УДК 517.272 Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2006, вып. 1

В. В. Гороховик

АСИМПТОТИЧЕСКИ КАСАТЕЛЬНЫЙ КОНУС ВТОРОГО ПОРЯДКА К МНОЖЕСТВАМ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ *)

1. Введение.

Пусть X — вещественное нормированное пространство над $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на X, Q — подмножество из X.

В работе рассматривается задача минимизации функции f на множестве Q :

$$f(x) \to \min, \ x \in Q. \tag{P}$$

Под решениями задачи (P) понимаются точки локального (строгого) минимума функции f на множестве Q.

Один из наиболее распространенных методов вывода условий локального минимума первого порядка в задаче (P) основан на локальных аппроксимациях целевой функции f и множества допустимых точек Q, соответственно, производными по направлениям и касательным (контингентным) конусом первого порядка. В конечномерных пространствах, как известно, этот метод позволяет получить как необходимые, так и достаточные условия локального минимума, между которыми, однако, существует разрыв, непреодолимый в общем случае в рамках локальных аппроксимаций первого порядка. Наличие разрыва означает, что для некоторых f и Q, задающих задачу (P), можно указать такие допустимые точки $x \in Q$, которые удовлетворяют необходимому условию локального минимума первого порядка, но не удовлетворяют достаточному условию локального минимума первого порядка. Таким образом, в подобных ситуациях условия локального минимума первого порядка не позволяют окончательно выяснить являются ли такие критические допустимые точки решениями задачи (P) или же нет.

Основная цель настоящей работы — представить для задачи (P) как необходимые, так и достаточные условия локального минимума второго порядка, уменьшающие указанный выше разрыв между необходимыми и достаточными условиями первого порядка и, следовательно, расширяющие класс допустимых точек, окончательное заключение о локальной минимальности которых можно сделать с их помощью. Вывод таких условий основан на более тонких (второго порядка) локальных аппроксимациях функции f и множества Q. В докладе основное внимание уделяется локальным аппроксимациям множества допустимых точек Q. Относительно целевой функции f всюду далее будет предполагаться, что в исследуемых точках она является дважды дифференцируемой по Фреше, а в качестве локальной аппроксимации второго порядка для f будет использоваться соответствующий этой функции многочлен Тэйлора второй степени.

Никаких специальных предположений, указывающих способ задания множества Q в работе не делается, и, следовательно, тем самым полагается, что Q есть произвольное абстрактное подмножество пространства X.

2. Касательные и асимптотически касательные векторы второго порядка к множествам.

Символом U_Q будем обозначать ниже семейство всех последовательностей (x_n), принадлежащих подмножеству $Q \subset X$; $U_Q(x^0)$ — подсемейство из U_Q, состоящее из

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф06Р-020).

последовательностей (x_n), сходящихся (в смысле нормы пространства X) к вектору $x^0 \in X$. Семейство всех последовательностей положительных вещественных чисел (t_n), $t_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, будет обозначаться символомS; $S(\alpha)$ — подсемейство из S, состоящее из таких последовательностей (t_n), которые сходятся к вещественному числу $\alpha \geq 0$.

О п р е д е л е н и е 1 (см., например, [1 – 4]). Говорят, что вектор $h \in X$ является *касательным вектором (первого порядка)* к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\, Q$, если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_Q(x^0)$ такие, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$.

Совокупность всех векторов из X, касательных к множеству Q в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\, Q$, образует замкнутый конус, который мы будем обозначать символом $Q'(x^0)$ и называть *касательным конусом (первого порядка)* к множеству Q в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\, Q$. Часто (см., например, [3]) конус $Q'(x^0)$ называют также *контингентным конусом* или *конусом Булигана (Bouligand)*.

О п р е д е л е н и е 2 (см. [3 – 7]). Вектор $w \in X$ называется *касательным вектором второго порядка* к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\, Q$ для направления $h \in X$, если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_Q(x^0)$ такие, что $\dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2} t_n^2} \to w$.

Множество всех касательных векторов второго порядка к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\, Q$ для направления $h \in X$, которое всюду ниже будет обозначаться символом $Q''(x^0, h)$, является замкнутым (возможно пустым) подмножеством в X.

Нетрудно убедиться, что для любого вектора $w \in Q''(x^0,\, h)$ и для любых последовательностей $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_Q(x^0)$ таких, что $\dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2} t_n^2} \to w$, справедливо также и предельное соотношение $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$. Таким образом, касательные векторы второго порядка из $Q''(x^0,\, h)$ порождаются только такими последовательностями $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_Q(x^0)$, которые определяют вектор h как касательный вектор первого порядка к множеству Q в точке $x^0 \in \mathrm{cl}\, Q$. Из сделанных замечаний следует, что $Q''(x^0,\, h) \neq \emptyset$ только тогда, когда $h \in Q'(x^0)$. Вместе с тем примеры показывают (см. пример 4 ниже), что для некоторых множеств Q и $x^0 \in \mathrm{cl}\, Q$ могут существовать такие касательные векторы первого порядка $h \in Q'(x^0)$, которым соответствует пустое множество касательных векторов второго порядка $Q''(x^0,\, h)$. Более того, даже в тех случаях, когда $Q''(x^0,\, h)$ не пусто, могут существовать такие сходящиеся к x^0 последовательности из Q, которые вместе с любой последовательностью $(t_n) \in S(0)$, удовлетворяющей условию $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$, порождают лишь неограниченные последовательности вида $\dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2} t_n^2}$ и, следовательно, не имеют своих представителей в $Q''(x^0,\, h)$. Таким образом, вообще говоря, множество касательных векторов второго порядка $Q''(x^0,\, h)$ не достаточно полно отражает локальное строение множества Q. Как следствие этого, в общем случае для задачи (P) невозможно получить достаточные условия локального минимума второго порядка, используя для множества Q в качестве его локальной аппроксимации второго порядка только касательные векторы второго порядка. По этой же причине и необходимые условия второго порядка, получаемые в задаче (P) только на основе множества касательных векторов второго порядка $Q''(x^0,\, h)$, не являются полными, поскольку характеризуют поведение целевого функционала не на всех последовательностях $(x_n) \in U_Q(x^0)$, порождающих касательный вектор $h \in Q'(x^0)$. Для того чтобы преодолеть этот недостаток в работе [8] в качестве локальной аппроксимации ограничения Q было введено в $X \times \mathbb{R}_+$ проективное касательное множество второго (и более высокого) порядка, которое, как было показано в [8], порождалось двумя подмножествами пространства X : уже известным множеством касательных векторов второго порядка и другим (впервые введенным в [8]) множеством, названным асимптотически касательным конусом второго порядка.

В настоящей работе дается несколько другое определение асимптотически касательного конуса второго порядка, основанное на расширении пространства X его горизонтом [4]. Для того чтобы ввести понятие горизонта, поставим в соответствие каждому ненулевому вектору w пространства X луч $\operatorname{dir} w := \{\alpha w | \alpha > 0\}$. Очевидно, что $\operatorname{dir} w_1 = \operatorname{dir} w_2$, если $0 \neq w_1 = \lambda w_2$ для некоторого $\lambda > 0$. Нулевому вектору пространства X никакой луч в соответствие не ставится, т. е. полагается, что $\operatorname{dir} 0$ не существует.

Следуя [4], множество всех лучей, соответствующих ненулевым векторам пространства X, будем обозначать символом $\operatorname{hzn} X$ и называть *горизонтом пространства X*. Луч $\operatorname{dir} w \in \operatorname{hzn} X$ будем называть *точкой горизонта, бесконечно удаленной в направлении вектора w* или просто *бесконечно удаленной точкой горизонта пространства X* без указания соответствующего вектора.

Говорят [4], что последовательность векторов (w_n) из пространства X сходится к бесконечно удаленной точке $\operatorname{dir} w \in \operatorname{hzn} X$, если $\alpha_n w_n \to w$ (в смысле нормы пространства X) для некоторой последовательности $(\alpha_n) \in S(0)$.

Символом $U_X(\operatorname{dir} w)$ будем обозначать совокупность всех последовательностей (w_n) из X, сходящихся к $\operatorname{dir} w$.

Определение 3 (ср. с [8]). Ненулевой вектор $w \in X$ назовем *асимптотически касательным вектором второго порядка* к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ для направления $h \in X$, если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_Q(x^0)$ такие, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ и $\dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2} t_n^2} \to \operatorname{dir} w$.

Очевидно, что множество всех ненулевых асимптотически касательных векторов второго порядка к множеству $Q \subset X$ в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ для направления $h \in X$ является конусом, который будем обозначать символом $Q''_\infty(x^0, h)$ и называть *асимптотически касательным конусом второго порядка* к множеству Q в точке $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ для направления h.

Некоторые свойства конуса $Q''_\infty(x^0, h)$ представлены в следующем предложении.

Предложение 1. *Для любого $x^0 \in \operatorname{cl} Q$ и любого $h \in Q'(x^0)$ по крайней мере одно из множеств $Q''(x^0, h)$ или $Q''_\infty(x^0, h)$ является непустым. Кроме того, справедливы равенства*

$$Q''_\infty(x^0, 0) \cup \{0\} = Q'(x^0),$$

и

$$Q''_\infty(x^0, \beta h) = Q''_\infty(x^0, h) \text{ для всех } \beta > 0.$$

Наконец, если $w \in Q''_\infty(x^0, h)$, то $w + \mu h \in Q''_\infty(x^0, h)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$.

Для множества $Q \subset X$, точки $x^0 \in \operatorname{cl} Q$, вектора $h \in Q'(x^0)$ и бесконечно удаленной точки $\operatorname{dir} w \in \operatorname{hzn} X$ символом $S^2_\infty Q(x^0, h, \operatorname{dir} w)$ обозначим семейство таких последовательностей (w_n) из $U_X(\operatorname{dir} w)$, для которых существуют последовательности

$(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_Q(x^0)$, удовлетворяющие условию $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ и равенствам $w_n = \dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом,

$$w \in Q''_\infty(x^0, h) \Longleftrightarrow S^2_\infty Q(x^0,\, h,\, \operatorname{dir} w) \neq \emptyset.$$

3. Условия локального минимума

Начнем с формулировки условий локального минимума первого порядка, обобщению которых посвящен настоящий параграф.

Теорема 1 (см., например, [2, 9]). *Предположим, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема по Фреше в точке $x^0 \in Q \subset X$. Для того чтобы точка $x^0 \in Q$ доставляла локальный минимум функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве $Q \subset X$, необходимо, чтобы*

$$f'(x^0)h \geq 0 \text{ для всех } h \in Q'(x^0). \tag{1}$$

Обратно, если X — конечномерное нормированное пространство, то для того чтобы точка $x^0 \in Q$ доставляет локальный строгий минимум функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве $Q \subset X$, достаточно, чтобы

$$f'(x^0)h > 0 \text{ для всех } h \in Q'(x^0),\ h \neq 0. \tag{2}$$

Очевидно, что если пространство X конечномерно и допустимая точка $x^0 \in Q$ удовлетворяет необходимому условию (1), причем $Q \cap \ker f'(x^0) \neq \{0\}$, т. е. $f'(x^0)h = 0$ для некоторого $h \in Q'(x^0)$, $h \neq 0$, то достаточное условие (2) не выполнено и, следовательно, вопрос о том, является ли точка x^0 решением задачи (P) остается открытым. Для дальнейшего исследования таких допустимых точек будем использовать наряду с $Q'(x^0)$ в качестве дополнительной локальной аппроксимации множества допустимых точек Q совокупность касательных и асимптотически касательных векторов второго порядка.

Теорема 2 (необходимое условие локального минимума второго порядка). *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема по Фреше в допустимой точке $x^0 \in Q \subset X$. Для того чтобы точка $x^0 \in Q$ доставляла локальный минимум функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве $Q \subset X$, необходимо, чтобы для каждого $h \in Q'(x^0) \cap \ker f'(x^0)$ выполнялись условия*

$$f'(x^0)w + f''(x^0)[h,\, h] \geq 0 \text{ для всех } w \in Q''(x^0,\, h) \tag{3}$$

и

$$\inf_{(w_n) \in S^2_\infty Q(x^0,\, h,\, dir\, w)} \Big(\liminf_{n\to\infty} f'(x^0)w_n \Big) + f''(x^0)[h,\, h] \geq 0 \text{ для всех } w \in Q''_\infty(x^0,\, h). \tag{4}$$

Заметим, что условие (3) как необходимое условие локального минимума в задаче (P) было известно и ранее (см., например, [5 – 7]), так что принципиально новым необходимым условием второго порядка в теореме 2 является лишь условие (4). Однако, именно этого условия и недоставало, чтобы, заменив в (3) и (4) нестрогие неравенства строгими, обратить теорему 2 и получить в конечномерном случае достаточные условия локального минимума второго порядка.

Теорема 3 (достаточное условие локального строгого минимума второго порядка). *Пусть X — конечномерное нормированное пространство и пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируема по Фреше в точке $x^0 \in Q \subset X$. Для того чтобы допустимая точка $x^0 \in Q$ доставляла локальный строгий минимум функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве $Q \subset X$, достаточно, чтобы*

(i)

$$f'(x^0)h \geq 0 \text{ для всех } h \in Q'(x^0);$$

(ii) для каждого $h \in Q'(x^0) \cap \ker f'(x^0)$, $h \neq 0$, выполнялись условия

$$f'(x^0)w + f''(x^0)[h,\, h] > 0 \text{ для всех } w \in Q''(x^0,\, h) \tag{5}$$

и

$$\inf_{(w_n)\in S^2_\infty Q(x^0,\, h,\, dir\, w)} \left(\liminf_{n\to\infty} f'(x^0)w_n\right) + f''(x^0)[h,\, h] > 0 \text{ для всех } w \in Q''_\infty(x^0,\, h). \tag{6}$$

Можно показать, рассуждая от противного, что из условия (4) следует условие

$$f'(x^0)w \geq 0 \text{ для всех } w \in Q''_\infty(x^0,\, h).$$

Обратно, если для некоторого $w \in Q''_\infty(x^0,\, h)$ выполнено условие $f'(x^0)w > 0$, то $\liminf\limits_{n\to\infty} f'(x^0)w_n = +\infty$ для любой последовательности $(w_n) \in S^2_\infty Q(x^0,\, h,\, \mathrm{dir}\, w)$ и, следовательно,

$$\inf_{(w_n)\in S^2_\infty Q(x^0,\, h,\, \mathrm{dir}\, w)} \left(\liminf_{n\to\infty} f'(x^0)w_n\right) + f''(x^0)[h,\, h] > 0.$$

Из этого заключаем, что условие (4) эквивалентно следующей совокупности из двух условий:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x^0)w \geq 0 \text{ для всех } w \in Q''_\infty(x^0,\, h) \\ \text{и} \\ \inf\limits_{(w_n)\in S^2_\infty Q(x^0,\, h,\, \mathrm{dir}\, w)} \left(\liminf\limits_{n\to\infty} f'(x^0)w_n\right) + f''(x^0)[h,\, h] \geq 0 \\ \qquad \text{для всех } w \in Q''_\infty(x^0,\, h) \cap \ker f'(x^0). \end{array}\right\} \tag{4a}$$

В свою очередь, совокупность условий

$$\left.\begin{array}{l} f'(x^0)w \geq 0 \text{ для всех } w \in Q''_\infty(x^0,\, h) \\ \text{и} \\ \inf\limits_{(w_n)\in S^2_\infty Q(x^0,\, h,\, \mathrm{dir}\, w)} \left(\liminf\limits_{n\to\infty} f'(x^0)w_n\right) + f''(x^0)[h,\, h] > 0 \\ \qquad \text{для всех } w \in Q''_\infty(x^0,\, h) \cap \ker f'(x^0). \end{array}\right\} \tag{6a}$$

равносильна условию (6).

Из сделанного замечания получаем в качестве следствий теорем 2 и 3 утверждения, которые ранее независимо от условий (4) и (6) были доказаны в работах [8, 10].

Следствие 1 [8, 10]. *Пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *дважды дифференцируема по Фреше в допустимой точке* $x^0 \in Q$. *Для того чтобы точка* $x^0 \in Q$ *доставляла локальный минимум функции* $f : X \to \mathbb{R}$ *на множестве* $Q \subset X$, *необходимо, чтобы для каждого* $h \in Q'(x^0) \cap \ker f'(x^0)$ *выполнялись условия*

$$f'(x^0)w + f''(x^0)[h, h] \geq 0 \text{ для всех } w \in Q''(x^0, h)$$

и

$$f'(x^0)w \geq 0 \text{ для всех } w \in Q''_{\infty}(x^0, h). \tag{7}$$

Следствие 2 [8, 10]. *Пусть* X *— конечномерное нормированное пространство и пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *дважды дифференцируема по Фреше в точке* $x^0 \in Q \subset X$. *Для того чтобы точка* $x^0 \in Q$ *доставляла локальный минимум функции* $f : X \to \mathbb{R}$ *на множестве* $Q \subset X$, *достаточно, чтобы*

(i)

$$f'(x^0)h \geq 0 \text{ для всех } h \in Q'(x^0);$$

(ii) для каждого $h \in Q'(x^0) \cap \ker f'(x^0)$, $h \neq 0$, *выполнялись условия*

$$f'(x^0)w + f''(x^0)[h, h] > 0 \text{ для всех } w \in Q''(x^0, h)$$

и

$$f'(x^0)w > 0 \text{ для всех } w \in Q''_{\infty}(x^0, h). \tag{8}$$

Так как условие (7) слабее условия (4) (которое, как было показано выше, эквивалентно (4a)), а условие (8) сильнее условия (6) (эквивалентного (6a)), то разрыв между необходимыми условиями локального минимума из следствия 1 и достаточными условиями локального строгого минимума, представленными в следствии 2, больше аналогичного разрыва между соответствующими условиями из теорем 2 и 3. Для того чтобы продемонстрировать это, заметим, что $Q''_{\infty}(x^0, h) = X$ для любой внутренней точки $x^0 \in \operatorname{int} Q$. Кроме того, в таких точках условие (1) принимает вид $f'(x^0) = 0$ и, как следствие этого, условие (7) выполняется тривиально, а условие (8), в противоположность этому, никогда не выполняется. Таким образом, достаточные условия локального минимума, представленные в следствии 2, не выполняются для любой точки локального минимума функции f, лежащей во внутренности множества Q (и не только для таких, а для всех точек $x^0 \in Q$, для которых $f'(x^0) = 0$ и $Q''_{\infty}(x^0, h) \neq \emptyset$). В то же время, непосредственно из формулировок теорем 2 и 3 видно, что для таких точек условия (3) и (4), а также условия (5) и (6) совпадают и, фактически, не зависят о касательных векторов второго порядка, а полностью определяются значениями второй производной целевой функции на касательном конусе первого порядка.

Следствие 3 [11]. *Предположим, что функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *дважды дифференцируема по Фреше в точке* $x^0 \in Q \subset X$.

Если, кроме того, $f'(x^0) = 0$, *то для того чтобы точка* $x^0 \in Q$ *доставляла локальный минимум функции* $f : X \to \mathbb{R}$ *на множестве* $Q \subset X$, *необходимо, чтобы*

$$f''(x^0)[h, h] \geq 0 \text{ для всех } h \in Q'(x^0).$$

Обратно, если нормированное пространство X *конечномерно, то для того чтобы точка* $x^0 \in Q$ *доставляла локальный строгий минимум функции* $f : X \to \mathbb{R}$ *на множестве* $Q \subset X$, *достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$f'(x^0) = 0 \text{ и } f''(x^0)[h, h] > 0 \text{ для всех } h \in Q'(x^0),\ h \neq 0.$$

Условие (4) и аналогичное ему условие (6) несколько нетрадиционны по своей форме. Тем не менее, в конкретных задачах оптимизации проверка этих условий, как показывает представленный ниже пример, вполне осуществима.

П р и м е р. Используя достаточные условия теоремы 3, установим, что нулевая точка $x^0 = (0, 0)$ доставляет локальный строгий минимум функции $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^3$ на множестве $Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 = x_2^3,\, x_1 \geq 0\}$.

Непосредственно устанавливается, что $Q'(0) = \{h = (0, h_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, h_2 \geq 0\}$, $Q''(0, h) = \emptyset$ и $Q''_\infty(0, h) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, w_1 \geq 0\}$. Так как $f'(0)h = h_1$ для всех $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, то $Q'(0) \subset \ker f'(0)$ и, следовательно, условие (1) выполнено. Поскольку $Q''(0, h) = \emptyset$, то условие (5) считается выполненным тривиально. Проверим выполнение условия (6).

Пусть $h = (0, h_2)$ — произвольный ненулевой ($h_2 > 0$) вектор из $Q'(0)$. Выберем $w = (w_1, w_2) \in Q''_\infty(0, h)$, $w \neq 0$, и рассмотрим произвольную последовательность $(w_{1n}, w_{2n}) \in S^2_\infty Q(x^0, h, \operatorname{dir} w)$. По определению семейства $S^2_\infty Q(x^0, h, \operatorname{dir} w)$ существует последовательность $(t_n) \in S(0)$ такая, что $t_n(w_{1n}, w_{2n}) \to 0$ и $x^0 + t_n h + \frac{1}{2} t_n^2 w_n = (\frac{1}{2} t_n^2 w_{1n},\, t_n h_2 + \frac{1}{2} t_n^2 w_{2n}) \in Q$ для всех n. Последнее включение эквивалентно условию $w_{1n} \geq 0$ и равенству $\frac{1}{4} t_n w_{1n}^2 = (h_2 + t_n w_{2n})^3$. Следовательно, $w_{1n} = \dfrac{4(h_2 + t_n w_{2n})^3}{t_n w_{1n}}$, а поскольку $t_n w_{1n} \to 0$ и $t_n w_{2n} \to 0$, то $w_{1n} \to +\infty$.

Учитывая, что $f''(0)[h, h] = 0$ для всех $h \in \mathbb{R}^2$, получаем, что для любой последовательности $(w_n) = (w_{1n}, w_{2n}) \in S^2_\infty Q(x^0, h, \operatorname{dir} w)$ выполняется равенство

$$\liminf_{n\to\infty} f'(x^0) w_n + f''(x^0)[h, h] = \lim_{n\to\infty} w_{1n} = +\infty.$$

Таким образом, условие (6) также выполнено и, следовательно, точка $x^0 = (0, 0)$ доставляет локальный строгий минимум функции $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^3$ на множестве $Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 = x_2^3,\, x_1 \geq 0\}$.

Summary

Gorokhovik V. V.

Second order asymptotically tangent cone to sets and optimality conditions for optimization problems with constraints.

To improve second order local approximations of sets P e n o t J. P. (SIAM J. Control and Optimization. – 1998. – Vol. 37, No. 1. – P. 303 – 318) supplemented second order tangent vectors with second order asymptotically tangent vectors. In this paper we give a new definition of second order asymptotically tangent vectors based on extending a normed space X with “direction points” forming a set called the horizon of X (see Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. Variational analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1998). The application of such extended second order local approximation to the problem of minimizing a smooth function $f : X \to \mathbb{R}$ over an abstract subset $Q \subset X$ enables to prove a new necessary condition for constrained local minimum that is of the form of inequality depending on second order asymptotically tangent vectors to Q. It is especially important that in finite-dimensional settings the collection consisting of (known and new) necessary conditions of first and second order may be coupled with the sufficient conditions for local strict minimum that differs from the necessary ones by replacing inequalities with strict inequalities in second order conditions.

Литература

1. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.

2. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Ленинград: Изд–во Ленинградского университета, 1968. – 180 с.

3. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. Boston: Birkhauser Boston, Inc., 1990. — 461 p.

4. *Rockafellar R. T., Wets R. J.-B.* Variational analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1998. – 733 p.

5. *Bonnans J. F., Cominetti R., Shapiro A.* Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets // SIAM J. Optimization. 1999. vol. 9, No. 2. P. 466–492.

6. *Bonnans J. F., Shapiro A.* Perturbation Analysis of Optimization Problems. Berlin: Springer, 2000. – 601 p.

7. *Гороховик В. В., Рачковский Н. Н.* Условия первого и второго порядка локальной собственной минимальности в задачах векторной оптимизации. Минск: Институт математики АН БССР, 1990. (Препринт № 50(450).) – 27 с.

8. *Penot J. P.* Second order conditions for optimization problems with constraints // SIAM J. Control and Optimization. 1998. Vol. 37, No. 1. P. 303–318.

9. *Гороховик В. В.* Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990. – 239 с.

10. *Cambini A., Martein L., Vlach M.* Second order tangent sets and optimality conditions // Math. Japonica, 1999. Vol. 49, No. 3. P. 451–461.

11. *Измаилов А. Ф., Третьяков А. А.* Фактор-анализ нелинейных отображений // Москва: Наука, 1994. – 336 с.

РЕФЕРАТ

УДК 517.272

Г о р о х о в и к В. В. **Асимптотически касательный конус второго порядка к множествам и условия оптимальности в задачах оптимизации с ограничениями.**// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2006. Вып. 1. С. 31–41.

Следуя Penot J. P. (SIAM J. Control and Optimization. – 1998. – Vol. 37, No. 1. – P. 303 – 318), в работе рассматриваются более широкие (по сравнению с традиционными) локальные аппроксимации второго порядка для множеств, в которых наряду с касательными векторами второго порядка используются также асимптотически касательные векторы второго порядка. В настоящей работе дается новое определение асимптотически касательных векторов второго порядка, основанное на расширении нормированного пространства бесконечно удаленными точками, образующими горизонт (см. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. Variational analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1998). В приложении к задаче минимизации гладкой функции на абстрактном подмножестве нормированного пространства такое расширение локальных аппроксимаций множеств позволяет дополнить известные необходимые условия локального минимума новым необходимым условием второго порядка, которое имеет вид неравенства, зависящего от асимптотически касательных векторов второго порядка. Особенно важно то, что в конечномерных пространствах совокупности (состоящей из известных и новых) необходимых условий локального минимума первого и второго порядка соответствуют достаточные условия строгого локального минимума, которые отличаются от необходимых лишь заменой в условиях второго порядка неравенств строгими неравенствами.

Библиогр. 11 назв.