*, \alpha_i) \right).$$

Так как $I \setminus K = J \setminus K = I \cap J$, а $I \cup K = J \cup K = I \cup J$, то $D_I = D_J$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 2. Пусть $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ — многогранное покрытие множества Q . Представим каждое множество M_i , $i = 1, \dots, k$, в виде $M_i = \bigcap_{j \in S(i)} H_{\leq}(a_j^*, \alpha_j)$, где $S(i)$ — конечное семейство индексов, и рассмотрим семейство гиперплоскостей $H_{\leq}(a_j^*, \alpha_j)$, $j \in S := \bigcup_{i=1}^m S(i)$. Для произвольного непустого подмножества $I \subset S$ образуем множество $D_I = (\bigcap_{j \in I} H_{\leq}(a_j^*, \alpha_j)) \cap (\bigcap_{j \in S \setminus I} H_{\geq}(a_j^*, \alpha_j))$ и рассмотрим семейство ω , состоящее из всех таких D_I , которые целиком содержатся в одном из множеств M_i , $i = 1, \dots, k$. Очевидно, что $\bigcup \{D \mid D \in \omega\} \subset Q$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in Q$ и выберем $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ такое, что $x \in M_i$. Рассмотрим множество индексов $J = \{j \in S \mid x \in H_{\leq}(a_j^*, \alpha_j)\}$. Очевидно, что $x \in D_J$. Кроме того, так как $S(i) \subset J$, то $D_J \subset M_i$ и, значит, $D_J \in \omega$. Поскольку x — произвольная точка из Q , то $Q \subset \bigcup \{D \mid D \in \omega\}$. Таким образом, семейство ω является покрытием мно-

жества Q . Также в силу леммы 1 различные подмножества семейства ω не пересекаются по относительным внутренностям. Отождествляя совпадающие и исключая пустые элементы семейства ω , получаем многогранное разбиение Q , каждый элемент которого содержится в некотором элементе покрытия σ .

Таким образом, из предложений 1 и 2 следует

Теорема 1. *Отображение $P : X \rightarrow Y$ является кусочно-аффинным в том и только том случае, если существует телесное многогранное разбиение σ' пространства X такое, что P совпадает на каждом подмножестве из σ' с некоторым аффинным отображением.*

Отметим некоторые простейшие свойства пространства кусочно-аффинных отображений, которые следуют непосредственно из определения.

Теорема 2. *Композиция кусочно-аффинных отображений является кусочно-аффинным отображением.*

Доказательство. Пусть X, Y, Z — конечномерные нормированные пространства. Рассмотрим произвольные кусочно-аффинные отображения $P \in PA(X, Y)$ и $Q \in PA(Y, Z)$. Пусть $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ и $\delta = \{D_1, \dots, D_p\}$ — соответствующие им многогранные покрытия пространств X и Y , а $P_1, \dots, P_k$ и $Q_1, \dots, Q_p$ — наборы аффинных отображений из $A(X, Y)$ и $A(Y, Z)$ такие, что $P(x) = P_i(x)$, $x \in M_i$, $i = 1, \dots, k$; $Q(y) = Q_j(y)$, $y \in D_j$, $j = 1, \dots, p$. Множества $C_{ij} := M_i \cap P_i^{-1}(D_j)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, p$, многогранны (это следует из свойств многогранных множеств) и образуют многогранное покрытие пространства X . Кроме того, аффинное отображение $Q_j \circ P_i$ совпадает с $Q \circ P$ на C_{ij} . Теорема доказана.

Из теоремы 1 можно получить ряд важных следствий.

Следствие 1. *Множество $PA(X, Y)$ является векторным пространством относительно естественных операций поточечного сложения отображений и умножения отображений на вещественное число.*

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 1 и примера 3) кусочно-аффинных отображений.

Предположим, что $\dim Y = n$ и зафиксируем в Y некоторый базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Поскольку любой элемент $y \in Y$ единственным образом представим в виде $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, то значения любого отображения $P : X \rightarrow Y$ могут быть единственным образом представлены в виде $P(x) = p_1(x)e_1 + \dots + p_n(x)e_n$, где p_i , $i = 1, \dots, n$, — некоторые функции из X в $\mathbb{R}$. Будем называть функции p_i , $i = 1, \dots, n$, *координатными функциями* отображения P .

Следствие 2. *Отображение $P : X \rightarrow Y$ является кусочно-аффинным тогда и только тогда, когда его координатные функции $p_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, являются кусочно-аффинными.*

Доказательство. Справедливость достаточной части утверждения следует из теоремы 2, следствия 1, а также линейности отображений $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow Y$, где $\phi_i(\lambda) = \lambda e_i$, $i = 1, \dots, n$. Для доказательства необходимости рассмотрим в Y^* базис $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, дуальный базису $\{e_1, \dots, e_n\}$, т.е. такой, что $\langle e_i^*, e_i \rangle = 1$ при всех $i = 1, \dots, n$ и $\langle e_i^*, e_j \rangle = 0$ при всех $i, j = 1, \dots, n$; $i \neq j$. Поскольку $p_i(x) = e_i^*(P(x))$, $i = 1, \dots, n$, то кусочная аффинность координатных функций p_i , $i = 1, \dots, n$ следует из теоремы 2 и линейности функций e_i^* , $i = 1, \dots, n$.

3. Геометрические характеристики кусочно-аффинных отображений. Непосредственно из определения можно заметить, что отображение является кусочно-аффинным в том и только том случае, когда его график есть объединение конечного числа выпуклых многогранных частей графиков аффинных отображений и, следовательно, является многогранным (не обязательно выпуклым) множеством. Зафиксируем это наблюдение в виде следующей теоремы и, несмотря на “очевидность”, приведем ее строгое формальное доказательство.

Теорема 3. *Отображение $P : X \rightarrow Y$ является кусочно-аффинным тогда и только тогда, когда его график $\text{graph } P := \{(x, y) \in X \times Y \mid P(x) = y\}$ является многогранным множеством в $X \times Y$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P : X \rightarrow Y$ — кусочно-аффинное отображение и пусть $\sigma = \{M_1, \dots, M_k\}$ и $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ — соответствующие ему многогранное разбиение пространства X и набор аффинных отображений такие, что $P(x) = A_i(x)$ для всех $x \in M_i$, $i = 1, \dots, k$. Тогда, как нетрудно видеть, справедливо равенство

$$\text{graph } P = \bigcup_{i=1}^k ((M_i \times Y) \cap \text{graph } A_i),$$

из которого в силу свойств многогранных множеств следует многогранность графика кусочно-аффинного отображения P .

Достаточность. Рассмотрим сначала случай, когда $Y = \mathbb{R}$. Пусть $\text{graph } P = \bigcup_{i=1}^k G_i$, где $\Sigma = \{G_1, \dots, G_k\}$ — семейство выпуклых многогранных множеств в $X \times \mathbb{R}$. Тогда семейство $\sigma := \{M_1, \dots, M_k\}$, где $M_i := \text{pr}_X G_i$, является многогранным покрытием X . Следовательно, в силу предложения 1 его элементы, имеющие непустую внутренность, образуют телесное многогранное покрытие пространства X . Пусть M_i — произвольный элемент σ , такой, что $\text{int } M_i \neq \emptyset$, а G_i — соответствующий ему элемент Σ . Предположим, что $\dim X = m$, и выберем в M_i произвольный аффинно-независимый набор точек $\{x_0, \dots, x_m\}$. Нетрудно показать, что набор точек $\{(x_0, P(x_0)), \dots, (x_m, P(x_m))\}$ точек из G_i также является аффинно-независимым и, значит, $\dim \text{aff } G_i \geq m$. Однако размерность аффинной оболочки G_i не может быть равной $m + 1$, так как это противоречило бы однозначности отображения P . Таким образом, $\dim \text{aff } G_i = m$ и, следовательно, множество $\text{aff } G_i$ является гиперплоскостью в $X \times \mathbb{R}$. Значит, $\text{aff } G_i = \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R} \mid a_i^*(x) + \alpha_i \xi = \beta_i\}$, где $a_i^* \in X^*$, а $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Поскольку коэффициент α_i не равен нулю (в противном случае имело бы место включение $M_i \subset \{x \in X \mid a_i^*(x) = \beta_i\}$, что противоречило бы условию $\text{int } M_i \neq \emptyset$), то множество $\text{aff } G_i$ совпадает с графиком аффинной функции $h_i(x) := (a_i^*(x) - \beta_i)/\alpha_i$. Таким образом, телесному многогранному покрытию $\sigma' = \{M_i \in \sigma \mid \text{int } M_i \neq \emptyset\}$ пространства X соответствует семейство аффинных функций $h_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что $P(x) = h_i(x)$ для любого $x \in M_i$. Значит, функция $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно-аффинна.

Предположим теперь, что $\dim Y = n > 1$. Выберем в Y произвольный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, и пусть $p_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, — координатные функции отображения P , соответствующие этому базису. Нетрудно проверить, что $\text{graph } p_i = r_i(\text{graph } P)$, $i = 1, \dots, n$, где отображение $r_i : X \times Y \rightarrow X \times \mathbb{R}$ определяется равенством $r_i(x, y) = (x, \langle y, e_i^* \rangle)$, а $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ — базис в Y^* , дуальный базису $\{e_1, \dots, e_n\}$. Так как отображения r_i , $i = 1, \dots, n$, линейны, то из многогранности $\text{graph } P$ следует многогранность $\text{graph } p_i$ и, следовательно, по доказанному выше координатные функции p_i , $i = 1, \dots, n$, кусочно-аффинны. Воспользовавшись далее следствием 2 заключаем, что отображение P также кусочно-аффинно. Теорема доказана.

Определенное на Y отношение частичного порядка $\preceq$, согласованное с алгебраическими операциями пространства Y , будем называть *многогранным*, если соответствующий ему конус положительных векторов $Y_{\preceq}^+ := \{y \in Y \mid 0 \preceq y\}$ является многогранным.

Теорема 4. *Отображение $P : X \rightarrow Y$ является кусочно-аффинным тогда и только тогда, когда для любого многогранного отношения частичного порядка $\preceq$, определенного на Y , $\preceq$ -надграфик $\text{epi}_{\preceq} P := \{(x, y) \in X \times Y \mid P(x) \preceq y\}$ и $\preceq$ -подграфик $\text{hup}_{\preceq} P := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \preceq P(x)\}$ являются многогранными множествами в $X \times Y$.*

Доказательство. Так как для любого многогранного отношения частичного порядка $\preceq$, определенного на Y , $\preceq$ -надграфик $\text{epi}_{\preceq} A$ и $\preceq$ -подграфик $\text{hup}_{\preceq} A$ любого аффинного отображения $A : X \rightarrow Y$ являются выпуклыми многогранными множествами в $X \times Y$ (это следует, например, из [8, теорема 3.6]), то необходимая часть утверждения следует из равенств

$$\text{epi}_{\preceq} P = \bigcup_{i=1}^k ((M_i \times Y) \cap \text{epi}_{\preceq} A_i),$$

$$\text{hyp}_{\preceq} P = \bigcup_{i=1}^k ((M_i \times Y) \cap \text{hyp}_{\preceq} A_i),$$

где $M_1, \dots, M_k$ — многогранное покрытие X , а $A_1, \dots, A_k$ — соответствующий ему набор аффинных функций, таких, что $p(x) = A_i(x)$, $x \in M_i$, $i = 1, \dots, k$.

Достаточная часть утверждения следует из равенства $\text{graph } P = \text{epi}_{\preceq} P \cap \text{hyp}_{\preceq} P$ и теоремы 3.

Следствие 3 (см. также [5]). *Вещественнозначная функция $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ является кусочно-аффинной тогда и только тогда, когда ее надграфик $\text{epi } p := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid p(x) \leq \alpha\}$ и подграфик $\text{hyp } p := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid p(x) \geq \alpha\}$ являются многогранными множествами.*

4. Аналитические критерии кусочной аффинности отображений. Далее будем предполагать, не оговаривая это каждый раз специально, что на пространстве Y задано отношение частичного порядка $\preceq$, относительно которого Y является векторной решеткой [16, 17]. Известно [21, с. 330], что отношение частичного порядка $\preceq$ определяет на конечномерном векторном пространстве Y структуру векторной решетки в том и только том случае, когда конус положительных векторов $Y_{\preceq}^+ := \{y \in Y \mid 0 \preceq y\}$ является выпуклой конической оболочкой некоторого базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ из Y (заметим, что из этого следует, что $\preceq$ является многогранным). Таким образом, предположение о том, что Y является векторной решеткой, на самом деле эквивалентно выбору в Y некоторого базиса и, следовательно, не сужает класс рассматриваемых пространств. Будем считать, что базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, согласованный с заданным на Y отношением частичного порядка $\preceq$ равенством $Y_{\preceq}^+ := \text{сосоnv}\{e_1, \dots, e_n\}$, где $\text{сосоnv } M$ обозначает выпуклую коническую оболочку множества M , также выбран и зафиксирован.

Для любого отображения $F : X \rightarrow Y$ запись $F = (f_1, \dots, f_n)$ будет означать его представление через координатные функции в зафиксированном выше базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$. Семейство $\mathcal{F}(X, Y)$ всех отображений из X в Y , наделенное естественными алгебраическими операциями и отношением частичного порядка $\preceq$, определенным для отображений $F = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow Y$ и $G = (g_1, \dots, g_n) : X \rightarrow Y$ тождествами

$$F \preceq G \iff F(x) \preceq G(x) \quad \forall x \in X \iff f_i(x) \leq g_i(x) \quad \forall x \in X, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

является векторной решеткой, при этом решеточные операции $\sup\{F, G\}$ и $\inf(F, G)$ задаются соответственно равенствами

$$\sup\{F, G\}(x) = (\max\{f_1(x), g_1(x)\}, \dots, \max\{f_n(x), g_n(x)\})$$

и

$$\inf(F, G)(x) = (\min\{f_1(x), g_1(x)\}, \dots, \min\{f_n(x), g_n(x)\}).$$

Так как решеточные операции $\sup\{F, G\}$ и $\inf(F, G)$ сохраняют свойство кусочной аффинности (см. пример 2 и теорему 2), то справедливо следующее

Предложение 3. *Семейство кусочно-аффинных отображений $\mathcal{PA}(X, Y)$ с поточечными алгебраическими операциями и отношением частичного порядка, определенным условием (4), является векторной подрешеткой в решетке $\mathcal{F}(X, Y)$.*

Отображение $F : X \rightarrow Y$ мы будем называть $\preceq$ -выпуклым (выпуклым относительно частичного порядка $\preceq$), если

$$F(\alpha x + \beta y) \preceq \alpha F(x) + \beta F(y)$$

для всех $x, y \in X$ и всех $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Предложение 4. *Кусочно-аффинное отображение $P : X \rightarrow Y$ является $\preceq$ -выпуклым тогда и только тогда, когда оно представимо в виде*

$$P(x) = \sup_{j \in J} A_j(x), \quad x \in X, \quad (5)$$

где $A_j : X \rightarrow Y$, $j \in J$, — аффинные отображения из X в Y , J — конечное семейство индексов, а супремум в Y понимается в смысле частичного порядка $\preceq$.

Доказательство. Необходимость. Из $\preceq$ -выпуклости и кусочной аффинности отображения P следует выпуклость и кусочная аффинность его координатных функций p_i . В силу [5, Proposition 3.1] каждая координатная функция $p_i : X \rightarrow Y$, $i = 1, \dots, k$, представима в виде $p_i(x) = \max_{j \in J_i} (a_j^*(x) + \alpha_j)$, $x \in X$, $i = 1, \dots, k$, где J_i — конечные семейства индексов, $a_j^* : X \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_n$ — линейные функции. Определим множество мультииндексов $J = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$ и поставим в соответствие каждому $j = (j_1, \dots, j_n) \in J$ аффинное отображение $A_j = (a_{j_1}^*(\cdot) + \alpha_{j_1}, \dots, a_{j_n}^*(\cdot) + \alpha_{j_n}) : X \rightarrow Y$. Нетрудно проверить, что $P(x) = \sup_{j \in J} A_j(x)$, $x \in X$.

Достаточность следует из неравенства

$$\sup_{i \in J} (a_i + b_i) \leq \sup_{i \in J} a_i + \sup_{i \in J} b_i,$$

где $\{a_i \mid i \in J\}$ и $\{b_i \mid i \in J\}$ — конечные системы векторов из Y , а супремум в Y понимается в смысле частичного порядка $\preceq$. Предложение доказано.

Теорема 5. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) отображение $P : X \rightarrow Y$ кусочно-аффинно;
- б) отображение $P : X \rightarrow Y$ представимо в виде

$$P(x) = \inf_{1 \leq i \leq k} \sup_{1 \leq j \leq m(i)} A_{ij}(x), \quad x \in X, \quad (6)$$

где $A_{ij} : X \rightarrow Y$, $j = 1, \dots, m(i)$, $i = 1, \dots, k$, — аффинные отображения;

- в) отображение $P : X \rightarrow Y$ представимо в виде

$$P(x) = \sup_{1 \leq i \leq k} \inf_{1 \leq j \leq m(i)} A_{ij}(x), \quad x \in X, \quad (7)$$

где $A_{ij} : X \rightarrow Y$, $j = 1, \dots, m(i)$, $i = 1, \dots, k$, — аффинные отображения;

- г) отображение $P : X \rightarrow Y$ представимо в виде разности двух выпуклых кусочно-аффинных отображений, т.е.

$$P(x) = \sup_{1 \leq i \leq k} B_i(x) - \sup_{1 \leq j \leq m} D_j(x), \quad x \in X, \quad (8)$$

где $B_i, D_j : X \rightarrow Y$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$, — аффинные отображения.

Доказательство. Справедливость импликаций б) $\Rightarrow$ а), в) $\Rightarrow$ а) и г) $\Rightarrow$ а) следует из того, что любое аффинное отображение является кусочно-аффинным, а вся совокупность кусочно-аффинных отображений есть векторная решетка (предложение 3).

Докажем импликацию а) $\Rightarrow$ б). Пусть $P : X \rightarrow Y$ — кусочно-аффинное отображение. В силу следствия 2 соответствующие ему координатные функции $p_s : X \rightarrow \mathbb{R}$, $s = 1, \dots, n$, также являются кусочно-аффинными. Из [5, Theorem 3.1 и Proposition 3.1] следует, что каждая функция $p_s : X \rightarrow \mathbb{R}$, $s = 1, \dots, n$, представима в виде

$$p_s(x) = \min_{i \in I_s} q_i(x), \quad x \in X,$$

где I_s — конечное семейство индексов, а $q_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I_s$, — выпуклые кусочно-аффинные функции. Положим $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ и для каждого $i = (i_1, \dots, i_n) \in I$ введем $\preceq$ -выпуклое кусочно-аффинное отображение $C_i : X \rightarrow Y$, определив $C_i(x) = q_{i_1}(x)e_1 + q_{i_2}(x)e_2 + \dots + q_{i_n}(x)e_n$. Тогда

$$P(x) = \inf_{i \in I} C_i(x), \quad x \in X. \quad (9)$$

Так как в силу предложения 4 каждое C_i , $i \in I$, представимо в виде (5), то из равенства (9) заключаем, что P может быть представлено в виде (6). Таким образом, импликация а) $\Rightarrow$ б) доказана.

Докажем импликацию б) $\Rightarrow$ г). Предположим, что отображение $P: X \rightarrow Y$ представлено в виде (6), и пусть $C_i(x) = \sup_{1 \leq j \leq m(i)} A_{ij}(x)$, $i = 1, \dots, k$. Тогда

$$P(x) = \inf_{1 \leq i \leq k} C_i(x) = - \sup_{1 \leq i \leq k} \left(\sum_{s=1, s \neq i}^k C_s(x) - \sum_{s=1}^k C_s(x) \right) = \sum_{s=1}^k C_s(x) - \sup_{1 \leq i \leq k} \sum_{s=1, s \neq i}^k C_s(x).$$

Так как сумма и супремум конечного числа $\preceq$ -выпуклых кусочно-аффинных отображений являются также $\preceq$ -выпуклыми кусочно-аффинными отображениями, то оба отображения $x \rightarrow \sum_{s=1}^k C_s(x)$ и $x \rightarrow \sup_{1 \leq i \leq k} \sum_{s=1, s \neq i}^k C_s(x)$ $\preceq$ -выпуклы и кусочно-аффинны и, следовательно, каждое из них представимо в виде (5), что и доказывает возможность представления отображения P в виде (8).

Докажем импликацию г) $\Rightarrow$ в). Если P может быть представлено в виде (8), то, полагая $A_{ij}(x) = B_i(x) - D_j(x)$, $x \in X$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, k$, легко приходим к представлению (7). Теорема доказана.

Завершим данный раздел теоремой, характеризующей аппроксимационные свойства кусочно-аффинных отображений в пространстве непрерывных отображений.

Теорема 6. Для любого непрерывного отображения $F: X \rightarrow Y$ и любого компакта $Q \subset X$ по любому положительному числу $\epsilon > 0$ можно указать кусочно-аффинное отображение $P: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию

$$\max_{x \in Q} \|F(x) - P(x)\|_Y < \epsilon.$$

Доказательство следует из [5, Theorem 4.2] и [20, с. 245, предложение 4].

Следствие 5. Пространство кусочно-аффинных отображений $PL(X, Y)$ плотно в пространстве непрерывных отображений $C(X, Y)$, снабженном локально выпуклой топологией, порожденной семейством полунорм $\|P\|_Q = \max_{x \in Q} \|P(x)\|$, где Q — компакт из X .

5. Кусочно-линейные отображения. Сформулируем без доказательств основные утверждения, касающиеся кусочно-линейных отображений.

Кусочно-аффинное отображение $P: X \rightarrow Y$ называют *кусочно-линейным*, если оно положительно однородно, т.е. если $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda \geq 0$.

Семейство всех кусочно-линейных отображений из X в Y мы будем обозначать $PL(X, Y)$. Прежде всего отметим, что композиция кусочно-линейных отображений является кусочно-линейным отображением. Если в пространстве Y зафиксирован некоторый базис, то кусочная линейность отображения $P: X \rightarrow Y$ эквивалентна кусочной линейности его координатных функций. Отображение $P: X \rightarrow Y$ кусочно-линейно тогда и только тогда, когда для любого многогранного отношения частичного порядка $\preceq$, определенного на Y , $\preceq$ -надграфик $\text{epi}_{\preceq} P$ и $\preceq$ -подграфик $\text{hup}_{\preceq} P$ являются многогранными конусами в $X \times Y$.

Если отношение частичного порядка $\preceq$ на Y определено миниедральным выпуклым конусом или, что эквивалентно, если Y является векторной решеткой, то относительно естественных алгебраических операций и частичного порядка

$$P \preceq Q \iff P(x) \preceq Q(x) \quad \text{для всех } x \in X \quad (10)$$

семейство кусочно-линейных отображений $PL(X, Y)$ является векторной подрешеткой в $PA(X, Y)$ (и в $\mathcal{F}(X, Y)$).

Кусочно-линейное отображение $P : X \rightarrow Y$ $\preceq$ -выпукло тогда и только тогда, когда оно представимо в виде

$$P(x) = \sup_{j \in J} L_j(x), \quad x \in X,$$

где $L_j : X \rightarrow Y$, $j \in J$, — линейные отображения из X в Y , J — конечное семейство индексов, а операция супремума понимается как решеточная операция в Y .

Теорема 7. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) отображение $P : X \rightarrow Y$ кусочно-линейно;
- б) отображение $P : X \rightarrow Y$ представимо в виде

$$P(x) = \inf_{1 \leq i \leq k} \sup_{1 \leq j \leq m(i)} L_{ij}(x), \quad x \in X,$$

где $L_{ij} : X \rightarrow Y$, $j = 1, \dots, m(i)$, $i = 1, \dots, k$, — линейные отображения;

- в) отображение $P : X \rightarrow Y$ представимо в виде

$$P(x) = \sup_{1 \leq i \leq k} \inf_{1 \leq j \leq m(i)} L_{ij}(x), \quad x \in X,$$

где $L_{ij} : X \rightarrow Y$, $j = 1, \dots, m(i)$, $i = 1, \dots, k$ — линейные отображения;

- г) отображение $P : X \rightarrow Y$ представимо в виде разности двух выпуклых кусочно-линейных отображений, т.е.

$$P(x) = \sup_{1 \leq i \leq k} U_i(x) - \sup_{1 \leq j \leq m} V_j(x), \quad x \in X,$$

где $U_i, V_j : X \rightarrow Y$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, k$, — линейные отображения.

В утверждениях б), в) и г) операции супремума и инфимума следует понимать как решеточные операции в Y .

Пусть $\mathcal{P}(X, Y)$ — пространство положительно однородных непрерывных отображений из X в Y . Относительно нормы

$$\|P\| = \sup_{x \in S} \|P(x)\|_Y,$$

где S — единичная сфера в X , пространство $\mathcal{P}(X, Y)$ является банаховым.

Используя теорему Стоуна–Вейерштрасса (а точнее следствие из нее [20, с. 245, предложение 4]), можно показать что совокупность кусочно-линейных отображений $PL(X, Y)$ является плотным векторным подпространством в $\mathcal{P}(X, Y)$.

Работа финансировалась в рамках Государственной программы фундаментальных исследований “Математические модели – 16”.

Литература

1. Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную топологию. М.: Мир, 1974.
2. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
3. Субботин А.И., Шагалова Л.Г. Кусочно-линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби // Докл. РАН. 1992. Т. 325. № 5. С. 932–936.
4. Гороховик В.В., Зорько О.И. Полиэдральная квазидифференцируемость вещественнозначных функций // Докл. АН Беларуси. 1992. Т. 36. № 5. С. 393–397.
5. Gorokhovik V.V., Zorko O.I. Piecewise affine functions and polyhedrel sets // Optimization. 1994. V. 31. № 3. P. 3–17.
6. Гороховик В.В., Зорько О.И. Невыпуклые многогранные множества и функции и их аналитические представления // Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39. № 1. С. 5–9.
7. Grünbaum V. Convex Polytopes. London–New York–Sydney: John Wiley & Sons, 1967.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

9. *Лейтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
10. *Брёнстед А.* Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.
11. *Robinson S.* Some continuity properties of polyhedral multifunctions // *Mathematical Programming Study*. 1981. V. 14. P. 206–214.
12. *Линейные неравенства и смежные вопросы* / Под ред. Г.У. Куна, А.У. Таккера. М.: ИЛ, 1959.
13. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
14. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966.
15. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
16. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
17. *Гретцгер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
18. *Melzer D.* On the expressibility of piecewise-linear continuous functions as the difference of two piecewise-linear convex functions // *Mathematical Programming Study*. 1986. V. 29. P. 118–134.
19. *Kripfganz A., Schulze R.* Piecewise affine functions as the difference of two convex functions // *Optimization*. 1987. V. 18. № 1. P. 23–29.
20. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975.
21. *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.

V. V. Gorokhovik

Geometrical and analytical characterizations of piecewise affine mappings

Summary

Let X and Y be finite dimensional normed spaces, $\mathcal{F}(X, Y)$ a collection of all mappings from X into Y . A mapping $P \in \mathcal{F}(X, Y)$ is said to be piecewise affine if there exists a finite family of convex polyhedral subsets covering X and such that the restriction of P on each subset of this family is an affine mapping. In the paper we prove a number of characterizations of piecewise affine mappings. In particular we prove that a mapping $P : X \rightarrow Y$ is piecewise affine if and only if for any partial order $\preceq$ defined on Y by a polyhedral convex cone both the $\preceq$ -epigraph and the $\preceq$ -hypograph of P can be represented as a union of finitely many of convex polyhedral subsets of $X \times Y$. Without any restriction of generality we can suppose in addition that the space Y is ordered by a minihedral cone or equivalently that Y is a vector lattice. Then as is well known the collection $\mathcal{F}(X, Y)$ endowed with standard pointwise algebraic operations and the pointwise ordering are a vector lattice too. In the paper we show that the collection of piecewise affine mappings coincides with the smallest vector sublattice of $\mathcal{F}(X, Y)$ containing all affine mappings. Moreover we prove that each convex (with respect to an ordering of Y by a minihedral cone) piecewise affine mapping is the least upper bound of finitely many of affine mappings. The collection of all convex piecewise affine mappings is a convex cone in $\mathcal{F}(X, Y)$ the linear envelope of which coincides with the vector subspace of all piecewise affine mappings.