Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой

И.А.Иванишко

Опубликовано: Матем. заметки. 2005. Т. 77, №6. С. 937-940

В этой работе мы дадим различные описания обобщенных классов соболевского типа на метрических пространствах с мерой в тех или иных терминах (при помощи максимальных функций, неравенства Пуанкаре и т.д.). В настоящее время имеется ряд различных подходов [1]–[4] к определению таких пространств.

Пусть (X, d, μ) — пространство однородного типа [5], то есть $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ — квазиметрика на X (в аксиомах метрики неравенство треугольника заменено на неравенство $d(x,y) \leq a_d(d(x,z) + d(z,y))$ с некоторой постоянной $a_d \geq 1$, не зависящей от $x, y, z \in X$), μ — неотрицательная, борелевская, регулярная мера на X, удовлетворяющая условию удвоения

$$\mu B(x, 2t) \leq c\, \mu B(x,t), \tag{1}$$

где $c > 0$ не зависит от шара $B(x,t) = \{y \in X \colon d(x,y) < t\} \subset X$.

Здесь и всюду далее обозначаем через c различные постоянные, зависящие от определенных параметров, но эта зависимость для нас несущественна. Кроме того, пусть для шара $B \subset X$

$$f_B = \fint_B f\, d\mu = \frac{1}{\mu B} \int_B f d\mu.$$

Под значением функции $f \in L^p(X)$, $p \geq 1$, в точке $x \in X$ будем понимать левую часть следующего выражения

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\mu B(x,t)} \int_{B(x,t)} f d\mu = f(x). \tag{2}$$

(этот предел существует μ-почти всюду в силу теоремы Лебега).

Пусть Ω — класс всех положительных возрастающих функций η на $(0, \infty)$, таких что $\eta(t)/t$ убывает, $\eta(+0) = 0$.

Пусть $\eta \in \Omega$. Будем говорить, что функция $f \in L^p(X)$ принадлежит обобщенному пространству Хайлаша-Соболева $M^p_\eta(X)$, если существует неотрицательная функция $g \in L^p(X)$, такая что

$$|f(x) - f(y)| \le \eta(d(x,y))(g(x) + g(y)) \tag{3}$$

для μ-почти всех $x, y \in X$. Норма в $M^p_\eta(X)$ вводится следующим образом

$$\|f\|_{M^p_\eta} = \|f\|_p + \inf \|g\|_p,$$

где inf берется по всем функциям $g \in L^p(X)$, удовлетворяющим (3).

В случае $\eta(t) = t$ эти пространства ввел П.Хайлаш [1]. В настоящее время они интенсивно изучаются (см. [2, 3]). В случае степенных функций $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, они недавно рассматривались в [6].

Для $f \in L^p(X)$, $p \ge 1$ введем максимальные функции

$$\mathcal{N}_\eta f(x) = \sup \frac{1}{\eta(t)} \fint_B |f - f(x)|\, d\mu, \tag{4}$$

$$\mathcal{S}_\eta f(x) = \sup \frac{1}{\eta(t)} \fint_B |f - f_B|\, d\mu, \tag{5}$$

$$\mathcal{D}_\eta f(x) = \sup \frac{1}{\eta(t)} \fint_B \fint_B |f(y) - f(z)|\, d\mu(y)\, d\mu(z), \tag{6}$$

где sup берется по всем шарам B, содержащим точку $x \in X$.

Рассмотрение более широкого класса функций по сравнению со случаем $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, дает возможность более гибко учитывать локальные свойства функций $f \in L^p(X)$. Например, максимальная функция $\mathcal{N}_\eta f$ измеряет локальную гладкость функции: для $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, $\eta \in \Omega$ и μ-почти всех $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \le \eta(d(x,y))(\mathcal{N}_\eta f(x) + \mathcal{N}_\eta f(y)). \tag{7}$$

Операторы (4)–(6) порождают соответствующие пространства функций

$$C^p_\eta(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{C^p_\eta} = \|f\|_p + \|\mathcal{N}_\eta f\|_p < \infty\},$$

$$S^p_\eta(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{S^p_\eta} = \|f\|_p + \|\mathcal{S}_\eta f\|_p < \infty\},$$

$$D^p_\eta(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{D^p_\eta} = \|f\|_p + \|\mathcal{D}_\eta f\|_p < \infty\}.$$

В случае $\eta(t) = t^\alpha$ будем писать в обозначениях этих классов просто α вместо t^α. Историю развития таких максимальных функций см. в [7, 8, 9].

Связь с классическими пространствами Соболева $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ устанавливает следующая теорема А.Кальдерона [7] (см. также [8])

$$S_k^p(\mathbb{R}^n) = W_k^p(\mathbb{R}^n)$$

(классы $C_k^p(\mathbb{R}^n)$ определяются подобно $S_1^p(\mathbb{R}^n)$, но вместо среднего значения функции вычитается некоторый полином, зависящий от шара).

В работе [2] установлена тесная связь между пространством $M_1^p(X)$ и p-неравенством Пуанкаре. В связи с этим определим еще два класса функций.

Будем говорить, что функция $f \in L^p(X)$ принадлежит пространству $A_\eta^p(X)$ если для любого шара $B \subset X$ выполнено следующее условие: существуют $\lambda \geq 1$ и неотрицательная функция $g \in L^p(X)$, такие, что

$$\fint_B |f - f_B|\, d\mu \leq \eta(t) \fint_{\lambda B} g\, d\mu. \tag{8}$$

Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|f\|_{A_\eta^p} = \|f\|_p + \inf \|g\|_p,$$

где точная нижняя грань берется по всем g, удовлетворяющим (8).

Будем говорить, что функция $f \in L^p(X)$ принадлежит пространству $B_\eta^p(X)$, если существует неотрицательная функция $g \in L^p(X)$, такая что для любого шара $B \subset X$ и для μ-почти всех $x \in B$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f_B| \leq \eta(t) g(x). \tag{9}$$

Норму в этом пространстве введем следующим образом:

$$\|f\|_{B_\eta^p} = \|f\|_p + \inf \|g\|_p,$$

где inf берется по всем по всем g удовлетворяющим (9).

Теперь мы готовы к формулировке основных результатов.

Теорема 1 *Пусть $p > 1$, $\eta \in \Omega$. Тогда*

$$C_\eta^p(X) = M_\eta^p(X) = B_\eta^p(X)$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

Доказательство. $C_\eta^p(X) \subset M_\eta^p(X)$ в силу (7). Обратно, пусть $f \in M_\eta^p(X)$. Для любого шара $B \ni x$ и любого $y \in B$, $\eta(d(x,y)) \leq 2a_d\eta(t)$. Так как $|f(x)| \leq Mf(x)$ μ-п.в. (см., например, [3]), то

$$\frac{1}{\eta(t)} \fint_B |f(y) - f(x)|\, d\mu(y) \leq 2a_d(g(x) + g_B) \leq 4a_d Mg(x).$$

Здесь

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu B} \int_B |f| \, d\mu$$

— максимальная функция Харди-Литтлвуда. Так как $p > 1$, то $\|Mg\|_p \le c\|g\|_p$. Переходя к sup по всем шарам $B \ni x$, получим $\mathcal{N}_\eta f \in L^p(X)$.

Чтобы получить оценку для норм, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $g_\varepsilon \in L^p(X)$, такая что $\|f\|_p + \|g_\varepsilon\|_p < \|f\|_{M^p_\eta} + \varepsilon$, следовательно,

$$\|f\|_{C^p_\eta} = \|f\|_p + \|\mathcal{N}_\eta f\|_p \le c(\|f\|_p + \|g_\varepsilon\|_p) < c(\|f\|_{M^p_\eta} + \varepsilon).$$

При $\varepsilon \to 0$, получим $\|f\|_{C^p_\eta} \le c\|f\|_{M^p_\eta}$.

Пусть $f \in B^p_\eta(X)$. Для μ-почти всех $x, y \in X$ мы можем найти шар $B(z,t)$, содержащий точки x и y, радиуса $t \le d(x,y)$, такой, что для обеих точек выполнено неравенство (9). Тогда

$$|f(x) - f(y)| \le \eta(t)(g(x) + g(y)) \le \eta(d(x,y))(g(x) + g(y)).$$

Следовательно, $f \in M^p_\eta(X)$. Оценка для норм получается как и выше.

Пусть $f \in M^p_\eta(X)$ и $B \ni x$ — произвольный шар.

$$|f(x) - f_B| \le \fint_B |f(y) - f(x)| \, d\mu(y) \le$$

$$\le \fint_B \eta(d(x,y))(g(x) + g(y)) \, d\mu(y) \le 2a_d \eta(t)(g(x) + g_B) \le 4\eta(t) Mg(x).$$

Так как $p > 1$ и $g \in L^p(X)$, то $Mg \in L^p(X)$ и, значит, $f \in B^p_\eta(X)$. Аналогично предыдущим случаям, получим оценку для норм: $\|f\|_{B^p_\eta} \le c\|f\|_{M^p_\eta}$. Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть $p > 1$, $\eta \in \Omega$. Тогда*

$$D^p_\eta(X) = S^p_\eta(X) = A^p_\eta(X)$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

Доказательство. Совпадение классов $D^p_\eta(X)$ и $S^p_\eta(X)$ следует из очевидных оценок $\mathcal{S}_\eta f(x) \le \mathcal{D}_\eta f(x)$ и $\mathcal{D}_\eta f(x) \le 2\mathcal{S}_\eta f(x)$.

Пусть теперь $f \in A^p_\eta(X)$ и $B \ni x$ — произвольный шар. Тогда

$$\frac{1}{\eta(t)} \fint_B |f(y) - f(x)| \, d\mu(y) \le \fint_{\lambda B} g \, d\mu \le Mg(x).$$

Переходя к sup по всем шарам $B \ni x$, получим $\mathcal{S}_\eta f(x) \le Mg(x)$, следовательно, в силу теоремы Харди-Литтлвуда, $f \in S^p_\eta(X)$.

Найдем по произвольному $\varepsilon > 0$ функцию $g_\varepsilon \in L^p(X)$, такую, что $\|f\|_p + \|g_\varepsilon\|_p < \|f\|_{A^p_\eta} + \varepsilon$, и при $\varepsilon \to 0$ получим, что $\|f\|_{S^p_\eta} \le c\|f\|_{A^p_\eta}$.

Обратно, пусть $f \in S^p_\eta(X)$ и B — произвольный шар. Тогда для любого $y \in B$

$$\frac{1}{\eta(t)} \fint_B |f - f_B|\, d\mu \le \mathcal{S}_\eta f(y).$$

Проинтегрируем по $y \in B$ и разделим обе части на μB

$$\frac{1}{\eta(t)} \fint_B |f - f_B|\, d\mu \le \fint_B \mathcal{S}_\eta f\, d\mu,$$

поэтому $f \in A^p_\eta(X)$ и $\|f\|_{A^p_\eta} \le \|f\|_{S^p_\eta}$. Теорема доказана.

Теорема 3 *Пусть $p > 1$ и $\eta \in \Omega$. Тогда $C^p_\eta(X) \subset S^p_\eta(X)$.*

Обратно, если

$$\sum_{i=k}^{\infty} \eta(2^{-i}) \le c\eta(2^{-k}), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{10}$$

то $S^p_\eta(X) \subset C^p_\eta(X)$ и нормы в этих пространствах эквивалентны.

Доказательство. Первое включение очевидно, так как $\mathcal{S}_\eta f(x) \le 2\mathcal{N}_\eta f(x)$.

Обратно, пусть $f \in S^p_\eta(X)$, x — точка Лебега для f и $B \ni x$. Обозначим через $\lambda B = B(z, \lambda t)$ и $B_i \equiv B(x, a_d 2^{-(i-1)} t)$, $i = 0, 1 \dots$. Тогда $B \subset B_0 \subset 3a_d^2 B$ и

$$\fint_B |f - f(x)|\, d\mu \le \fint_B |f - f_B|\, d\mu + |f(x) - f_B| \le$$

$$\le \eta(t)\mathcal{S}_\eta f(x) + |f(x) - f_{B_0}| + |f_B - f_{B_0}| \equiv \eta(t)\mathcal{S}_\eta f(x) + A_1 + A_2.$$

По теореме Лебега $f(x) = f_{B_0} + \sum_{i=0}^{\infty} \left[f_{B_{i+1}} - f_{B_i}\right]$, и в силу (1)

$$A_1 \equiv |f(x) - f_{B_0}| = |\sum_{i=0}^{\infty} \Big(f_{B_{i+1}} - f_{B_i}\Big)| \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu B_{i+1}} \int_{B_{i+1}} |f - f_{B_i}| d\mu \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu B_i}{\mu B_{i+1}} \frac{1}{\mu B_i} \int_{B_i} |f - f_{B_i}| d\mu \le c\mathcal{S}_\eta f(x) \sum_{i=0}^{\infty} \eta(2^{-i} t),$$

$$A_2 \equiv |f_B - f_{B_0}| \le \frac{\mu B_0}{\mu B} \frac{1}{\mu B_0} \int\limits_{B_0} |f - f_{B_0}| d\mu \le c\eta(t) S_\eta f(x).$$

Итак, в силу условия Бари (10)

$$\fint\limits_B |f - f(x)|\, d\mu \le c\mathcal{S}_\eta f(x) \sum_{i=0}^{\infty} \eta(2^{-i}t) \le c\eta(t) S_\eta f(x).$$

Переходя к sup по всем шарам $B \ni x$, мы завершаем доказательство.

В случае $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$ часть утверждений была получена в [6].

Список литературы

[1] Hajlasz P., Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Anal., 1996, 5, p. 403–415.

[2] Hajlasz P., Koskela P., Sobolev met Poincare // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 688, p. 1-101.

[3] Heinonen J., Lectures on Analysis on Metric Spaces. Berlin, Springer-Verlag. 2001.

[4] Gol'dshtein V., Troyanov M., Axiomatic theory of Sobolev spaces. // Expo. Math. 2001, V. 19, No. 4, p. 289-336.

[5] Coifman R.R., Weiss G., Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // Bull.Amer.Math.Soc. 1977. V. 83, N 4. P. 569–645.

[6] Yang D., New characterizations of Hajlasz-Sobolev spaces on metric spaces // Science of China, 2003, vol.46, No.5, p. 1–15.

[7] Calderon A.P., Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Studia Math. 1972. V. 44., P. 167–186.

[8] De Vore R., Sharpley R. Maximal functions measuring local smoothness // Mem. Amer. Math. Soc., 47(1984).

[9] Kolyada V.I., Estimates of maximal functions measuring local smoothness // Analisys Math. 1999. V. 25, P. 277–300.

[10] Иванишко И.А., Оценки максимальных функций Кальдерона-Коляды на пространствах однородного типа // Труды института математики НАН Беларуси. 2004. Т. 12. № 1. С. 64–67.

И.А.Иванишко

Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой

Аннотация

В работе рассматриваются различные способы определения обобщенных классов Соболева $C_\eta^p(X)$ ($p > 1$, $\eta(t) \uparrow$, $\eta(t)/t \downarrow$, $\eta(+0) = 0$) на пространствах однородного типа (X, d, μ). В частном случае $\eta(t) = t$, $X = \mathbb{R}^n$ они совпадают с классическими пространствами Соболева $W_1^p(\mathbb{R}^n)$.

Найдены условия, при которых эти определения эквивалентны.

Ключевые слова: *пространства однородного типа, обобщенные пространства Соболева, максимальные функции.*

I.A.Ivanishko
Generalized Sobolev classes on metric measure spaces

Аннотация

In this paper we consider different ways of defining generalized Sobolev classes $C^p_\eta(X)$ ($p > 1$, $\eta(t) \uparrow$, $\eta(t)/t \downarrow$, $\eta(+0) = 0$) on homogeneous type spaces (X, d, μ). In partial case $\eta(t) = t$, $X = \mathbb{R}^n$ they coincide with classical Sobolev spaces $W^p_1(\mathbb{R}^n)$.

Conditions of their equivalence are found.

Key words: *homogeneous type spaces, generalized Sobolev classes, maximal functions.*

Иванишко Ия Александровна
Белорусский государственный университет, кафедра математических методов теории управления
220012, Минск, Беларусь, ул.Академическая, 7, кв. 14
телефон (8-10-375-29) 627-47-79
e-mail: iya.ivanishko@tut.by

УДК 517.5