Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений - 2001
Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2001. Том 9. С. 1–3

УДК 515.7

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ МАЗУРА, I

Е. А. Алехно

The main goal of the article is to establish some properties of Banach lattice ℓ_∞ with help Mazur' functionals (or, other, Banach limits), and by that to give more fullish presentation about its ordinal and geometrical prorerties.

В 1929 Мазур [1] с помощью теоремы Хана - Банаха доказал существование так называемых "банаховских или обобщенных пределов", точнее, линейных функционалов на пространстве ограниченных последовательностей ℓ_∞, удовлетворяющих следующим свойствам:

1) x^* — положительный;

2) если предел последовательности x_n $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $x^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_0$;

3) $x^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x^*(0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

В связи с этим, линейный функционал на пространстве ℓ_∞ назовем *функционалом Мазура*, если он удовлетворяет выше приведенным свойствам 1), 2), 3). Множество всех функционалов Мазура обозначим через $\mathcal{M}$. Ясно, что $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Другое название фукнционалов Мазура — банаховские функционалы; эта терминология использовалась в [2].

Пространство ℓ_∞ является банаховой решеткой, причем произвольный функционал Мазура представляет собой положительный функционал на ℓ_∞, т.е. элемент банаховой решетки ℓ_∞^* сопряженной к l_∞. Как будет показано ниже, с помощью функционалов Мазура можно получить более полную информацию о структуре пространства ℓ_∞^*, одном из наименее изученных классических пространств функционального анализа. Главный акцент будет сделан на изучение порядковой структуры пространства ℓ_∞^*. Терминология и обозначения относящиеся к банаховым решеткам взяты из [3].

Хорошо известно, что сопряженное к пространству ℓ_∞ пространство ℓ_∞^* можно представить в виде прямой суммы $\ell_\infty^* = \ell_1 \oplus \ell_\infty^s$, где ℓ_∞^s — пространство антинормальных функционалов или функционалов, обращающихся в нуль на пространстве c_0.

Пусть Q_0 — множество всех крайних точек замкнутой единичной сферы ℓ_∞^*, лежащих в ℓ_∞^s, т.е. являющихся антинормальными функционалами. Обозначим через Q — замыкание в метрической топологии ℓ_∞^* линейной оболочки Q_0, $Q \subset \ell_\infty^s$. Замкнутое линейное подпространство $\ell_1 \oplus Q$ пространства ℓ_∞^* будет тотальным. Следующие три теоремы устанавливают простейшие свойства функционалов Мазура, как элементов банаховой решетки ℓ_∞^*.

Теорема 1. *Пространство Q является компонентой в банаховой решетке ℓ_∞^*. Кроме того, множество функционалов Мазура $\mathcal{M}$ будет дизъюнктным с компонентой $\ell_1 \oplus Q$.*

Доказательство. То, что $\mathrm{Lin}\, Q_0$ является идеалом, следует из того обстоятельства, что если функционалы x_1^* и x_2^* принадлежат Q_0 и линейно независимы, то $x_1^* \perp x_2^*$, а также того

Keywords: *Banach lattice, space of all bounded sequence, Mazurs' functionals, Rademacher sequences*
2000 Mathematics Subject Classification: 46E30

факта, что для произвольного $x^* \in Q_0$ луч $\{\lambda x^* : \lambda \geq 0\}$ является экстремальным в конусе $(\ell_\infty^*)_+$. Оба последних утверждения являются следствиями того, что мера μ определяющая функционал $x^* \in Q_0$, $x^*(e) = 1$ принимает лишь два значения 0 и 1. Значит $Q = \overline{\mathrm{Lin}\, Q_0}$ — идеал, как замыкание идеала, и, поскольку $Q_0 \perp \ell_1$, то и $Q \perp \ell_1$. Теперь, воспользовавшись порядковой непрерывностью нормы в ℓ_∞^*, получаем, что Q — компонента.

Для того чтобы показать, что для произвольного функционала $x^* \in \mathcal{M}$ будет $x^* \perp \ell_1 \oplus Q$, установим, что $x^* \perp z^*$ для каждого функционала $z^* \in Q_0$, откуда и будет следовать требуемое. Считаем, что $z^* > 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и натуральное n, такое, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Определим элементы v_i, $i = 1, \ldots, n$ пространства ℓ_∞ следующим образом:

$$(v_i)_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = i + np,\ p \in \mathbb{Z},\ p \geq 0, \\ 0, & k \neq i + np \text{ ни при каком } p \in \mathbb{Z},\ p \geq 0. \end{cases}$$

Тогда $v_i \perp v_j$, $i \neq j$ и $x^* v_i = \frac{1}{n}$ для каждого $i, = 1, \ldots, n$. Существует такое i_0, что $z^* v_{i_0} = z^*(e) > 0$ и $z^* v_i = 0$ при всех $i \neq i_0$. Теперь, представив элемент e как сумму $e = v_{i_0} + (e - v_{i_0})$, получаем

$$(x^* \wedge z^*) e \ \leq\ x^* v_{i_0} + z^*(e - v_{i_0}) < \varepsilon.$$

Таким образом, в силу произвольности ε, $(x^* \wedge z^*) e = 0$, т.е. $x^* \perp z^*$.

Обозначим через $B_{\mathcal{M}}$ компоненту порожденную множеством $\mathcal{M}$ в ℓ_∞^*. Тогда, как показывается в теореме 3 ниже, компонента $\ell_1 \oplus Q \oplus B_{\mathcal{M}}$ не совпадает со всем пространством ℓ_∞^*. Для доказательства теоремы 3 нам понадобится

Теорема 2. *Существует бесконечное подмножество A множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ такое, что для произвольного функционала $x^* \in \mathcal{M}$ справедливо равенство $x^* \chi_A = 0$. В качестве A можно взять, например, множество $A = \{k! : k \in \mathbb{N}\}$.*

Доказательство. Пусть $A = \{k! : k \in \mathbb{N}\}$. Введем множества $A_n \subset \mathbb{N}$ по правилу $A_n = \{nk : k \in \mathbb{N}\}$. Тогда, для каждого функционала $x^* \in \mathcal{M}$ получаем

$$0 \leq x^* \chi_A \leq x^* \chi_{A_n} = \frac{1}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$, откуда $x^* \chi_A = 0$.

Для бесконечного подмножества $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ натуральных чисел перенумерованных в порядке возрастания введем оператор

$$\Lambda_D : x = (x_1, x_2, \ldots) \to z = (z_1, z_2, \ldots),$$

где $z_{d_n} = x_n$ для всех n и $z_i = 0$ при $i \notin D$, который представляет собой изометрический и порядковый изоморфизм пространства ℓ_∞ на пространство $P_D \ell_\infty$.

Теорема 3. *Компонента $\ell_1 \oplus Q \oplus B_{\mathcal{M}}$ не совпадает со всем пространством ℓ_∞^*.*

Доказательство. Пусть $A = \{k! : k \in \mathbb{N}\}$ — множество из теоремы 2. Взяв произвольный функционал Мазура $x^* \in \mathcal{M}$, определим функционал $x_A^* \in (P_A \ell_\infty)^*$ по правилу $x_A^* x = x^*(\Lambda_A^{-1} x)$, где $x \in P_A \ell_\infty$. Тогда, распространив x_A^* на все ℓ_∞ (обозначив полученный функционал снова x_A^*), в силу теоремы 2 имеем $x_A^* \in \ell_\infty^*$, $x_A^*(P_{\mathbb{N} \setminus A} \ell_\infty) = 0$ и $x_A^* \perp \ell_1 \oplus B_{\mathcal{M}}$. Тот факт, что $x_A^* \perp Q$ доказывается аналогично тому, как это сделано в теореме 1. Таким образом, $x_A^* \perp \ell_1 \oplus Q \oplus B_{\mathcal{M}}$.

Пусть Ω — произвольное пространство с неотрицательной конечной непрерывной мерой на некоторой σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из Ω. Произвольным образом разобьем Ω на два непересекающихся множества Ω_1^1, Ω_1^2 равной меры. Положим $z_1 = \chi_{\Omega_1^1} - \chi_{\Omega_1^2}$. Разобьем каждое из множеств Ω_1^1, Ω_1^2 на два непересекающихся множества равной меры, $\Omega_2^1 \sqcup \Omega_2^2 = \Omega_1^1$, $\Omega_2^3 \sqcup \Omega_2^3 = \Omega_1^2$ и положим $z_2 = \chi_{\Omega_2^1 \sqcup \Omega_2^3} - \chi_{\Omega_2^2 \sqcup \Omega_2^4}$. Разделив снова каждое из $\Omega_2^i, 1 \leq i \leq 4$ на две непересекающиеся части равной меры, на одной полагаем $z_3(s) = 1$, на другой $z_3(s) = -1$. Продолжая этот процесс дальше, получим некоторую последовательность функций. Любая последовательность, которая может быть построена подобным образом называется последовательностью Радемахера на множестве Ω с мерой μ или просто *последовательностью Радемахера.* Любая последовательность Радемахера слабо сходится к нулевой функции в пространстве $\mathcal{L}_1(\Omega)$ и $\star$-слабо в пространстве $\mathcal{L}_\infty(\Omega)$.

Для каждого натурального $n\geq 1$ разобьем множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ на два непересекающихся множества

$$K_n^+ = \{m + r2^n : 1\leq m\leq 2^{n-1}, r\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

и

$$K_n^- = \{m + r2^n : 2^{n-1}+1\leq m\leq 2^n, r\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}.$$

Введем последовательность $z_n = \chi_{K_n^+} - \chi_{K_n^-}$. По ходу доказательства следующей теоремы, устанавливающей важное свойство последовательности z_n, будет показано, что на самом деле существует пространство в котором последовательность z_n, а точнее $F_{z_n}\in\ell_\infty^{**}$, "является" последовательностью Радемахера.

Теорема 4. *Если функционал $y^*\in B_{\mathcal{M}}$, то справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} y^* z_n = 0$.*

Доказательство. Пространство ℓ_∞^* является L-пространством, сопряженное к L-пространству есть всегда M-пространство с единицей, причем единица определяется по формуле $e^{**}(x^*) = ||x_+{}^*|| - ||x_-{}^*||$ (см. [3]), откуда следует $F_e x^* = x^* e = e^{**}x^*$, т.е. F_e — единица M-пространства ℓ_∞^{**}. Фиксируем произвольный функционал x^* из $\mathcal{M}$. Компонента B_{x^*} порожденная функционалом x^* в пространстве ℓ_∞^* представляет собой L-пространство с единицей x^*. Пространство ℓ_∞^* раскладывается на прямую сумму компоненты B_{x^*} и ее дизъюнктного дополнения $B_{x^*}^{\mathrm{d}}$, $\ell_\infty^* = B_{x^*}\oplus B_{x^*}^{\mathrm{d}}$, тогда $\ell_\infty^{**} = (B_{x^*})^\perp \oplus (B_{x^*}^{\mathrm{d}})^\perp$. Если P_{x^*} — порядковый проектор на B_{x^*}, то $(B_{x^*}^{\mathrm{d}})^\perp = P_{x^*}^*\ell_\infty^{**}$, где $P_{x^*}^*$ — оператор сопряженный к P_{x^*}. Компонента $(B_{x^*}^{d})^\perp$ изометрически и порядково изоморфно [4] компоненте $B_{x^*}^*$. С другой стороны, по теореме Какутани [3] B_{x^*} изометрически порядково изоморфно пространству $\mathcal{L}_1(\Omega_{x^*},\mu_{x^*})$, где мера μ_{x^*} на Ω_{x^*} конечна и, поскольку замкнутый единичный шар пространства B_{x^*} не содержит крайних точек, мера μ_{x^*} будет также являться непрерывной, а функционал x^* переходит в единичную функцию, $\hat{x}^* = 1$. Таким образом, $B_{x^*}^*$ изометрически порядково изоморфно пространству $\mathcal{L}_\infty(\Omega_{x^*},\mu_{x^*})$, а значит и $(B_{x^*}^{\mathrm{d}})^\perp$ изометрически и порядково изоморфно $\mathcal{L}_\infty(\Omega_{x^*},\mu_{x^*})$. Пусть ψ — этот изоморфизм. В силу того, что $P_{x^*}^* F_e$ — единица пространства $(B_{x^*}^{\mathrm{d}})^\perp$ справедливо равенство $\psi(P_{x^*}^* F_e) = 1\in\mathcal{L}_\infty(\Omega_{x^*},\mu_{x^*})$. Таким образом, каждый функционал $x^{**}\in\ell_\infty^{**}$ в сужении на $(B_{x^*}^{\mathrm{d}})^\perp$ можно рассматривать, как элемент пространства $\mathcal{L}_\infty(\Omega_{x^*},\mu_{x^*})$.

Ясно, что $x^*(z_n) = 0$, $|z_n| = e$. Функционалы $\psi(P_{x^*}^* F_{z_n})\in\mathcal{L}_\infty(\Omega_{x^*},\mu_{x^*})$, причем

$$|\psi(P_{x^*}^* F_{z_n})| = \psi(P_{x^*}^* F_{|z_n|}) = \psi(P_{x^*}^* F_e) = 1.$$

Далее,

$$\psi(P_{x^*}^* F_{z_n}) = \psi(P_{x^*}^* F_{(z_n)_+}) - \psi(P_{x^*}^* F_{(z_n)_-}) = (\psi(P_{x^*}^* F_{z_n}))_+ - (\psi(P_{x_0^*}^* F_{z_n}))_-,$$

кроме того

$$(\psi(P_{x^*}^* F_{z_n}))_+ \ \perp\ (\psi(P_{x^*}^* F_{z_n}))_- \quad \text{и} \quad (\psi(P_{x^*}^* F_{z_n}))_+ \ +\ (\psi(P_{x^*}^* F_{z_n}))_- = 1,$$

откуда найдутся такие измеримые множества $C_n^+, C_n^-\subseteq\Omega_{x^*}$, что $C_n^+\sqcup C_n^- = \Omega_{x^*}$ и

$$(\psi(P_{x^*}^* F_{z_n}))_+ = \chi_{C_n^+},\ (\psi(P_{x_0^*}^* F_{z_n}))_- = \chi_{C_n^-}.$$

Т.к. $P_{x^*}^* F_{u_n} x^* = 0$, получаем $\mu_{x^*}(C_n^+) = \mu_{x^*}(C_n^-)$. Для $n>1$ и $i=1,2$ введем множества

$$K_{n+}^i = \{m + r2^{n-1} : 1\leq m\leq 2^{n-2},\ r\in\mathbb{Z},\ r\geq 0 \ \text{ и } \ r \ \text{ имеет вид } \ r = 2k+i-1\}$$

и

$$K_{n-}^i = \{m + r2^{n-1} : 2^{n-2}+1\leq m\leq 2^{n-1},\ r\in\mathbb{Z},\ r\geq 0 \ \text{ и } \ r \ \text{ имеет вид } \ r = 2k+i-1\}.$$

Тогда, каждое из множеств K_n^+ и K_n^- разбивается на два непересекающихся, $K_n^+ = K_{n+}^1 \sqcup K_{n-}^1$, $K_n^- = K_{n+}^2 \sqcup K_{n-}^2$, и, кроме того, выполнены равенства

$$K_{n+}^1 + 2^{n-2} = K_{n-}^1,\ K_{n-}^1 + 2^{n-2} = K_{n+}^2,\ K_{n+}^2 + 2^{n-2} = K_{n-}^2,\ K_{n-}^2 + 2^{n-2} = K_{n+}^1 + 2^n.$$

Тогда при всех $n > 1$ выполняется равенство

$$(z_{n-1})_j = \begin{cases} 1: & j \in (K_{n+}^1 \sqcup K_{n+}^2), \\ -1: & j \in (K_{n-}^1 \sqcup K_{n-}^2), \end{cases}$$

откуда следует

$$\mu_{x^*}(C_n^+ \cap C_{n-1}^+) = \mu_{x^*}(C_n^+ \cap C_{n-1}^-) = \frac{1}{2}\mu_{x^*}(C_n^+),$$

и, таким образом, функции $\chi_{C_n^+} - \chi_{C_n^-} = \psi(P_{x_0^*}^* F_{z_n})$ представляют собой последовательность Радемахера в $\mathcal{L}_\infty(\Omega_{x^*}, \mu_{x^*})$.

Поскольку последовательность Радемахера сходится $\star$-слабо в пространстве $\mathcal{L}_\infty(\Omega_{x^*}, \mu_{x^*})$, для произвольного функционала $y^* \in B_{x^*}$ имеем

$$y^* z_n = F_{z_n} y^* = F_{z_n} P_{x^*} y^* = (P_{x^*}^* F_{z_n}) y^* = \int\limits_{\Omega_{x^*}} (\chi_{C_n^+} - \chi_{C_n^-}) \hat{y}^* \, d\mu_{x^*} \to 0$$

при $n \to \infty$. В силу произвольного выбора функционала x^*, заключаем, что для каждого функционала y^* принадлежащего некоторой компоненте порожденной произвольным функционалом Мазура справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} y^* z_n = 0$.

Пусть y^* принадлежит идеалу $I_{\mathcal{M}}$ порожденному множеством $\mathcal{M}$ в ℓ_∞^*. Тогда $|y^*| \le \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i y_i^*$, где $y_i^* \in \mathcal{M},\ \lambda_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, m$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} y^* z_n = 0$. В общем случае, когда $y^* \in B_{\mathcal{M}}$, найдем последовательность функционалов $y_k^* \in I_{\mathcal{M}}$ таких, что $0 \le y_k^* \uparrow |y^*|$. Выбрав k_0 для которого $||y^* - y_{k_0}^*|| \le \frac{\epsilon}{2}$ и натуральное N таким, что при $n \ge N$ $|y_{k_0}^* z_n| \le \frac{\epsilon}{2}$, получаем для $n \ge N$

$$|y^*(z_n)| \le |(y^* - y_{k_0}^*)(z_n)| + |y_{k_0}^* z_n| \le ||y^* - y_{k_0}^*|| + \frac{\epsilon}{2} \le \epsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y^* z_n = 0$. Теорема доказана.

Теорема 4 оказывается полезной при исследовании условий слабой непрерывности оператора суперпозиции в пространстве ℓ_∞ (см. [5]).

В следующей статье посвященной функционалам Мазура будет, в частности, дано обобщение теоремы 2, а именно дана характеристика множеств $A \subseteq \mathbb{N}$ таких, что $x^* \chi_A \le \epsilon$ для всех $x^* \in \mathcal{M}$ при фиксированном ϵ, а также обсуждены вопросы связанные с компактностью множества $\mathcal{M}$.

Литература

1. **Mazur S.** O metodach sumowalności // Ksiega Pamiatkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego, Supplèment aux Annales de la Soc. Polonaise de Math. 1929. P. 102-107.

2. **Алехно Е.А.** Некоторые специальные свойства банаховских функционалов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : Тез. докл. междунар. конф., 4-9 сент. 2003г.. Институт математики НАН Беларуси. 2003. P. 18.

3. **Aliprantis C.D., Burkinshaw O.** Positive operators. New York & London, 1985.

4. **Schaefer H.H.** Banach lattices and positive operators. Berlin & New York, 1974.

5. **Alekhno Y.A.** On the weak continuity of a superposition operator in the space of all bounded sequences // Готовится к печати.

Белорусский государственный университет, г. Минск