Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2007. Том 15. № 2. С. 3–14

УДК 517.2

ОБЩИЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Е. В. Гирейко, В. В. Гороховик

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: gorokh@im.bas-net.by
Поступила 03.09.2007

Введение. Основным объектом исследования в настоящей работе является упорядоченное множество, под которым понимается пара $(X, \prec)$, состоящая из абстрактного множества X и заданного на нем асимметричного и транзитивного бинарного отношения $\prec$. Основная цель проводимых исследований — получить условия, обеспечивающие непустоту подмножества максимальных элементов упорядоченного множества. Поскольку, вообще говоря, не предполагается, что какие-либо другие структуры (алгебраические, топологические и т.п.) заданы на множестве X, то подобные условия могут быть получены только на основе наиболее фундаментальных принципов теории множеств. В работе предлагается использовать при выводе условий существования максимальных элементов в качестве исходного принцип, который мы называем принципом существования восходящей вполне упорядоченной цепи. По-видимому, впервые этот принцип был сформулирован в явном виде А.В. Архангельским в монографии [1]. Там же была доказана его логическая эквивалентность аксиоме выбора и другим равносильным ей принципам теории множества, в частности принципу Цермело о вполне упорядочиваемости множеств, принципу Хаусдорфа и др. В работе демонстрируется, что принцип существования восходящей вполне упорядоченной цепи является весьма удобным и прозрачным средством вывода и обоснования условий существования максимальных элементов упорядоченных множеств. В частности, на основе этого принципа мы устанавливаем критерий существования максимальных элементов и критерий конфинальности (или, по-другому, доминируемости) множества максимальных элементов. Отметим, что лемма Куратовского–Цорна, которая также относится к наиболее фундаментальным принципам теории множеств, является следствием доказанных критериев. Как известно, лемма Куратовского–Цорна дает лишь достаточное условие существования и конфинальности множества максимальных элементов. В работе приводится пример, который показывает, что лемма Куратовского–Цорна не может быть обращена.

Поскольку упорядоченные множества рассматриваются в различных разделах математики [1–6] и ее приложений, в частности, в математической экономике [7], теории принятия решений [8], теории векторной оптимизации [9–16] и др., то существуют расхождения в используемых терминах и обозначениях. В связи с этим первый раздел данной статьи посвящен, фактически, введению обозначений и терминов, которые будут использоваться в дальнейшем как в настоящей, так и последующих работах.

1. Основные понятия и термины. Пусть X — произвольное множество, $\prec$ — асимметричное бинарное отношение на X (т.е. $\prec$ есть подмножество декартова квадрата $X \times X$, удовлетворяющее следующему свойству: если $(x, y) \in \prec$, то $(y, x) \notin \prec$). В контексте бинарных отношений условие $(x, y) \in \prec$ принято записывать как $x \prec y$, а $(y, x) \notin \prec$ как $y \not\prec x$.

Каждое асимметричное бинарное отношение $\prec\subset X\times X$ порождает на X еще два отношения — отношение безразличия $\asymp$ и отношение равноценности $\sim$.

Отношением безразличия, сопровождающим асимметричное бинарное отношение $\prec$, называют бинарное отношение $\asymp$, определенное на X тождеством

$$x\asymp y \Longleftrightarrow x\not\prec y,\ y\not\prec x.$$

Отношением равноценности, сопровождающим асимметричное бинарное отношение $\prec$, называют бинарное отношение $\sim$, которое задается на X следующим образом:

$$x\sim y \Longleftrightarrow \{z\in X|\ x\asymp z\}=\{z\in X|\ y\asymp z\}.$$

Отметим, что отношение равноценности определяется не непосредственно по асимметричному отношению $\prec$, а по производному от него отношению безразличия $\asymp$.

Из асимметричности отношения $\prec$ следует, что отношение безразличия $\asymp$ является рефлексивным и симметричным, а отношение равноценности $\sim$ — рефлексивным, симметричным и транзитивным (т.е. отношением эквивалентности), причем $\sim\subset\asymp$. В общем случае включение $\sim\subset\asymp$ является собственным. Равенство $\sim=\asymp$ имеет место в том и только том случае, когда отношение безразличия $\asymp$ является транзитивным.

Класс асимметричных бинарных отношений $\prec$, удовлетворяющих равенству $\sim=\asymp$, может быть также охарактеризован следующим образом: *для того чтобы отношения $\sim$ и $\asymp$, сопровождающие асимметричное бинарное отношение $\prec$, удовлетворяли равенству $\sim=\asymp$, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\prec$ было отрицательно транзитивным,* т.е. чтобы отношение $\not\prec=(X\times X)\setminus\prec$ было транзитивно.

Асимметричное бинарное отношение $\prec$ будем называть *отношением строгого предпорядка,* если оно является транзитивным, т.е. если для любых $x,y,z\in X$ из соотношений $x\prec y$, $y\prec z$ следует $x\prec z$.

Для отношений строгого предпорядка $\prec$, сопровождающее их отношение равноценности $\sim$, может быть определено непосредственно через $\prec$, используя тождество

$$x\sim y\ \Longleftrightarrow \prec(x)=\prec(y),\quad \prec^{-1}(x)=\prec^{-1}(y).$$

Здесь $\prec(u):=\{v\in X|\ u\prec v\}$, $\prec^{-1}(u):=\{v\in X|\ v\prec u\}$ для любых $u\in X$.

Нетрудно убедиться в том, что для отношения строгого предпорядка $\prec$ и сопровождающего его отношения равноценности $\sim$ справедливы включения

$$\prec\circ\sim\subset\prec \quad \text{и} \quad \sim\circ\prec\subset\prec, \tag{1}$$

где символ $\prec\circ\sim$ обозначает композицию отношений $\sim$ и $\prec$. По определению композиции $(x,y)\in\prec\circ\sim$ тогда и только тогда, когда существует $z\in X$ такой, что $(x,z)\in\sim$, а $(z,y)\in\prec$. Аналогично, $(x,y)\in\sim\circ\prec$ тогда и только тогда, когда существует $z\in X$ такой, что $(x,z)\in\prec$, а $(z,y)\in\sim$.

Из включений (1) и транзитивности отношений $\prec$ и $\sim$ следует, что объединение отношений $\prec$ и $\sim$, которое далее будем обозначать символом $\precsim$, является транзитивным бинарным отношением на X. Очевидно, что в силу рефлексивности отношения $\sim$, отношение $\precsim:=\prec\cup\sim$ также является рефлексивным.

Рефлексивные и транзитивные бинарные отношения принято называть *отношениями предпорядка* (или *отношениями квазипорядка*).

Таким образом, каждое отношение строгого предпорядка $\prec$, определенное на множестве X, однозначно порождает на X отношение предпорядка $\precsim$, асимметричная часть которого есть $\prec$, а симметричная совпадает с отношением равноценности $\sim$, сопровождающим $\prec$.

Отметим, что на X существует не единственное отношение предпорядка, асимметричная часть которого совпадает с $\prec$. Различные отношения предпорядка из этого семейства отличаются друг от друга симметричной частью, при этом введенное выше отношение предпорядка $\precsim$ является наибольшим по включению (равносильно $\precsim$ имеет наибольшую по включению симметричную часть) в этом семействе, а отношение $\prec \cup E$, где $E := \{(x,x) \in X \times X | \ x \in X\}$ — отношение равенства на X, является наименьшим по включению.

Отношениями строгого порядка на X будем называть такие отношения строгого предпорядка $\prec \subset X \times X$, которые удовлетворяют равенству $\sim = \asymp$.

Можно показать, что отношениями строгого порядка являются асимметричные и отрицательно транзитивные бинарные отношения и только они. Нетрудно также убедиться в том, что отношение строгого предпорядка $\prec$ является отношением строгого порядка на X тогда и только тогда, когда сопровождающее его отношение предпорядка $\precsim$ является полным на X, т.е. когда для любых $x, y \in X$ выполняется хотя бы одно из двух соотношений $x \precsim y$ и $y \precsim x$. Полные отношения предпорядка будем называть также *отношениями порядка.* Тогда, если $\prec$ — отношение строгого порядка на X, то сопровождающее его отношение предпорядка $\precsim$ есть отношение порядка. *Отношением строгого совершенного порядка* на X будем называть такое отношение строгого предпорядка $\prec \subset X \times X$, которое удовлетворяет условию: для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, либо $x \prec y$, либо $y \prec x$. Очевидно, что если $\prec$ — отношение строгого совершенного порядка на X, то сопровождающие его отношение безразличия $\asymp$ и отношение равноценности $\sim$ совпадают (следовательно, $\prec$ есть отношение строгого порядка) и равны отношению равенства $E := \{(x,x) \in X \times X | \, x \in X\}$. Если $\prec$ — отношение строгого совершенного порядка, то сопровождающее его отношение предпорядка (точнее, отношение порядка) $\precsim$ называется отношением *совершенного порядка.*

Отношения строгого предпорядка и отношения предпорядка, т.е. транзитивные бинарные отношения, которые либо рефлексивны, либо иррефлексивны, принято называть *отношениями упорядочения.* Множество вместе с заданным на нем отношением упорядочения называют *упорядоченным множеством.*

В настоящей работе под упорядоченным множеством будем всегда понимать множество X с заданным на нем отношением строгого предпорядка $\prec$. В тех случаях, когда необходимо указать отношение строгого предпорядка $\prec$, которым упорядочено множество X, будем обозначать упорядоченное множество в виде пары $(X, \prec)$. Любое подмножество Q упорядоченного множества $(X, \prec)$ будем также рассматривать как множество, упорядоченное сужением $\prec$ на Q, при этом для обозначения сужения $\prec$ на Q будем использовать, не оговаривая это каждый раз специально, то же обозначение $\prec$. Рассматривая в качестве исходных отношений на упорядоченных множествах отношения строгого предпорядка $\prec$, а не отношения предпорядка, мы, фактически, выбираем тем самым из всех отношений предпорядка только такие, симметричная часть которых при фиксированной асимметричной части является наибольшей по включению или, по другому, симметричная часть которых совпадает с отношением равноценности, сопровождающим асимметричную часть.

Поскольку каждое отношение строгого предпорядка $\prec \subset X \times X$ однозначно порождает на X отношение равноценности $\sim$ и отношение предпорядка $\precsim := \prec \cup \sim$, то для сравнения элементов упорядоченного множества X будем использовать не только исходное отношение строгого предпорядка, но и производные от него отношения $\sim$ и $\precsim$.

Будем говорить, что элементы x и y упорядоченного множества $(X, \prec)$ являются *сравнимыми,* если для них выполнено по крайней мере одно из соотношений $x \precsim y$ и $y \precsim x$ или, что равносильно, если для x и y выполнено одно из следующих трех соотношений: $x \prec y$, $x \sim y$, $y \prec x$. В противном случае элементы x и y называются *несравнимыми.*

Если для элементов x и y выполнено условие $x \prec y$, то будем говорить, что элемент x *менее предпочтителен,* чем элемент y, или что элемент y *более предпочтителен*, чем элемент x; если же $x \sim y$, то будем говорить, что элементы x и y *равноценны.*

Упорядоченное множество $(X, \prec)$ будем называть *совершенно упорядоченным* или *цепью,* если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, либо $x \prec y$, либо $y \prec x$, т.е. если отношение строгого предпорядка $\prec$, определенное на X, является отношением строгого совершенного порядка.

Совершенно упорядоченные множества часто называют (см., например, [1–6]) *линейно упорядоченными множествами.* Мы предпочитаем использовать термины строгий совершенный порядок и совершенный порядок, поскольку в тех случаях, когда рассматриваемое отношение задано на векторном пространстве, они позволяют избежать необоснованных ассоциаций с тем, что отношение согласовано каким-то образом с линейной (векторной) структурой пространства.

2. Верхние грани, наибольшие и максимальные элементы подмножеств упорядоченного множества. Пусть $(X, \prec)$ — упорядоченное множество, а Q — подмножество из X.

Элемент $y \in X$ называется *верхней (нижней) гранью* подмножества Q в упорядоченном множестве $(X, \prec)$, если $x \precsim y$ $(y \precsim x)$ для всех $x \in Q$. Если в X существует верхняя (нижняя) грань подмножества Q, то будем говорить, что Q *ограничено сверху (снизу)* в упорядоченном множестве X. Особо подчеркнем, что верхняя (нижняя) грань подмножества Q в $(X, \prec)$ может не принадлежать самому множеству Q.

Элемент $x^0 \in Q$ называется *наибольшим* (*наименьшим*) элементом подмножества Q, если $x \precsim x^0$ $(x^0 \precsim x)$ для всех $x \in Q$. Таким образом, наибольший (наименьший) элемент подмножества Q есть верхняя (нижняя) грань Q в упорядоченном множестве $(X, \prec)$, принадлежащая Q.

Пусть Q — такое подмножество упорядоченного множества $(X, \prec)$, множество верхних граней которого $\precsim (Q) := \{y \in X | \ x \precsim y \ \ \forall x \in Q\}$ непусто. Если в $\precsim (Q)$ существует наименьший элемент, то он называется *точной верхней гранью* подмножества Q в упорядоченном множестве $(X, \prec)$. Подобным образом, если множество нижних граней $\precsim^{-1} (Q) := \{y \in X| \ y \precsim x \ \ \forall x \in Q\}$ непусто и в $\precsim^{-1} (Q)$ существует наибольший элемент, то он называется *точной нижней гранью* подмножества Q в упорядоченном множестве $(X, \prec)$. Множество всех точных верхних (нижних) граней подмножества Q в упорядоченном множестве $(X, \prec)$ будем обозначать символом $\mathrm{Sup}_X(Q| \prec)$ $(\mathrm{Inf}_X(Q| \prec))$.

Нетрудно убедиться в том, что если $\mathrm{Sup}_X(Q| \prec) \neq \emptyset$ $(\mathrm{Inf}_X(Q| \prec) \neq \emptyset)$, то $\mathrm{Sup}_X(Q| \prec)$ $(\mathrm{Inf}_X(Q| \prec))$ совпадает с одним из классов эквивалентности множества X по отношению равноценности $\sim$. Таким образом, если отношение равноценности $\sim$ совпадает с отношением равенства E, то $\mathrm{Sup}_X(Q| \prec)$ $(\mathrm{Inf}_X(Q| \prec))$ содержит не более одного элемента для любого подмножества $Q \subset X$. Если же $\sim \neq E$ и $\mathrm{Sup}_X(Q| \prec) \neq \emptyset$ $(\mathrm{Inf}_X(Q| \prec) \neq \emptyset)$, то, вообще говоря, могут существовать различные точные верхние грани подмножества Q из $(X, \prec)$.

Точные верхние и точные нижние грани подмножества Q в упорядоченном множестве $(X, \prec)$, также как любые верхние и нижние грани, являются элементами множества X (на это указывает нижний индекс X в обозначениях $\mathrm{Sup}_X(Q| \prec)$ и $\mathrm{Inf}_X(Q| \prec)$) и могут не принадлежать самому подмножеству Q. Те же точные верхние и точные нижние грани, которые принадлежат Q, т.е. пересечения $Q \cap \mathrm{Sup}_X(Q| \prec)$ и $Q \cap \mathrm{Inf}_X(Q| \prec)$ есть в точности множество наибольших и множество наименьших элементов подмножества Q. Нетрудно также видеть, что

$$Q \cap \mathrm{Sup}_X(Q| \prec) = \mathrm{Sup}_Q(Q| \prec) \quad \text{и} \quad Q \cap \mathrm{Inf}_X(Q| \prec) = \mathrm{Inf}_Q(Q| \prec), \tag{2}$$

где $\mathrm{Sup}_Q(Q| \prec)$ и $\mathrm{Inf}_Q(Q| \prec)$ — множества точных верхних и точных нижних граней подмножества Q в упорядоченном множестве $(Q, \prec)$.

Равенства (2) дают основание для обозначения множеств наибольших и наименьших элементов подмножества Q символами $\mathrm{Sup}_Q(Q| \prec)$ и $\mathrm{Inf}_Q(Q| \prec)$ соответственно.

Наряду с понятиями наибольших и наименьших элементов подмножества Q рассматриваются понятия максимальных и минимальных элементов Q.

Элемент $x^0 \in Q$ называется *максимальным* (*минимальным*) элементом подмножества Q, если не существует $x \in Q$ такого, что $x^0 \prec x$ $(x \prec x^0)$. Символом $\mathrm{Max}(Q| \prec)$ $(\mathrm{Min}(Q| \prec))$ будем обозначать множество всех максимальных (минимальных) элементов подмножества Q.

Если сужение отношения строгого предпорядка $\prec$ на Q является отношением строгого порядка (в частности, если исходное отношение $\prec$ является отношением строгого порядка на X), то понятия наибольшего и максимального элемента множества Q совпадают. Однако для произвольных отношений строгого предпорядка понятие максимального элемента является более общим. Остановимся на этом чуть подробнее.

Непосредственно из определений следует, что каждый наибольший (наименьший) элемент подмножества Q является максимальным (минимальным) элементом подмножества Q. Более того, если множество наибольших (наименьших) элементов подмножества Q непусто, то каждый максимальный (минимальный) элемент подмножества Q является, на самом деле, наибольшим (наименьшим) элементом подмножества Q, т.е. если $\mathrm{Sup}_Q(Q| \prec) \neq \emptyset$ $(\mathrm{Inf}_Q(Q| \prec) \neq \emptyset)$, то $\mathrm{Max}(Q| \prec) = \mathrm{Sup}_Q(Q| \prec)$ ($\mathrm{Min}(Q| \prec) = \mathrm{Inf}_Q(Q| \prec)$). Вместе с тем, множество максимальных (минимальных) элементов подмножества Q может быть непустым и в тех случаях, когда наибольших (наименьших) элементов подмножества Q не существует, при этом среди максимальных (минимальных) элементов подмножества Q могут быть несравнимые. Если же $\sim = E$, то любые различные максимальные (минимальные) элементы подмножества Q являются несравнимыми. (Наибольшие и наименьшие элементы иногда называют [14], соответственно, идеально максимальными и идеально минимальными элементами упорядоченного множества.)

Покажем, что класс упорядоченных множеств, для которых понятия наибольшего и максимального элементов совпадают, не ограничивается множествами, упорядоченными отношениями строгого порядка.

Подмножество Q упорядоченного множества $(X, \prec)$ называется *направленным вверх,* если для любых $x, y \in Q$ существует $z \in Q$ такой, что $x \precsim z$ и $y \precsim z$.

Например, пусть $X = \mathbb{R}^2$ и пусть отношение строгого предпорядка на X определяется следующим образом:

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq y_1, \ x_2 \leq y_2 \quad \text{и} \quad (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2).$$

Подмножества

$$Q_1 := \{(x_1, x_2)| \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0\},$$

$$Q_2 := \{(x_1, x_2)| \ |x_1| \leq 1, \ |x_2| \leq 1\},$$

$$Q_3 := \{(x_1, x_2)| \ x_1 \leq 1, \ x_2 \geq 0, \ x_2 - x_1 \geq 1\}$$

являются направленными вверх, при этом сужение $\prec$ на каждое из этих множеств не является отношением строгого порядка.

Предложение 1. *Если Q — направленное вверх подмножество упорядоченного множества $(X, \prec)$, то любой максимальный элемент подмножества Q является наибольшим элементом Q.*

Доказательство. Пусть $m \in \mathrm{Max}(Q| \prec)$. Так как Q является направленным вверх, то для любого $x \in Q$ существует $z \in Q$ такой, что $x \precsim z$ и $m \precsim z$. Вследствие максимальности элемента m из соотношения $m \precsim z$ получаем, что $m \sim z$, а тогда из $x \precsim z$ следует, что $x \precsim m$. Значит, $x \precsim m$ для всех $x \in Q$. Предложение доказано.

Следствие. *Если Q — направленное вверх подмножество упорядоченного множества $(X, \prec)$, то любые максимальные элементы множества Q равноценны друг другу.*

В заключение этого раздела обратим внимание на то, что в отличие от верхних и нижних граней максимальные и минимальные элементы подмножества Q упорядоченного множества $(X, \prec)$ принадлежат самому множеству Q. Более того, в определении максимальных и минимальных элементов подмножества Q участвуют только элементы из Q и, следовательно, только сужение отношения $\prec$ на Q. Поэтому $\mathrm{Max}(Q| \prec)$ и $\mathrm{Min}(Q| \prec)$ не зависят от того, рассматриваем ли мы Q как подмножество более широкого упорядоченного множества $(X, \prec)$, или же просто как упорядоченное множество $(Q, \prec)$. Это обстоятельство позволяет нам говорить о наибольших и максимальных элементах упорядоченных множеств, несмотря на то, что они могут являться подмножествами более широкого упорядоченного множества.

3. Конфинальные и восходящие подмножества упорядоченного множества. Обобщением понятий наибольших и максимальных элементов упорядоченного множества $(X, \prec)$ являются, соответственно, понятия конфинальных и восходящих подмножеств из $(X, \prec)$.

Говорят, что подмножество Q упорядоченного множества $(X, \prec)$ является *конфинальным* X, если для любого $x \in X$ существует элемент $y \in Q$ такой, что $x \precsim y$.

Нетрудно убедиться, что одноэлементное подмножество $Q = \{y\} \subset X$ является конфинальным X в том и только том случае, когда y есть наибольший элемент X. Вместе с тем, в X могут не существовать наибольшие элементы, тогда как конфинальные подмножества существуют всегда (например, несобственное подмножество $Q = X$). Рассмотрим не столь тривиальный пример конфинального подмножества.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ и пусть отношение строгого предпорядка $\prec$ на X определено следующим образом:

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Longleftrightarrow x_1 < y_1,\ x_2 < y_2.$$

Очевидно, что в X нет ни наибольших, ни максимальных элементов. В то же время подмножество $Q := \{(n, n) \in \mathbb{R}^2 |\ n \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел) является конфинальным X.

В приведенном выше примере множество $(X, \prec)$ не является цепью, тогда как конфинальное ему подмножество Q — цепь.

Зададимся вопросом, а во всяком ли упорядоченном множестве существуют конфинальные цепи? Как показывает следующий пример [1, с. 23], ответ на данный вопрос является отрицательным.

Пример 2. Пусть X есть множество всех отображений множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в себя. Отношение строгого предпорядка $\prec$ на X определим следующим образом:

$$x_1 \prec x_2 \Longleftrightarrow x_1(n) < x_2(n) \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Убедимся, что каждое подмножество $Z \subset X$, которое является цепью, не более чем счетно. Действительно, каждую функцию $x \in Z$ занумеруем натуральным числом $x(1)$. В результате получим взаимнооднозначное отображение цепи Z на некоторое подмножество множества натуральных чисел. Следовательно, цепь Z не более чем счетна.

Покажем, что никакая цепь Z из X не может быть конфинальна X. Пусть $Z = \{x_n \in X |\ n \in \mathbb{N}\}$ — цепь в X. Определим функцию $y \in X$, положив $y(n) = x_n(n) + 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $y \not\precsim x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то цепь Z не является конфинальной X. Таким образом, в X не существует конфинальной цепи.

Подмножество $Q \subset X$ назовем *восходящим к вершине* (далее просто *восходящим*) подмножеством упорядоченного множества $(X, \prec)$, если в X не существует такого элемента $x \in X$, что $q \prec x$ для всех $q \in Q$.

Одноэлементное подмножество $Q := \{q\} \subset X$ является восходящим подмножеством в $(X, \prec)$ в том и только том случае, когда элемент $q \in X$ является максимальным в X. Таким образом, понятие восходящего подмножества упорядоченного множества обобщает понятие максимального элемента.

Для упорядоченных множеств $(X, \prec)$, на которых упорядочение задается отношением строгого порядка $\prec$, понятия конфинального и восходящего подмножества совпадают. В общем случае связь между конфинальными и восходящими подмножествами аналогична связи между наибольшими и максимальными элементами. Любое конфинальное подмножество упорядоченного множества $(X, \prec)$ является в то же время и восходящим подмножеством в $(X, \prec)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, предположим, что в упорядоченном множестве $(X, \prec)$ нет наибольших элементов, а множество $\mathrm{Max}(X| \prec)$ не пусто и содержит несравнимые по отношению строгого предпорядка $\prec$ элементы q и p. Тогда каждое из одноэлементных подмножеств $Q := \{q\}$ и $P := \{p\}$ является восходящим в X, но не является конфинальным X.

Приведем еще один пример для случая, когда $\mathrm{Max}(X| \prec) = \emptyset$. Пусть

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1^2 + x_2^2 < 2\}$$

и пусть

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Longleftrightarrow x_1 < y_1,\ x_2 < y_2.$$

Подмножество $Q := \left\{ \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right) \in \mathbb{R}^2 |\ n \in \mathbb{N} \right\} \subset X$ является восходящим в X, но не является конфинальным X.

Для формулировки основной теоремы настоящего раздела нам понадобится понятие *вполне упорядоченного множества,* под которым понимается такое совершенно упорядоченное множество, каждое непустое подмножество которого имеет наименьший (первый) элемент.

Поскольку любое множество также является подмножеством самого себя, то любое вполне упорядоченное множество имеет первый элемент. Кроме того, непосредственно из определения следует также, что любое подмножество вполне упорядоченного множества само является вполне упорядоченным множеством. Все конечные совершенно упорядоченные множества (включая одноэлементные) являются вполне упорядоченными. Однако не всякое совершенно упорядоченное множество, даже если оно имеет первый элемент, является вполне упорядоченным. Например, множество рациональных чисел не меньших нуля и не больших единицы с естественным отношением упорядочения является совершенно упорядоченным и имеет наименьший элемент, но не является вполне упорядоченным. Множество натуральных чисел (с естественным упорядочением) является простейшим примером бесконечного вполне упорядоченного множества.

Теорема 1 (принцип существования восходящей вполне упорядоченной цепи) [1]. *В любом упорядоченном множестве $(X, \prec)$ существуют восходящие вполне упорядоченные цепи.*

По-видимому, впервые данный принцип был сформулирован в явном виде и обоснован А.В. Архангельским в монографии [1], поэтому в дальнейшем мы будем ссылаться на него как на *принцип Архангельского.* Его доказательство, основанное на аксиоме выбора [1–3], может быть найдено в [1]. Кроме того, в [1] показано, что аксиома выбора также может быть выведена из принципа существования восходящей вполне упорядоченной цепи и, следовательно, оба эти утверждения являются логически эквивалентными. Таким образом, принцип Архангельского является, по существу, одним из базовых принципов теории множеств.

Отметим, что в частном случае, когда множество упорядочено отношением строгого порядка, заданным функцией полезности, принцип Архангельского хорошо известен как утверждение о существовании последовательности, максимизирующей функцию полезности. Эта аналогия важна для нас, поскольку основная наша цель состоит в том, чтобы, опираясь на принцип Архангельского, получить условия существования максимальных элементов для произвольных упорядоченных множеств.

В работе Л. Гаека и Д. Загродного [10], а также работах ряда других авторов (см., например, обзорную статью [15] и монографию [16]), при выводе условий существования максимальных элементов в качестве базового используется следующее утверждение, которое мы назовем леммой Гаека–Загродного.

Лемма Гаека–Загродного [10]. *Для любого транзитивного бинарного отношения G, определенного на множестве X, асимметричная часть которого $P_G = G \setminus G^{-1}$ является непустой, в X существует непустое вполне упорядоченное подмножество $W \subset X$, удовлетворяющее условию*

$$\forall\, x \in X \setminus W \quad \exists\, w \in W \quad \textit{такое, что} \quad (x, w) \in G \quad \textit{или} \quad (w, x) \notin G. \tag{3}$$

Теорема 2. *Лемма Гаека–Загродного эквивалентна принципу существования восходящей вполне упорядоченной цепи.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $x \in W$, то для $w = x$ справедливо $(x, w) \in G$ или $(w, x) \notin G$. Следовательно, условие (3) эквивалентно условию

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, w \in W \quad \text{такое, что} \quad (x, w) \in G \quad \text{или} \quad (w, x) \notin G. \tag{4}$$

Введем отношения $I_G = (X \times X) \setminus (G \cup G^{-1})$ и $P_G = G \setminus G^{-1}$. Легко видеть, что отношение I_G является симметричным, а отношение P_G — асимметричным и транзитивным. Нетрудно также убедиться в справедливости равенств

$$X \times X = G \cup I_G \cup P_G^{-1}, \quad G \cap I_G = \emptyset, \quad G \cap P_G^{-1} = \emptyset, \quad I_G \cap P_G^{-1} = \emptyset, \tag{5}$$

из которых следует, что

$$(w, x) \notin G \Longleftrightarrow (w, x) \in I_G \cup P_G^{-1}. \tag{6}$$

Если $(w, x) \in I_G$, то в силу симметричности I_G получаем, что $(x, w) \in I_G$. Поскольку, кроме того, $(w, x) \in P_G^{-1} \Longleftrightarrow (x, w) \in P_G$, то из (6) следует, что

$$(w, x) \notin G \Longleftrightarrow (x, w) \in I_G \cup P_G. \tag{7}$$

Таким образом, условие (4), а значит, и условие (3) эквивалентны условию

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, w \in W \quad \text{такое, что} \quad (x, w) \in G \quad \text{или} \quad (x, w) \in I_G \cup P_G,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно условию

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, w \in W \quad \text{такое, что} \quad (x, w) \in G \cup I_G. \tag{8}$$

Учитывая равенства (5), получаем, что (8), а значит, и (3) эквивалентны условию

$$\nexists\, x \in X \quad \text{такого, что} \quad (w, x) \in P_G \quad \forall\, w \in W. \tag{9}$$

Условие (9) равносильно тому, что вполне упорядоченное подмножество W является восходящим в упорядоченном множестве (X, P_G). Теорема доказана.

Выше отмечалось, что принцип существования восходящей вполне упорядоченной цепи логически эквивалентен аксиоме выбора. Из предложения 2 следует, что и лемма Гаека–Загродного также эквивалентна аксиоме выбора. В то же время в оригинальной работе [10] лемма Гаека–Загродного выводится из леммы Куратовского–Цорна. Ниже мы покажем, что лемма Куратовского–Цорна также может быть получена как следствие принципа существования восходящей вполне упорядоченной цепи и, значит, все три утверждения являются, на самом деле, логически эквивалентными.

Замечание. Не останавливаясь подробно, заметим, что наряду с понятиями конфинальных и восходящих подмножеств могут быть введены дуальные им понятия коинициальных и нисходящих (нисходящих до дна) подмножеств упорядоченного множества $(X, \prec)$. Отметим также, что в [1] А.В. Архангельский называет восходящие множества *сквозными.* На наш взгляд, термин сквозное множество содержательно больше соответствует множествам, которые являются одновременно как восходящими, так и нисходящими. По этой причине мы решили несколько изменить терминологию, которая была введена в [1].

4. Теоремы существования максимальных элементов в упорядоченном множестве. Настоящий раздел посвящен выводу условий существования максимальных элементов в упорядоченных множествах. Важную роль в этих условиях будут играть ограниченные сверху восходящие подмножества упорядоченных множеств, поэтому, прежде всего, изучим некоторые свойства таких подмножеств.

Предложение 2. *Все верхние грани ограниченного сверху восходящего подмножества Q упорядоченного множества $(X, \prec)$ равноценны между собой, причем в Q существуют наибольшие элементы, т.е.* $\mathrm{Sup}_Q(Q|\prec) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть Q — ограниченное сверху восходящее подмножество из $(X, \prec)$ и пусть $\hat{x} \in X$ — его верхняя грань. Так как подмножество Q является восходящим, то в Q существует элемент $x^0 \in Q$, равноценный $\hat{x}$. Действительно, предположив противное, придем к противоречию с тем, что подмножество Q является восходящим. Из $x^0 \sim \hat{x}$ следует, что x^0 также является верхней гранью Q, а поскольку $x^0 \in Q$, то x^0 — наибольший элемент в Q. Таким образом, все верхние грани подмножества Q равноценны наибольшим элементам Q и, следовательно, равноценны между собой. Предложение доказано.

Предложение 3. *Наибольшие элементы ограниченных сверху восходящих подмножеств упорядоченного множества $(X, \prec)$ и только они являются максимальными элементами в $(X, \prec)$, т.е.*

$$\mathrm{Max}(X|\prec) = \bigcup_{Q \in \mathcal{B}^{\uparrow}(X,\prec)} \mathrm{Sup}_Q(Q|\prec),$$

где $\mathcal{B}^{\uparrow}(X, \prec)$ — семейство всех ограниченных сверху восходящих подмножеств из $(X, \prec)$.

Доказательство. Пусть $x^0 \in X$ — наибольший элемент ограниченного сверху восходящего подмножества Q из $(X, \prec)$. Покажем, что $x^0 \in \mathrm{Max}(X|\prec)$. Предположим противное. Тогда существует элемент $x \in X$ такой, что $x^0 \prec x$. Поскольку $q \precsim x^0$ для всех $q \in Q$, то в силу транзитивности $\prec$ и включения $\prec \circ \sim \subset \prec$ получаем, что $q \prec x$ для всех $q \in Q$. Это, однако, противоречит тому, что множество Q является восходящим в $(X, \prec)$.

Обратно, пусть $x^0 \in \mathrm{Max}(X|\prec)$. Тогда подмножество $\precsim^{-1}(x^0) = \{x \in Q | x \precsim x^0\}$ является восходящим в $(X, \prec)$, причем x^0 является наибольшим элементом в $\precsim^{-1}(x^0)$. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть Q — ограниченное сверху восходящее подмножество из $(X, \prec)$, C — восходящее подмножество из $(Q, \prec)$. Тогда C является ограниченным сверху восходящим подмножеством в $(X, \prec)$, причем $\mathrm{Sup}_C(C|\prec) \neq \emptyset$ и $\mathrm{Sup}_C(C|\prec) \subset \mathrm{Sup}_Q(Q|\prec)$.*

Доказательство. В силу предложения 2 в $(Q, \prec)$ существуют наибольшие элементы, поэтому C является ограниченным сверху в $(Q, \prec)$ и, следовательно, C ограничено сверху и в $(X, \prec)$. Кроме того, поскольку C является восходящим в $(Q, \prec)$, то снова применяя предложение 2 заключаем, что в $(C, \prec)$ также существуют наибольшие элементы. По предложению 3 каждый наибольший элемент из $(C, \prec)$ является максимальным в $(Q, \prec)$, а поскольку в $(Q, \prec)$ существуют наибольшие элементы, то $\mathrm{Max}(Q|\prec) = \mathrm{Sup}_Q(Q|\prec)$ и, следовательно, каждый наибольший элемент из $(C, \prec)$ является наибольшим и в $(Q, \prec)$. Так как подмножество Q является восходящим в $(X, \prec)$, то из включения $\emptyset \neq \mathrm{Sup}_C(C|\prec) \subset \mathrm{Sup}_Q(Q|\prec)$ следует, что C также является восходящим в $(X, \prec)$. Предложение доказано.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Множество максимальных элементов упорядоченного множества $(X,\prec)$ *не пусто;*

(ii) Семейство ограниченных сверху восходящих подмножеств упорядоченного множества $(X,\prec)$ *не пусто, при этом наибольшие элементы направленных вверх подмножеств этого семейства и только они являются максимальными элементами в* $(X,\prec)$;

(iii) Семейство ограниченных сверху восходящих направленных вверх подмножеств упорядоченного множества $(X,\prec)$ *не пусто, при этом наибольшие элементы подмножеств этого семейства и только они являются максимальными элементами в* $(X,\prec)$;

(iv) Семейство ограниченных сверху восходящих цепей упорядоченного множества $(X,\prec)$ *не пусто, при этом наибольшие элементы цепей этого семейства и только они являются максимальными элементами в* $(X,\prec)$;

(v) Семейство ограниченных сверху восходящих вполне упорядоченных цепей упорядоченного множества $(X,\prec)$ *не пусто, при этом наибольшие элементы вполне упорядоченных цепей этого семейства и только они являются максимальными элементами в* $(X,\prec)$.

Доказательство. Эквивалентность $(i) \iff (ii)$ следует из предложений 2 и 3.

Поскольку любое ограниченное сверху восходящее подмножество из $(X,\prec)$, как подмножество, в котором существуют наибольшие элементы, является направленным вверх, то семейства восходящих подмножеств, о которых идет речь в утверждениях (ii) и (iii), фактически совпадают. Отсюда следует эквивалентность $(ii) \iff (iii)$.

Докажем импликацию $(ii) \Longrightarrow (v)$. Рассмотрим произвольное ограниченное сверху восходящее подмножество Q из $(X,\prec)$. В силу принципа Архангельского в $(Q,\prec)$ существует восходящая вполне упорядоченная цепь C, которая согласно предложению 3 является восходящей в $(X,\prec)$. Более того, C ограничено сверху в $(X,\prec)$, поскольку является подмножеством ограниченного сверху множества Q. Таким образом, если семейство $\mathcal{B}^{\uparrow}(X,\prec)$ ограниченных сверху восходящих подмножеств упорядоченного множества $(X,\prec)$ не пусто, то не пусто и семейство $\mathcal{W}^{\uparrow}(X,\prec)$ ограниченных сверху вполне упорядоченных цепей из $(X,\prec)$. Так как $\mathcal{W}^{\uparrow}(X,\prec) \subset \mathcal{B}^{\uparrow}(X,\prec)$, то из предложения 3 следует включение

$$\bigcup_{C\in\mathcal{W}^{\uparrow}(X,\prec)} \mathrm{Sup}_C(C|\prec) \subset \mathrm{Max}(X|\prec).$$

Для доказательства обратного включения заметим, что если $x^0 \in \mathrm{Max}(X|\prec)$, то одноэлементное подмножество $C=\{x^0\}$ является ограниченной сверху восходящей вполне упорядоченной цепью в $(X,\prec)$, для которой x^0 является наибольшим элементом. Итак, импликация $(ii) \Longrightarrow (v)$ доказана.

Справедливость импликаций $(v) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (ii)$ устанавливается достаточно просто. Мы опускаем непосредственную их проверку и, таким образом, завершаем доказательство теоремы в целом. Теорема доказана.

Часто важно знать не только то, что множество максимальных элементов $\mathrm{Max}(X|\prec)$ не пусто, но и то, является ли оно конфинальным X, т.е. существует ли для любого $x \in X$ максимальный элемент $x^0 \in \mathrm{Max}(X|\prec)$ такой, что $x \precsim x^0$. В работах, посвященных векторной оптимизации (см., например, [16] и цитируемую там литературу), это свойство множества $\mathrm{Max}(X|\prec)$ называют свойством доминирования (domination property) упорядоченного множества $(X,\prec)$.

Теорема 4. *Множество максимальных элементов упорядоченного множества* $(X,\prec)$ *не пусто и является конфинальным* X *в том и только том случае, когда объединение всех ограниченных сверху восходящих вполне упорядоченных цепей из* X *совпадает со всем множеством* X.

Доказательство. Необходимость. Если множество максимальных элементов упорядоченного множества $(X,\prec)$ не пусто и конфинально X, то для любого $x \in X$ существует

$x^0 \in \mathrm{Max}(X|\prec)$ такой, что $x \precsim x^0$. Определим для каждого $x \in X$ подмножество C_x, положив $C_x := \{x\}$, если $x \sim x^0$, и $C_x := \{x, x^0\}$, если $x \prec x^0$. В обоих случаях множество C_x является ограниченной сверху восходящей вполне упорядоченной цепью в $(X, \prec)$. Очевидно, что объединение $\bigcup_{x \in X} C_x = X$. Тем более, объединение всех ограниченных сверху восходящих вполне упорядоченных цепей из X совпадает со всем множеством X.

Достаточность. Если объединение всех ограниченных сверху восходящих вполне упорядоченных цепей из X совпадает со всем множеством X, то естественно, что семейство таких цепей не пусто и, следовательно, в силу эквивалентности утверждений (i) и (v) теоремы 3 $\mathrm{Max}(X|\prec) \neq \emptyset$. Кроме того, из этого предположения следует, что каждый элемент $x \in X$ принадлежит некоторой цепи этого семейства, наибольший элемент которой (обозначим его x^0) принадлежит $\mathrm{Max}(X|\prec)$ и удовлетворяет соотношению $x \precsim x^0$. Теорема доказана.

Как показывает следующий пример, из того, что множество максимальных элементов упорядоченного множества $(X, \prec)$ не пусто и является конфинальным X, вообще говоря, не следует, что все восходящие вполне упорядоченные цепи из X являются ограниченными сверху.

Пример 3. Пусть $X := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x_2 \leq -|x_1| + 1,\ x_2 \neq 1\}$ и пусть отношение строгого предпорядка на X определяется следующим образом:

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq y_1,\ x_2 \leq y_2 \quad \text{и} \quad (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2).$$

Нетрудно убедиться, что $\mathrm{Max}(X|\prec) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < x_1 \leq 1,\ x_1 + x_2 = 1\} \neq \emptyset$ и является конфинальным X. В то же время, при любом $k \geq 1$ цепь $\left\{\left(-\dfrac{1}{kn}, \dfrac{n-1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ является восходящей и не ограниченной сверху в X.

Непосредственно из теоремы 3 следует один из наиболее фундаментальных принципов теории множеств — лемма Куратовского–Цорна, имеющая обширнейшие приложения в самых различных разделах математики.

Лемма Куратовского–Цорна. *Если любая вполне упорядоченная цепь упорядоченного множества* $(X, \prec)$ *ограничена сверху, то множество максимальных элементов* $\mathrm{Max}(X|\prec)$ *не пусто и является конфинальным* X.

Пример 3 показывает, что лемма Куратовского–Цорна необратима и, следовательно, является только достаточным условием непустоты и конфинальности множества максимальных элементов.

В заключение остановимся на условиях существования наибольших элементов в упорядоченных множествах.

Теорема 5. *Множество наибольших элементов упорядоченного множества* $(X, \prec)$ *не пусто в том и только том случае, когда любая вполне упорядоченная цепь из* X *ограничена сверху и наибольшие элементы различных восходящих вполне упорядоченных цепей являются равноценными.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\hat{x} \in \mathrm{Sup}_X(X|\prec)$. Тогда любая вполне упорядоченная цепь из X ограничена сверху элементом $\hat{x}$. Если же вполне упорядоченная цепь C является восходящей в X, то она имеет наибольший элемент, равноценный $\hat{x}$. Действительно, если бы такого элемента не существовало, то мы имели бы, что $x \prec \hat{x}$ для всех $x \in C$, а это противоречило бы тому, что C восходящая цепь в X. Из проведенных рассуждений следует также, что наибольшие элементы различных восходящих вполне упорядоченных цепей равноценны элементу $\hat{x}$ и, следовательно, являются равноценными между собой.

Достаточность. В силу предположений достаточной части теоремы каждая восходящая вполне упорядоченная цепь из $(X, \prec)$ имеет наибольший элемент и при этом все они равноценны одному и тому же элементу $\hat{x} \in X$. Покажем, что этот элемент $\hat{x}$ является наибольшим в X. Предположим противное. Тогда в X существует элемент x, несравнимый с $\hat{x}$. Рассмотрим непустое подмножество $\precsim(x) := \{y \in X|\ x \precsim y\}$. В силу теоремы 1 в $\precsim(x)$ существует восходящая вполне упорядоченная цепь C, которая, что нетрудно видеть, является восходящей и во всем множестве X. В силу предположений достаточной части доказываемой теоремы цепь C имеет наибольший элемент, который является равноценным $\hat{x}$. Это, однако, противоречит тому, что x и $\hat{x}$ несравнимы. Следовательно, $\hat{x}$ (а значит и все равноценные ему элементы из X) является наибольшим элементом в X. Теорема доказана.

Работа частично финансировалась в рамках Государственной программы фундаментальных исследований “Математические модели – 16”.

Литература

1. *Архангельский А.В.* Канторовская теория множеств. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
3. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
4. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1981.
5. *Келли Дж.Л.* Общая топология. М.: Наука, 1981.
6. *Harzheim E.* Ordered sets. Berlin: Springer, 2005.
7. *Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б.* Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Л.: Наука, 1980.
8. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
9. *Гороховик В.В.* Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990.
10. *Gajek L., Zagrodny D.* Countably orderable sets and their applications in optimization // Optimization. 1992. V. 26. P. 287–301.
11. *Jahn J.* Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Spaces. Frankfurt–Bern–New York: Peter Lang, 1986.
12. *Jahn J.* Existence theorems in vector optimization // J. Optim. Theory Appl. 1986. V. 50. P. 397–406.
13. *Luc D.T.* An existence theorem in vector optimization // Mathematics of Operations Research. 1989. V. 14. P. 693–699.
14. *Luc D.T.* Theory of Vector Optimization // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. V. 319. Berlin: Springer Verlag, 1989.
15. *Sonntag Y., Zălinescu C.* Comparison of existence results for efficient points // J. of Optimization Theory and Applications. 2000. V. 105. № 1. P. 161–188.
16. *Göpfert A., Tammer Chr., Riahi H., Zălinescu C.* Variational Methods in Partially Ordered Spaces // CMS Books in Mathematics. V. 17. New York–Berlin–Heidelberg: Springer Verlag, 2003.

E. V. Gireiko, V. V. Gorokhovik

General existence conditions for maximal elements of ordered sets

Summary

It is proved that Arkhangelski principle of existence of top-ascending well-ordered chain is equivalent to the statement of Gajek–Zagrodny lemma. Both the criterium of nonemptyness and the criterium of cofinality for the subset of maximal elements of an ordered set are derived on the base of Arkhangelski principle.