Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2004. Том 12, No. 1. С. ??–??

УДК 517.986, 517.982

РЕЗОЛЬВЕНТА ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА УПОРЯДОЧЕННОЙ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ

Е. А. Алехно

Let $\mathcal{A}$ be an ordered Banach algebra with a unit e. If $z \in \mathcal{A}$, $z \geq 0$, then an order idempotent b (that is, $0 \leq b \leq e$ and $b^2 = b$) is called z-invariant whenever $(e-b)zb = 0$. A formulas for a calculation of the resolvent $R(.,z)$ of an element z which has invariant order idempotents, are obtained. Some applications to the coefficients of Laurent series expansion of $R(.,z)$ around the spectral radius $r(z)$ are given.

1. Введение. Хорошо известно, что произвольная неотрицательная матрица A перестановкой рядов, т.е. перестановкой столбцов и затем такой же перестановкой строк, может быть представлена в треугольном виде, называемом *нормальной формой* матрицы A,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix},$$

где на диагонале стоят неразложимые матрицы. Аналогичный результат для случая бесконечномерного пространства был получен автором в [3]. Таким образом, как в случае неотрицательных матриц, так и в общем случае, возникает необходимость нахождения связи между резольвентами матрицы A и матриц $A_{11}, \dots, A_{mm}$, которые, как в конечномерном, так и бесконечномерном случае, могут быть охарактеризованы с помощью инвариантных компонент. Это главная задача данной работы, причем результаты будут получены сразу для более общего случая упорядоченной банаховой алгебры.

Так, в следующем пункте будут приведены используемые в дальнейшем определения, обозначения и факты, относящиеся к упорядоченным банаховым алгебрам. В третьем пункте будет получен основной результат, посвященный свойствам резольвенты $R(.,z)$ положительного элемента z упорядоченной банаховой алгебры $\mathcal{A}$. Последний пункт — некоторые приложения полученных результатов к свойствам коэффициентов главной части ряда Лорана для $R(.,z)$ в окрестности спектрального радиуса $r(z)$ элемента z.

Используемые в работе терминология, обозначения и факты, относящиеся к банаховым решеткам и операторной теории, взяты из [1, 4], упорядоченные банаховы алгебры изучались в [7, 6]. Ниже символ E обозначает произвольную (комплексную) банахову решетку.

2. Упорядоченные банаховы алгебры. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная (комплексная) банахова алгебра с единицей e, $\mathcal{A}^+$ — (замкнутый, выпуклый) конус в $\mathcal{A}$. Как обычно, запись $x \geq y$ означает, что $x - y \in \mathcal{A}^+$. Если $e \geq 0$ и неравенства $x, y \geq 0$ влекут $xy \geq 0$, то $\mathcal{A}$ называется *упорядоченной банаховой алгеброй*. Важнейшим примером упорядоченной банаховой алгебры

Keywords: *ordered Banach algebra, resolvent*
2000 Mathematics Subject Classification: 46B40, 46H30

является алгебра $\mathcal{L}(E)$ всех ограниченных линейных операторов в E с естественным порядком. В дальнейшем, символ $\mathcal{A}$ обозначает произвольную упорядоченную банахову алгебру.

Элемент $b\in\mathcal{A}$ называется *порядковым идемпотентом*, если $0\le b\le e$ и $b^2=b$. Множество всех порядковых идемпотентов в $\mathcal{A}$ будем обозначать $OI(\mathcal{A})$. Отметим, что имеет место следующее утверждение: *если $b_1,b_2\in OI(\mathcal{A})$, то $b_1b_2\in OI(\mathcal{A})$ и b_1b_2 совпадает с точной нижней гранью b_1 и b_2 относительно порядка в $\mathcal{A}$, т.е.* $b_1b_2=b_1\wedge b_2$; в частности, $b_1b_2=b_2b_1$. Для произвольного $b\in OI(\mathcal{A})$ и $z\in\mathcal{A}$ полагаем $b^{\mathrm{d}}=e-b$ и $z_b=bzb$. Очевидно, $b^{\mathrm{d}}\in OI(\mathcal{A})$ и $b^{\mathrm{d}}b=0$. Порядковый идемпотент b называется *z-инвариантным*, если $b^{\mathrm{d}}zb=0$. Ясно, что b и b^{d} являются z_b-инвариантными. Если $\mathcal{A}=\mathcal{L}(E)$, то ([4], с. 33) $T\in\mathcal{A}$ является порядковым идемпотентом в том и только том случае, когда T — порядковый проектор.

Модулем элемента $z\in\mathcal{A}$ называется элемент $|z|\in\mathcal{A}$, равный точной верхней грани элементов z и $-z$, если она существует; т.е. $|z|=z\vee(-z)$. Ясно, что $|z|\ge 0$. Отметим следующий факт: *если элемент z обладает модулем, то для произвольного $b\in OI(\mathcal{A})$ модули элементов bz и zb существуют, причем $|bz|=b|z|$ и $|zb|=|z|b$.*

Будем говорить, что точка соответствующая спектральному радиусу $r(z)$ элемента $z\in\mathcal{A}^+$ является *o-полюсом* резольвенты $R(.,z)$, если $r(z)$ — полюс $R(.,z)$, для любого $b\in OI(\mathcal{A})$ имеет место неравенство $r(z_b)\le r(z)$ и, если $r(z_{b_0})=r(z)$ для некоторого $b_0\in OI(\mathcal{A})$, то $r(z)$ — полюс $R(.,z_{b_0})$. В случае, когда $\mathcal{A}=\mathcal{L}(E)$, $0\le T\in\mathcal{A}$, точка $r(T)$, являющаяся полюсом конечного ранга $R(.,T)$, будет [5] o-полюсом $R(.,T)$.

3. Резольвента положительного элемента, имеющего инвариантные порядковые идемпотенты.

Лемма 1. *Пусть $0\le z\in\mathcal{A}$, $b\in OI(\mathcal{A})$. Тогда*:

(a) *Порядковый идемпотент b является z-инвариантным в том и только том случае, когда b является $R(\lambda,z)$-инвариантным для всех λ из неограниченной компоненты связности $\rho_\infty(z)$ резольвентного множества $\rho(z)$ элемента z;*

(b) *Если $r(z)$ — o-полюс $R(.,z)$, то для λ из достаточно малой проколотой окрестности точки $r(z)$ справедливы соотношения $bR(\lambda,z_b)b=R(\lambda,z_b)b=bR(\lambda,z_b)$.*

На простом доказательстве леммы не останавливаемся.

Теорема 2. *Пусть $0\le z\in\mathcal{A}$, точка $r(z)$ является o-полюсом $R(.,z)$. Тогда, если порядковые идемпотенты b_1, b_2, b_3 удовлетворяют неравенствам $b_3\ge b_2\ge b_1$ и b_2 является z-инвариантным, то в достаточно малой проколотой окрестности $r(z)$ справедливо равенство*

$$R(\lambda,z_{b_3b_1^{\mathrm{d}}})=\frac{1}{\lambda}(b_3^{\mathrm{d}}+b_1)+R(\lambda,z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}})b_3b_2^{\mathrm{d}}+R(\lambda,z_{b_2b_1^{\mathrm{d}}})b_2b_1^{\mathrm{d}}+R(\lambda,z_{b_2b_1^{\mathrm{d}}})b_2b_1^{\mathrm{d}}zb_3b_2^{\mathrm{d}}R(\lambda,z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}}). \quad (1)$$

Доказательство. Поскольку $r(z)$ — o-полюс $R(.,z)$, резольвенты $R(.,z_{b_3b_1^{\mathrm{d}}})$, $R(.,z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}})$, $R(.,z_{b_2b_1^{\mathrm{d}}})$ определены в некоторой проколотой окрестности $\mathcal{U}\subseteq\rho_\infty(z)$ точки $r(z)$.

Для $\lambda\in\mathcal{U}$ имеет место равенство

$$(\lambda-z_{b_3b_1^{\mathrm{d}}})R(\lambda,z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}})=b_3^{\mathrm{d}}+b_1+b_3b_2^{\mathrm{d}}+\frac{1}{\lambda}(\lambda b_2b_1^{\mathrm{d}}-z_{b_2b_1^{\mathrm{d}}})-b_2b_1^{\mathrm{d}}zb_3b_2^{\mathrm{d}}R(\lambda,z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}}). \quad (2)$$

Действительно, обозначив правую часть (2) через $f_1(\lambda)$, $\lambda\in\mathcal{U}$, имеем

$$f_1(\lambda)(\lambda-z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}})=\lambda(b_3^{\mathrm{d}}+b_1+b_3b_2^{\mathrm{d}})-z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}}+\frac{1}{\lambda}(\lambda b_2b_1^{\mathrm{d}}-z_{b_2b_1^{\mathrm{d}}})(\lambda-z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}})-b_2b_1^{\mathrm{d}}zb_3b_2^{\mathrm{d}}=$$

$$=\lambda(b_3^{\mathrm{d}}+b_3b_2^{\mathrm{d}}+b_2b_1^{\mathrm{d}}+b_1)-z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}}-z_{b_2b_1^{\mathrm{d}}}-b_2b_1^{\mathrm{d}}zb_3b_2^{\mathrm{d}}=\lambda-z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}}-(z_{b_2b_1^{\mathrm{d}}}+b_2b_1^{\mathrm{d}}zb_3b_2^{\mathrm{d}})=\lambda-z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}}-b_2b_1^{\mathrm{d}}zb_3b_1^{\mathrm{d}}.$$

Справедливо равенство $z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}}=b_3b_2^{\mathrm{d}}zb_3b_1^{\mathrm{d}}$. В самом деле,

$$b_3b_2^{\mathrm{d}}z(b_3b_1^{\mathrm{d}}-b_3b_2^{\mathrm{d}})=b_3b_2^{\mathrm{d}}z(b_3-b_1-b_3+b_2)=b_3b_2^{\mathrm{d}}zb_2b_1^{\mathrm{d}}=0.$$

Следовательно,

$$f_1(\lambda)(\lambda-z_{b_3b_2^{\mathrm{d}}})=\lambda-b_3b_2^{\mathrm{d}}zb_3b_1^{\mathrm{d}}-b_2b_1^{\mathrm{d}}zb_3b_1^{\mathrm{d}}=\lambda-(b_3b_2^{\mathrm{d}}+b_2b_1^{\mathrm{d}})zb_3b_1^{\mathrm{d}}=\lambda-z_{b_3b_1^{\mathrm{d}}},$$

и (2) установлено.

Для $\lambda \in \mathcal{U}$ имеет место равенство

$$(\lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}})R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) = b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + \frac{1}{\lambda}(\lambda b_3 b_2^{\mathrm{d}} - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}}) - \frac{1}{\lambda} b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} + (\lambda b_2 b_1^{\mathrm{d}} - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}})R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}). \quad (3)$$

Действительно, обозначив правую часть (3) через $f_2(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{U}$, имеем

$$f_2(\lambda)(\lambda - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) = \lambda(b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + b_2 b_1^{\mathrm{d}}) + \frac{1}{\lambda}(\lambda b_3 b_2^{\mathrm{d}} - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})(\lambda - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) - \frac{1}{\lambda} b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}}(\lambda - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}} =$$

$$= \lambda(b_3^{\mathrm{d}} + b_3 b_2^{\mathrm{d}} + b_2 b_1^{\mathrm{d}} + b_1) - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}} - b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}} = \lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}},$$

и равенство (3) установлено. Далее, учитывая соотношения

$$(\lambda b_2 b_1^{\mathrm{d}} - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}})R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) = (\lambda - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}} - \lambda(e - b_2 b_1^{\mathrm{d}}))R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) = e - \lambda(e - b_2 b_1^{\mathrm{d}})R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}),$$

перепишем (3) в виде

$$(\lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}})R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) = b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + \frac{1}{\lambda}(\lambda b_3 b_2^{\mathrm{d}} - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}}) - \frac{1}{\lambda} b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} + e - \lambda(e - b_2 b_1^{\mathrm{d}})R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}). \quad (4)$$

Для $\lambda \in \mathcal{U}$ имеет место равенство

$$R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})(\lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}}) = b_3^{\mathrm{d}} + b_3 b_2^{\mathrm{d}} - \frac{1}{\lambda} b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} + \frac{1}{\lambda}(\lambda b_2 b_1^{\mathrm{d}} - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) + b_1. \quad (5)$$

Действительно, обозначив правую часть (5) через $f_3(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{U}$, имеем (см. док-во (2) выше)

$$(\lambda - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})f_3(\lambda) = \lambda(b_3^{\mathrm{d}} + b_3 b_2^{\mathrm{d}} + b_2 b_1^{\mathrm{d}} + b_1) - b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}} - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}} = \lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}},$$

и (5) установлено. Следующее равенство теперь очевидно

$$b_3 b_2^{\mathrm{d}} R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})(\lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}}) = b_3 b_2^{\mathrm{d}}. \quad (6)$$

Покажем теперь справедливость (1). Если через $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{U}$, обозначить правую часть (1), то учитывая (2), (4), лемму 1**(a)** и $z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}$-инвариантность $b_2 b_1^{\mathrm{d}}$, имеем

$$(\lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}})f(\lambda) = b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + (\lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}})R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})b_3 b_2^{\mathrm{d}} + (\lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}})R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}})b_2 b_1^{\mathrm{d}}(e + z b_3 b_2^{\mathrm{d}} R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})) =$$

$$= b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + \left(b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + b_3 b_2^{\mathrm{d}} + \frac{1}{\lambda}(\lambda b_2 b_1^{\mathrm{d}} - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) - b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})\right) b_3 b_2^{\mathrm{d}} +$$

$$+ \left(b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + \frac{1}{\lambda}(\lambda b_3 b_2^{\mathrm{d}} - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}}) - \frac{1}{\lambda} b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} + e - \lambda(e - b_2 b_1^{\mathrm{d}})R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}})\right) b_2 b_1^{\mathrm{d}} \left(e + z b_3 b_2^{\mathrm{d}} R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})\right) =$$

$$= b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + b_3 b_2^{\mathrm{d}} - b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}}) b_3 b_2^{\mathrm{d}} + b_2 b_1^{\mathrm{d}}(e + z b_3 b_2^{\mathrm{d}} R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})) = e,$$

где последнее равенство является следствием леммы 1**(b)**. С другой стороны, учитывая (6), следующую цепочку соотношений

$$\lambda b_3 b_2^{\mathrm{d}} - b_3 b_2^{\mathrm{d}} z b_3 b_1^{\mathrm{d}} = (\lambda - b_3 b_2^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}}) b_3 b_2^{\mathrm{d}} + b_3 b_2^{\mathrm{d}} z (b_3 b_2^{\mathrm{d}} - b_3 b_1^{\mathrm{d}}) = (\lambda - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}}) b_3 b_2^{\mathrm{d}} - b_3 b_2^{\mathrm{d}} z b_2 b_1^{\mathrm{d}} = (\lambda - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}}) b_3 b_2^{\mathrm{d}}$$

и аналогично доказываемое равенство $\lambda b_2 b_1^{\mathrm{d}} - b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_1^{\mathrm{d}} = (\lambda - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) b_2 b_1^{\mathrm{d}} - b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}}$, имеем

$$f(\lambda)(\lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}}) = b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})(\lambda b_3 b_2^{\mathrm{d}} - b_3 b_2^{\mathrm{d}} z b_3 b_1^{\mathrm{d}}) + R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}})(\lambda b_2 b_1^{\mathrm{d}} - b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_1^{\mathrm{d}}) +$$

$$+ R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})(\lambda - z_{b_3 b_1^{\mathrm{d}}}) = b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + R(\lambda, z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}})(\lambda - z_{b_3 b_2^{\mathrm{d}}}) b_3 b_2^{\mathrm{d}} +$$

$$+ R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}})((\lambda - z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) b_2 b_1^{\mathrm{d}} - b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}}) + R(\lambda, z_{b_2 b_1^{\mathrm{d}}}) b_2 b_1^{\mathrm{d}} z b_3 b_2^{\mathrm{d}} = b_3^{\mathrm{d}} + b_1 + b_3 b_2^{\mathrm{d}} + b_2 b_1^{\mathrm{d}} = e,$$

и равенство (1) полностью доказано. $\square$

Следствие 3. *Пусть $z \in \mathcal{A}^+$, точка $r(z)$ является о-полюсом $R(.,z)$. Если $b \in OI(\mathcal{A})$ является z-инвариантным, то в достаточно малой проколотой окрестности $r(z)$*

$$R(\lambda, z) = R(\lambda, z_{b^{\mathrm{d}}})b^{\mathrm{d}} + R(\lambda, z_b)b + R(\lambda, z_b)bzb^{\mathrm{d}}R(\lambda, z_{b^{\mathrm{d}}}), \ bR(\lambda, z)b^{\mathrm{d}} = R(\lambda, z_b)bzb^{\mathrm{d}}R(\lambda, z_{b^{\mathrm{d}}}). \quad (7)$$

Кроме того, если m, m_1, m_2 — порядки полюсов резольвент $R(.,z)$, $R(.,z_b)$, $R(.,z_{b^{\mathrm{d}}})$ в $r(z)$, соответственно (возможно $m_1 = 0$ или $m_2 = 0$), то $\max\{m_1, m_2\} \le m \le m_1 + m_2$.

Доказательство. Равенство (1) превращается в первое равенство из (7), если положить $b_3 = e$, $b_2 = b$, $b_1 = 0$. С учетом леммы 1**(b)**, второе равенство из (7) сразу получается из первого. Последнее утверждение вытекает из (7) и равенств

$$R(\lambda, z_b) = \frac{1}{\lambda}b^{\mathrm{d}} + bR(\lambda, z)b, \quad R(\lambda, z_{b^{\mathrm{d}}}) = \frac{1}{\lambda}b + b^{\mathrm{d}}R(\lambda, z)b^{\mathrm{d}},$$

следующих из (7) и имеющих место в некоторой проколотой окрестности точки $r(z)$. $\square$

5. Коэффициенты главной части ряда Лорана в разложении резольвенты. Пусть λ_0 — изолированная точка спектра $\sigma(x)$ элемента x, принадлежащего произвольной банаховой алгебре $\mathcal{B}$. Тогда в окрестности λ_0 резольвента $R(.,x)$ раскладывается в ряд Лорана $R(\lambda, x) = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} x_i(\lambda - \lambda_0)^i$, и коэффициенты x_i удовлетворяют, среди прочих, соотношению $x_{-i}x_{-j} = x_{-i-j+1}$ при $i, j \ge 1$. Ясно, что если λ_0 — полюс $R(.,x)$ порядка m, то

$$x_{-m}x_{-1} = x_{-1}x_{-m} = x_{-m}, \quad x_{-m}x_{-i} = x_{-i}x_{-m} = 0, \ i > 1. \quad (8)$$

Как показано в [2], в частном случае оператора $T \in \mathcal{L}(E)$, $T \ge 0$, такого, что $r(T)$ — полюс $R(.,T)$ конечного ранга, $R(\lambda, T) = \sum\limits_{i=-m}^{+\infty} T_i(\lambda - r(T))^i$, $T_{-m} \ne 0$, имеют места равенства

$$T_{-m}|T_{-1}| = |T_{-1}|T_{-m} = T_{-m}, \ \ T_{-m}|T_{-i}| = |T_{-i}|T_{-m} = 0, \ i > 1. \quad (9)$$

Если $0 \le z \in \mathcal{A}$, $r(z)$ — полюс $R(.,z)$ порядка m, то в окрестности $r(z)$ имеет место разложение

$$R(\lambda, z) = \sum_{i=-m}^{+\infty} z_i(\lambda - r(z))^i, \quad z_{-m} \ne 0. \quad (10)$$

Очевидно, $z_{-m} \ge 0$. Ниже (теоремы 4, 5) будут даны условия, при которых коэффициенты z_i удовлетворяют следующим равенствам, аналогичным (9),

$$z_{-m}|z_{-1}| = |z_{-1}|z_{-m} = z_{-m}, \quad z_{-m}|z_{-i}| = |z_{-i}|z_{-m} = 0, \ i > 1. \quad (11)$$

Теорема 4. *Предположим, что $z \in \mathcal{A}^+$ и для $R(.,z)$ имеет место разложение* (10), *причем $z_{-1}, \dots, z_{-m}$ обладают модулями. Тогда, если существует $b \in OI(\mathcal{A})$, для которого*

$$z_{-m}b^{\mathrm{d}} = bz_{-m} = 0, \quad z_{-i}b^{\mathrm{d}} \ge 0, \ bz_{-i} \ge 0, \ i > 1, \quad (12)$$

то коэффициенты z_{-i} удовлетворяют соотношениям (11).

Доказательство. Неравенство $0 \le z_{-m}|z_{-i}|$ очевидно, $i \ge 1$. Используя равенства (8) имеем $z_{-m} = z_{-m}z_{-1} \le z_{-m}|z_{-1}|$. В обратную сторону, если $i \ge 1$, то

$$z_{-m}|z_{-i}| \le z_{-m}|bz_{-i}| + z_{-m}|b^{\mathrm{d}}z_{-i}| = z_{-m}bz_{-i} + z_{-m}b^{\mathrm{d}}|z_{-i}| = z_{-m}z_{-i},$$

откуда $z_{-m}|z_{-i}| \le 0$ при $i > 1$ и $z_{-m}|z_{-i}| \le z_{-m}$ при $i = 1$. Оставшиеся два равенства в (11) доказываются аналогично. $\square$

Ниже (теорема 5) будут даны условия, гарантирующее существование порядкового идемпотента $b \in OI(\mathcal{A})$, для которого справедливо (12).

Назовем упорядоченную банахову алгебру $\mathcal{A}$ *разложимой*, если из соотношений $z \geq 0$ и $z^2 = 0$ следует существование $b \in OI(\mathcal{A})$, для которого $zb^{\mathrm{d}} = bz = 0$. Если банахова решетка E обладает порядково непрерывной нормой, в частности, $E = L_p$, $1 \leq p < \infty$, или $E = c_0$, то алгебра $\mathcal{L}(E)$ является разложимой. Действительно, пусть $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$ и $T^2 = 0$. Компонента B, порожденная областью значений $R(T) = \{Tx : x \in E\}$ оператора T, является проекционной. Очевидно, $P_{B^{\mathrm{d}}}T = 0$. Если $|x| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i |Tx_i|$, где $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in E$, то

$$|TP_Bx| \leq TP_B|x| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i TP_BT|x_i| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T^2|x_i| = 0,$$

а значит T обращается в нуль на идеале, порожденном $R(T)$. Поскольку замыкание этого идеала совпадает с B, имеем $TP_B = 0$. В общем случае, алгебра $\mathcal{L}(\ell_\infty)$ не является разложимой. Действительно, если $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0 \subset \ell_\infty$ и $x_i > 0$ для всех i, а функционал $x^* \in \ell_\infty^*$ такой, что $x^* \geq 0$ и $x^*x = 0$, то оператор $T = x^* \otimes x > 0$ обладает свойством $T^2 = 0$, но для любого порядкового проектора $P > 0$ будет $PT = x^* \otimes Px > 0$, т.е. $\mathcal{L}(\ell_\infty)$ не является разложимой.

Теорема 5. *В предположениях теоремы* 4 *каждое из следующих условий гарантирует существование* $b \in OI(\mathcal{A})$, *удовлетворяющего соотношениям* (12):

(a) *Точка* $r(z)$ *является о-полюсом* $R(.,z)$ *и существует* $b_0 \in OI(\mathcal{A})$, *для которого каждая из резольвент* $R(.,z_{b_0})$ *и* $R(.,z_{b_0^{\mathrm{d}}})$ *либо определена в* $r(z)$, *либо имеет в* $r(z)$ *простой полюс*;

(b) *Алгебра* $\mathcal{A}$ *разложимая, коэффициенты* $z_{-m} \geq 0, \ldots, z_{-1} \geq 0$;

(c) *Алгебра* $\mathcal{A}$ *разложимая, порядок полюса* $R(.,z)$ *в* $r(z)$ *равен двум.*

Доказательство. **(a)** В силу следствия 3 порядок полюса $R(.,z)$ в $r(z)$ не более двух. Используя первое равенство из (7) имеем $R(\lambda, z)b = R(\lambda, z_b)b$ при λ близких к $r(z)$, $\lambda \neq r(z)$, откуда $z_{-2}b = \lim\limits_{\lambda \to r(z)} (\lambda - r(z))^2 R(\lambda, z_b)b = 0$. Аналогично, $b^{\mathrm{d}} z_{-2} = 0$.

(b) Считаем $m \geq 2$. Тогда $z_{-m}^2 = 0$. Учитывая разложимость $\mathcal{A}$, заключаем существование $b \in OI(\mathcal{A})$ такого, что $z_{-m}b^{\mathrm{d}} = bz_{-m} = 0$. Неравенства $z_{-i}b^{\mathrm{d}} \geq 0$ и $bz_{-i} \geq 0$, когда $i \geq 1$, очевидны.

(c) Вновь существует $b \in OI(\mathcal{A})$, для которого $z_{-2}b^{\mathrm{d}} = bz_{-2} = 0$. Используя (10) имеем

$$z_{-1}b^{\mathrm{d}} = \lim_{\lambda \downarrow r(z)} \left((\lambda - r(z))R(\lambda, z)b^{\mathrm{d}} - \frac{1}{\lambda - r(z)} z_{-2}b^{\mathrm{d}} \right) = \lim_{\lambda \downarrow r(z)} (\lambda - r(z))R(\lambda, z)b^{\mathrm{d}} \geq 0;$$

аналогично, $bz_{-1} \geq 0$. □

В общем случае, как можно убедиться даже на примере матриц, элемента $b \in OI(\mathcal{A})$, удовлетворяющего соотношениям (12), может не существовать.

Литература

1. **Abramovich Y.A., Aliprantis C.D.** An invitation to operator theory. GSM, Vol. 50. 2002.

2. **Alekhno E.A.** Some properties of essential spectra of a positive operator // Positivity. 2007. Vol. 11, № 3. P. 375–386.

3. **Alekhno E.A.** Some properties of essential spectra of a positive operator, II // Positivity. 2009. Vol. 13, № 1. P. 3–20.

4. **Aliprantis C.D., Burkinshaw O.** Positive operators. Academic Press, 1985.

5. **Caselles V.** On the peripheral spectrum of positive operators // Isr. J. Math. 1987. Vol. 58, № 2. P. 144–160.

6. **Mouton S., Raubenheimer H.** More spectral theory in ordered Banach algebras // Positivity. 1997. Vol. 1, № 4. P. 305–317.

7. **Raubenheimer H., Rode S.** Cones in Banach algebras // Indag. Math., N.S. 1996. Vol. 7, № 4. P. 489–502.

Белорусский государственный университет, г. Минск