Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений - 2006
Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2006. Том ?. С. 1–??

УДК 517.982

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ МАЗУРА. II

Е. А. Алехно

Let $\mathcal{M}$ be the set of Mazurs' functional (otherwise — generalized limits). In the article the new approach is suggested and new formulas for the calculation of the function $\tau(x) = \sup\limits_{x^*\in\mathcal{M}} x^*x$ are leaded. Prove that $\mathcal{M}$ is not weakly compact. The space of almost convergent to zero sequences ac_0 is studied. In particular, prove that ac_0 is not complement at ℓ_∞. Structural properties $\mathcal{M}$ of the set $\mathcal{M}$ are considered. Prove, for example, that $\mathcal{M}$ is coincide with the positive part of unit sphere of some AL-space.

Настоящая статья представляет собой продолжение исследований начатых автором в работе [2] и посвященных изучению специального вида линейных функционалов, называемых функционалами Мазура, на пространстве ℓ_∞. С этими функционалами непосредственно связано понятие почти сходимости. Для изучения этого понятие рассматривается специального вида сублинейная функция $\tau(x) = \sup\limits_{x^*\in\mathcal{M}} x^*x$, где $\mathcal{M}$ — множество всех функционалов Мазура. Даются новые формулы для оценки и вычисления τ в терминах пределов числовых последовательностей. Как следствие, доказывается, в частности, что множество $\mathcal{M}$ не слабо компактно. Этому посвящена первая часть статьи. Во второй части приводятся необходимые для дальнейшего свойства пространства ℓ_∞ и его сопряженного ℓ_∞^*, как банаховых решеток. Третья часть посвящена изучению свойств функционалов Мазура, как положительных функционалов на банаховой решетке ℓ_∞. Так, например, множество $\mathcal{M}$ оказывается в точности положительной частью единичного шара некоторого замкнутого подпространства Рисса сопряженного пространства ℓ_∞^*, являющегося AL-пространством.

Используемые в статье определения, обозначения и факты относящиеся к теории банаховых пространств, банаховых решеток и операторов в них, можно найти в [1, 4]; см. также [11].

§ 1. Пространство почти сходящихся к нулю последовательностей ac_0. Напомним, что функционал x^* на пространстве ограниченных последовательностей ℓ_∞ называется *функционалом Мазура*, если:

1) x^* — положительный функционал;
2) $x^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x^*(0, x_1, x_2, \ldots)$ для любого элемента $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$;
3) $x^*e = 1$, где $e = (1, 1, 1, \ldots)$.

Множество всех функционалов Мазура обозначим $\mathcal{M}$. В 1929 Мазур показал, что $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Существует много способов доказательства этого факта. Приведем один из них (относящийся к числу самых коротких). Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{e_1+\ldots+e_n}{n}$ в пространстве $\ell_1 \subset \ell_\infty^*$

Keywords: *generalized limit, almost convergence, sequence space, Banach lattice, weak topology*
2000 Mathematics Subject Classification: 46E30

(здесь e_n — стандартный базис ℓ_1). Тогда $\|x_n\| = 1$. В силу теоремы Алаоглу ([4], стр. 141) у последовательности x_n существует обобщенная предельная точка $x_0^{**} \in \ell_\infty^*$. Ясно, что для функционала x_0^{**} выполняются свойства 1) и 3) выше. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_\infty$. Для того, чтобы убедиться в справедливости 2) зафиксируем $\epsilon > 0$ и найдем n такое, что

$$|(x_0^{**} - x_n)(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots)| \le \frac{\epsilon}{2}, \quad \frac{\|x\|}{n} \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Тогда

$$|x_0^{**}(x_1, x_2, x_3, \dots) - x_0^{**}(0, x_1, x_2, \dots)| \le$$

$$\le |(x_0^{**} - x_n)(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots)| + |x_n(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots)| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{x_n}{n} \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\|x\|}{n} \le \epsilon,$$

откуда, в силу произвольности ϵ, получаем требуемое.

Произвольный функционал Мазура x^* удовлетворяет также следующим свойствам, часто участвующим в его определении:

4) $x^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = x^*(x_2, x_3, x_4, \dots)$;

5) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \le x^*x \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$;

6) $\|x^*\| = 1$.

Пусть $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ — оператор одностороннего сдвига на ℓ_∞. Тогда условие 2) в определении функционала Мазура равносильно равенству $T^*x^* = x^*$, откуда следует, что $\mathcal{M} \subset N(I - T^*)$ и для любого $x \in R(I - T)$ будет $x^*x = 0$ для всех $x^* \in \mathcal{M}$ (здесь $N(I - T^*)$ — ядро оператора $I - T^*$, а $R(I - T)$ — область значений оператора $I - T$). Ясно, что пространство

$$R(I - T) = \{(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots) : x \in \ell_\infty\} = \{x \in s : \sup_n |\sum_{i=1}^n x_i| < \infty\},$$

где s — пространство всех последовательностей. С нормой $\|x\| = \sup\limits_n |\sum\limits_{i=1}^n x_i|$ пространство $R(I - T)$ превращается в банахово пространство, которое обозначается bs. Пространство bs изометрически изоморфно ℓ_∞.

Для последовательности $x \in \ell_\infty$ положим $\tau(x) = \sup\limits_{x^* \in \mathcal{M}} x^*x$. Легко видеть, что в действительности $\tau(x) = \max\limits_{x^* \in \mathcal{M}} x^*x$ и τ — сублинейная функция на ℓ_∞. Ниже (см. теорему 2) будут даны несколько способов вычисления функции τ по средствам поисков пределов числовых последовательностей. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть Z — банахово пространство, Z_0 — (необязательно замкнутое) подпространство Z, K — конус в Z. Тогда функционал z_0^* на Z_0 допускает продолжение до положительного функционала z^* на Z с $\|z^*\| \le 1$ в том и только том случае, если $z_0^*x \ge -1$ для любого $x \in (B_Z + K) \cap Z_0$, где, как обычно, B_Z — замкнутый единичный шар в Z.*

Для случая, когда Z_0 — замкнутое подпространство, справедливость данного утверждения отмечалась в [7], стр. 20, упр. 2.3. Для полноты рассуждений приведем полное доказательство, идея которого заимствована из доказательства предложения 4.5 в [11] (стр. 76).

Доказательство. Необходимость очевидна, покажем достаточность. Рассмотрим в Z_0 гиперплоскость $H_0 = \{x \in Z_0 : z_0^*x = -1\}$. Тогда H_0 не пересекается с внутренностью множества $B_Z + K$. В самом деле, если бы нашлась точка $x \in H_0$ являющаяся внутренней точкой $B_Z + K$, то при малом $\epsilon > 0$ $(1 + \epsilon)x \in Z_0 \cap (B_Z + K)$ и $z_0^*(1 + \epsilon)x = -(1 + \epsilon) < -1$, что невозможно. Следовательно, в Z существует гиперплоскость H, содержащая H_0 и непересекающаяся с внутренностью множества $B_Z + K$. Значит $0 \notin H_0$ и существует функционал $z^* \in Z^*$ такой, что $H = \{x \in Z : z^*x = -1\}$. Ясно, что $H \cap Z_0 = H_0$, т.е. z^* — продолжение z_0^*. Если $x \in K$, то $x \in B_Z + K$, откуда $z^*x \ge -1$, а следовательно, в силу того, что K — конус, $z^*x \ge 0$, т.е. z^* — положительный функционал. □

Лемма 2. *Пусть a_n — последовательность действительных чисел. Тогда*

$$\inf\{a_m - a_n : n \geq m\} > -\infty$$

тогда и только тогда, когда существует такая неотрицательная неубывающая последовательность b_n, что последовательность $|a_n + b_n|$ ограничена.

Доказательство. Необходимость. Пусть $a_m - a_n \geq r$ при всех $n \geq m$. Тогда $a_1 - r \geq a_n$ для каждого n. Если a_n неотрицательна, то положив $b_n \equiv 0$ получаем $|b_n + a_n| \leq |a_1 - r|$, и требуемая последовательность построена. В противном случае, выбрав натуральное k_0 таким, что $a_1, \ldots, a_{k_0-1} \geq 0$ и $a_{k_0} < 0$ (возможно $k_0 = 1$), положим $b_1 = \ldots = b_{k_0-1} = 0$. Найдем $k_1 > k_0$ для которого $a_{k_0}, \ldots, a_{k_1-1} \geq a_{k_0}$ и $a_{k_1} < a_{k_0}$ и определим $b_{k_0} = \ldots = b_{k_1-1} = -a_{k_0}$ (если такого k_1 не существует, то полагаем $b_k = -a_{k_0}$ для $k \geq k_0$). Тогда для $i = k_0, \ldots, k_1 - 1$ справедливы соотношения

$$r \leq a_{k_0} - a_i = -b_i - a_i \leq -b_i - a_{k_0} = 0,$$

откуда $|a_i + b_i| \leq |r|$. Продолжая этот процесс дальше, строим последовательность b_n, $0 \leq b_n \uparrow$, для которой выполнено $|a_n + b_n| \leq \max(|r|, |a_1 - r|)$, что и требовалось.

Достаточность. Пусть существуют $r > 0$ и последовательность $0 \leq b_n \uparrow$ такие, что $|b_n + a_n| \leq r$. Предположим противное, тогда для некоторых натуральных $n_0 > m_0$ выполняется неравенство $a_{m_0} - a_{n_0} \leq -3r$. Поскольку $-a_{m_0} - b_{m_0} \leq r$, получаем $b_{n_0} + r \geq b_{m_0} + r \geq -a_{m_0} \geq 3r - a_{n_0}$, откуда $b_{n_0} + a_{n_0} \geq 2r$, противоречие. □

Теорема 3. *Для последовательности $x \in \ell_\infty$ и числа $\xi \geq 0$ выполняется неравенство $\tau(x) \leq \xi$ в том и только том случае, когда для любого λ, $0 < \lambda < \frac{1}{\xi}$, справедливо*

$$\phi_\lambda(x) = \inf_{k,m}\{k - \lambda \sum_{i=1}^{k} x_{m+i}\} > -\infty \qquad /!/$$

(*при $\xi = 0$ полагаем $\frac{1}{\xi} = +\infty$*).

Доказательство. Прежде всего отметим, что утверждение леммы тривиально в случае, когда $x \in bs$. Следовательно, считаем, что $x \notin bs$. Для доказательства необходимости зафиксируем число $\xi_1 > \xi$. Рассмотрим пространство $bs_x = bs \oplus \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Тогда bs_x — подпространство в частично упорядоченном пространстве ℓ_∞. Определим на bs_x положительный линейный функционал z_x^* по правилу $z_x^*(y + \lambda x) := \lambda\xi_1$, $y \in bs$. Тогда, если z_x^* не является непрерывным на bs_x (в случае, когда x принадлежит замыканию bs_x в ℓ_∞), то он не будет ограничен на множестве $bs \cap B_{\ell_\infty}$ (а значит не будет ограничен снизу на этом множестве) и, тем более, не будет ограничен снизу на $bs_x \cap (B_{\ell_\infty} + \ell_\infty^+)$. В случае же, когда z_x^* непрерывен на bs, он не может быть продолжен на все пространство ℓ_∞ с сохранением положительности и с нормой не превосходящей единицу. В самом деле, если существует такое его продолжение z^*, то функционал $\frac{z^*}{\|z^*\|} \in \mathcal{M}$ и $\frac{z^*}{\|z^*\|}x > \xi_1$, что невозможно. Тогда по лемме 1 функционал z_x^* опять же не будет ограничен снизу на $bs_x \cap (B_{\ell_\infty} + \ell_\infty^+)$ числом -1. Значит существует число $\lambda \geq 0$, элементы $u \in B_{\ell_\infty}$, $v \in bs$, $w \in \ell_\infty^+$ такие, что $-\lambda\xi_1 < -1$ и $w + u = v - \lambda x$. Следовательно $v - \lambda x \geq -e$ или $e - \lambda x \geq -v$. Откуда

$$k - \lambda \sum_{i=1}^{k} x_{m+i} \geq -\sum_{i=1}^{k} v_{m+i} = -\sum_{i=m+1}^{m+k} v_i \geq -2\|v\|_{bs} \qquad /!!/$$

для всех k, m и $\lambda > \frac{1}{\xi_1}$. Далее, если $\lambda' < \lambda$, то $\phi_{\lambda'}(x) > -\infty$. Действительно, если бы существовали индексы k_n, m_n такие, что $k_n - \lambda' \sum_{i=1}^{k_n} x_{m_n+i} \to -\infty$, то

$$\frac{1}{\lambda}k_n - \sum_{i=1}^{k_n} x_{m_n+i} \leq \frac{1}{\lambda'}k_n - \sum_{i=1}^{k_n} x_{m_n+i} \to -\infty,$$

вопреки /!!/. В силу произвольности $\xi_1 > \xi$, получаем справедливость требуемого утверждения для всех $0 < \lambda < \frac{1}{\xi}$.

Достаточность. Вновь фиксируем $\xi_1 > \xi$ и покажем, что для функционала z_x^* определенного на bs_x по правилу $z_x^*(y+\lambda x) = \lambda\xi_1$ не существует продолжение на все пространство ℓ_∞ с нормой не превосходящей единицу, а тем более и с нормой равной единице. Фиксируем произвольное λ удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{\xi} > \lambda > \frac{1}{\xi_1}$. Введем последовательность $a_n = -n + \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. В силу условия /!/ и леммы 2 существуют такая неотрицательная неубывающая последовательность b_n и число m, что $|a_n + b_n| \le m$. Положим $v_n = a_n + b_n$. Тогда

$$v_1 \ge a_1 = -1 + \lambda x_1$$

и

$$v_{n+1} = a_{n+1} - a_n + b_{n+1} - b_n + v_n \ge -1 + \lambda x_{n+1} + v_n$$

для $n \ge 1$. Таким образом, в пространстве ℓ_∞ найдутся элементы v и $w \ge 0$ такие, что справедливо равенство $-e + w = v - Tv - \lambda x$ или элемент $u - \lambda x \in bs_x \cap (B_{\ell_\infty} + \ell_\infty^+)$, где $u = v - Tv \in bs$ и $\lambda\xi_1 < -1$. В силу леммы 1 функционал z_x^* нельзя продолжить на все ℓ_∞ так, чтобы норма полученного функционала не превосходила единицы. $\square$

Следующая лемма позволит значительно уточнить теорему 3.

Лемма 4. *Для последовательности $x \in \ell_\infty$ и числа $\xi \ge 0$ следующие условия эквивалентны:*

а) *если $0 < \lambda < \frac{1}{\xi}$, то $\inf\limits_{k,m} \{k(1 - \lambda\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_{m+i})\} > -\infty$;*

б) *если $0 < \lambda < \frac{1}{\xi}$, то не существует последовательностей $k_n \to +\infty$ и m_n таких, что $1 - \lambda\frac{1}{k_n}\sum\limits_{i=1}^{k_n} x_{m_n+i} \le 0$;*

в) *для любого λ, $0 < \lambda < \frac{1}{\xi}$, существует k_0 такое, что $\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_{m+i} < \frac{1}{\lambda}$ для $k \ge k_0$ и всех m;*

г) $\limsup\limits_{k\to\infty} \limsup\limits_{m\to\infty} \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_{m+i} \le \xi$;

д) $\limsup\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{m} \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_{m+i} \le \xi$;

Доказательство. а) $\Rightarrow$ г). Пусть $0 < \lambda < \frac{1}{\xi}$. Существует r такое, что $k(1 - \lambda\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_{m+i}) \ge r$ для всех k и m. Тогда $\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_{m+i} \le \frac{1}{\lambda}(1 - \frac{r}{k})$, следовательно $\limsup\limits_{m\to\infty} \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_{m+i} \le \frac{1}{\lambda}(1 - \frac{r}{k})$, откуда $\limsup\limits_{k\to\infty}\limsup\limits_{m\to\infty} \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_{m+i} \le \frac{1}{\lambda}$, что и требовалось.

г) $\Rightarrow$ б). В предположении противного, найдем последовательности $k_n \to \infty$ и m_n для которых имеет место неравенство

$$\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} x_{m_n+i} \ge \frac{1}{\lambda}. \qquad /!/$$

Фиксируем такое $\epsilon > 0$, что $\xi + \epsilon < \frac{1}{\lambda}$. Тогда для некоторого k_0 и всех $m \ge$ некоторого m_0 справедливо неравенство $\frac{1}{k_0}\sum\limits_{i=1}^{k_0} x_{m+i} \le \xi + \frac{\epsilon}{2}$. Считаем $k_n \ge m_0$ и $\frac{(m_0+k_0)\|x\|}{k_n} \le \frac{\epsilon}{2}$. Тогда, представив k_n в виде $k_n = m_0 + k_0 p + l$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $0 \le l < k_0$, имеем

$$\frac{x_{m_n+1} + \ldots + x_{m_n+k_n}}{k_n} = \frac{x_{m_n+1} + \ldots + x_{m_n+m_0+l}}{k_n} +$$

$$+ \frac{k_0}{k_n}\left(\frac{x_{m_n+m_0+l+1} + \ldots + x_{m_n+m_0+l+k_0}}{k_0} + \ldots + \frac{x_{m_n+k_n-k_0+1} + \ldots + x_{m_n+k_n}}{k_0}\right) \le$$

$$\leq \frac{(m_0+k_0)\|x\|}{k_n} + \frac{k_0 p}{k_n}(\xi + \frac{\epsilon}{2}) \leq \xi + \epsilon < \frac{1}{\lambda},$$

вопреки /!/.

б) $\Rightarrow$ а). Для доказательства достаточно заметить, что в случае существования последовательностей k_n и m_n таких, что

$$k_n\left(1 - \lambda \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} x_{m_n+i}\right) \to -\infty, \qquad /!!/$$

где $0<\lambda<\frac{1}{\xi}$, последовательность k_n не может быть ограничена. Действительно, иначе можно считать $k_n = k_0$ для всех n, откуда $k_0 - \lambda \sum\limits_{i=1}^{k_0} x_{m_n+i} \geq k_0 - \lambda k_0\|x\|$, что противоречит /!!/.

Ясно, что б) $\iff$ в), в) $\iff$ д). $\square$

Для последовательности $x \in \ell_\infty$ положим

$$\tau_1(x) = \inf \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{m+m_i}, \quad \tau_2(x) = \inf \sup_{m} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{m+m_i}, \quad \tau_3(x) = \limsup_{k\to\infty} \sup_{m} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{m+i},$$

$$\tau_4(x) = \lim_{k\to\infty} \sup_{m} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{m+i}, \quad \tau_5(x) = \limsup_{k\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{m+i}, \quad \tau_6(x) = \lim_{k\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{m+i},$$

где в определении τ_1 и τ_2 точная нижняя грань берется по всем натуральным $m_1,\ldots,m_k$ (именно сублинейную функцию τ_1 использовал Мазур при доказательстве, что множество $\mathcal{M} \neq \emptyset$).

Теорема 5. *Все функции τ_i, $i = 1,\ldots,6$ корректно определены, равны между собой и совпадают с сублинейной функцией τ.*

Доказательство. Равенство $\tau = \tau_1$ получено в [9], равенство $\tau = \tau_6$ в [6], а равенства $\tau = \tau_3 = \tau_5$ следуют из теоремы 3 и леммы 4. Далее, $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$ влекут $\tau = \tau_2$, а соотношения

$$\tau_6(x) = \liminf_{k\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{m+i} \leq \liminf_{k\to\infty} \sup_{m} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{m+i} \leq \tau_3(x)$$

влекут $\tau = \tau_4$. $\square$

Отметим, что в [6] показано также равенство $\tau = \tau_5$ и, таким образом, равенство $\tau = \tau_3$ могло бы быть получено лишь из леммы 4, без использования теоремы 3. Тем не менее, именно теорема 3 дает, как новый способ оценки функции τ и доказательства равенства $\tau = \tau_5$, так и подсказывает идею для нахождения равенств $\tau = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$, которые до этого не отмечались.

Следует заметить, что любая из сублинейных функций τ_i, $i = 1,\ldots,6$ может быть использована для доказательства существования функционалов Мазура. Достаточно лишь воспользоваться теоремой Хана - Банаха и заметить, что любой функционал x^* удовлетворяющий неравенству $x^* \leq \tau_i$ для некоторого $i = 1,\ldots,6$ является функционалом Мазура. Отсюда легко выводятся и равенства $\tau = \tau_i$ (детали см. в [6]).

Ограниченная последовательность x называется *почти сходящейся к нулю*, если $x^*x = 0$ для любого функционала $x^* \in \mathcal{M}$. Совокупность всех почти сходящихся к нулю последовательностей обозначим ac_0. Тогда ac_0 — банахово пространство с нормой индуцированной из ℓ_∞. Справедливы [5] строгое включение $bs + c_0 \subset ac_0$ и равенство $\overline{bs} = ac_0$, где замыкание берется в ℓ_∞ (короткое доказательство последнего факта см. в следствии 12 ниже). Ясно, что $x \in ac_0$ в том и только том случае, когда $\tau(x) = \tau(-x) = 0$. С помощью теоремы 5, а точнее равенства $\tau = \tau_3$, легко получается следующий известный результат Лоренца.

Следствие 6. *Ограниченная последовательность $x \in ac_0$ в том и только том случае, когда $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_{m+i} = 0$ равномерно по m.*

В силу классической теоремы Филлипса пространство c_0 не дополняемо в ℓ_∞, т.е. не существует непрерывного проектора P с областью значений $R(P) = c_0$. Аналогичный результат имеет место и для случая пространство ac_0. Нам понадобится

Лемма 7. *Пусть Y — замкнутое подпространство ℓ_∞, причем $e_i \in Y$ для всех i, координатные функции $y \to y_i$ непрерывны и $\frac{y_1+\ldots+y_n}{n} \to 0$ для любой последовательности $y \in Y$. Тогда Y не дополняемо в ℓ_∞.*

Доказательство. В предположении противного, существует такой непрерывный оператор $P : \ell_\infty \to Y$, что $Py = y$, если $y \in Y$. Положим $y_n^* = \frac{e_1+\ldots+e_n}{n} \in Y^*$. Тогда $y_n^* \to 0$ $\sigma(Y^*, Y)$, откуда $P^* y_n^* \to 0$ $\sigma(\ell_\infty^*, \ell_\infty)$. В силу леммы Филлипса ([11], стр. 130)

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |P^* y_n^*(e_k)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |y_n^*(Pe_k)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |y_n^*(e_k)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1,$$

противоречие. □

Из следствия 6 и леммы 7 вытекает

Теорема 8. *Пространство ac_0 не является дополняемым в ℓ_∞.*

Отметим, что, как легко следует из следствия 6, ac_0 не является сепарабельным и, таким образом, значительно “больше"сепарабельного пространства c_0. Более того, не сепарабельность ac_0 не дает возможность для доказательства теоремы 8 воспользоваться результатом Собчика [10] о том, что если c_0 — замкнутое подпространство сепарабельного пространства Z, то c_0 дополняемо в Z. Кроме того, из теоремы 8 следует [8], что ac_0 не изоморфно ℓ_∞.

Множество $\mathcal{M}$ является ограниченным, замкнутым, выпуклым множеством в пространстве ℓ_∞^*, следовательно оно будет замкнуто и в слабой топологии. Более того, в силу теоремы Алаоглу множество $\mathcal{M}$ является $\sigma(\ell_\infty^*, \ell_\infty)$-компактным. Тем не менее, имеет места следующая

Теорема 9. *Множество $\mathcal{M}$ не является слабо компактным.*

Доказательство. В силу теоремы Гротендика ([11], стр. 126-127) для доказательства достаточно найти дизъюнктную систему множеств $\{U_n\}$, $U_n \subseteq \mathbb{N}$ и последовательность функционалов $x_n^* \in \mathcal{M}$ для которых $x_n^* \chi_{U_n} = 1$ при всех n. Пусть $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} R_i$ — произвольное разбиение $\mathbb{N}$ на непересекающиеся бесконечные множества R_i. Введем также следующее разбиение $\mathbb{N}$ на множества вида $N_k = \{\frac{k(k-1)}{2}+1, \ldots, \frac{k(k+1)}{2}\}$, где $k \in \mathbb{N}$. Положим $U_n = \bigsqcup_{k\in R_n} N_k$. Ясно, что тогда $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Более того, $\tau_5(\chi_{U_n}) = 1$ для всех n, откуда, в силу теоремы 5, следует существование функционалов $x_n^* \in \mathcal{M}$ таких, что $x_n^* \chi_{U_n} = 1$. Таким образом, множество $\mathcal{M}$ не является слабо компактным. □

В силу теоремы Крейна - Мильмана $\mathcal{M}$ совпадает с $\sigma(\ell_\infty^*, \ell_\infty)$-замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек. Из теоремы 9 сразу следует

Следствие 10. *Множество крайних точек $\mathcal{M}$ не менее, чем счетно.*

Другими словами, множество $\mathcal{M}$ не представимо в виде выпуклой оболочки конечного числа точек, т.е. не является выпуклым многогранником. Из теоремы 9 и теоремы Крейна - Шмульяна ([4], стр. 158) следует, что слабо компактным не будет являться и множество крайних точек $\mathcal{M}$. *Неизвестно, чему равна мощность множества крайних точек $\mathcal{M}$ и будет ли это множество слабо, а следовательно и $\sigma(\ell_\infty^*, \ell_\infty)$-замкнутым.*

§ 2. Банахова решетка ℓ_∞. Пространство ℓ_∞ является полной по Дедекинду банаховой решеткой, более того, даже AM-пространством с единицей e. В силу теоремы Какутани - Боненбласта - Крейнов ([4], стр. 194) ℓ_∞ изометрически порядково изоморфно пространству непрерывных функций $C(S)$ на хаусдорфовом экстремально несвязном компакте S. При этом S можно считать равным расширению $\beta\mathbb{N}$ Стоуна - Чеха множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Отметим, что мощность чеховского “нароста"$\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ равна $2^{\mathfrak{c}}$.

Пространство ℓ_∞^* сопряженное к ℓ_∞ представимо в виде дизъюнктной суммы пространства ℓ_1, совпадающего с компонентой порядково непрерывных функционалов $(\ell_\infty)_n^\sim$, и пространства сингулярных функционалов ℓ_∞^s, т.е. функционалов обращающихся в нуль на пространстве c_0: $\ell_\infty^* = \ell_1 \oplus \ell_\infty^s$. Иными словами, $\ell_\infty^s = (\ell_\infty/c_0)^*$. Положительный функционал x^* является крайней точкой множества $B_{\ell_\infty^*}$ в том и только том случае, когда он является крайней точкой множества $B_{\ell_\infty^*}^+$. В свою очередь, крайние точки множества $B_{\ell_\infty^*}^+$ — это объединение крайних точек $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ множества $B_{\ell_1}^+$ и крайних точек множества $B_{\ell_\infty^s}^+$. Далее, существует изометрически порядковый изоморфизм между пространством ℓ_∞^* и пространством $C(\beta\mathbb{N})$. В силу того, что функционал Дирака δ_s, $s \in \beta\mathbb{N}$, является порядково непрерывным в том и только том, случае, когда $s\in\mathbb{N}$, при этом изоморфизме множеству $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ соответствует множество $\{\delta_s : s\in\mathbb{N}\}$, а множеству крайних точек $B_{\ell_\infty^s}^+$ — множество $\{\delta_s : s \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$ (напомним, что крайние точки $B_{C^*(\beta\mathbb{N})}^+$ — это совокупность функционалов Дирака $\{\delta_s : s \in \beta\mathbb{N}\}$).

С другой стороны, пространство ℓ_∞^* является AL-пространством, следовательно в силу теоремы Какутани - Боненбласта - Накано ([4], стр. 192), оно изометрически порядково изоморфно пространству $L_1 = L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Функция $x \in L_1$ является характеристической функцией атома меры μ тогда и только тогда, когда x — крайняя точка $B_{L_1}^+$. Множество крайних точек $B_{L_1}^+$ + находится во взаимооднозначном соответствии с множеством $\beta\mathbb{N}$, следовательно мощность атомов меры μ равна $2^{\mathfrak{c}}$. Отметим, что, тем не менее, мера μ не является чисто атомической (см. § 3). Отсюда вытекает, что

$$\ell_\infty^* = \ell_1 \oplus \ell_\infty^s \approx L_1 = L_1(\Omega_d) \oplus L_1(\Omega_c), \tag{1}$$

где на Ω_d мера μ дискретна, а на Ω_c непрерывна. Значит

$$\ell_\infty^s = (\ell_\infty/c_0)^* \approx L_1(\Omega_d^s) \oplus L_1(\Omega_c) \approx L_1(\Omega_d) \oplus L_1(\Omega_c), \tag{2}$$

где множество Ω_d^s получается из множества Ω_d выбрасыванием счетного числа атомов соответствующих образу ℓ_1 при изоморфизме в (1). Ясно, что мощность Ω_d^s равна $2^{\mathfrak{c}}$.

§ 2. Функционалы Мазура, как положительные функционалы. В этом пункте изучаются структурные свойства функционалов Мазура, т.е. свойства этих функционалов, как элементов банаховой решетки ℓ_∞.

Теорема 11. *Ядро $N(I - T^*)$ оператора $I - T^*$ является замкнутым подпространством Рисса в AL-пространстве ℓ_∞^*.*

Доказательство. Как AL-пространство, пространство ℓ_∞^* является пространством со строго монотонной нормой, при этом $T^* \geq 0$ и $\|T^*\| \leq 1$, откуда ([1], стр. 216) следует, что $N(I - T^*)$ — подпространство Рисса в ℓ_∞^*. □

Таким образом, $N(I - T^*)$ — AL-пространство с индуцированной нормой и для любого ненулевого x^* такого, что $T^*x^* = x^*$, функционал $\frac{|x^*|}{\|x^*\|} \in \mathcal{M}$. Кроме того, положительная часть единичной сферы пространства $N(I - T^*)$ оказывается в точности множеством $\mathcal{M}$. По теореме Какутани - Боненбласта - Накано пространство $N(I-T^*) = L_1(\Omega_d^{\mathcal{M}}) \oplus L_1(\Omega_c^{\mathcal{M}})$, где на множестве Ω_d мера $\mu_d^{\mathcal{M}}$ дискретна, а на множестве $\Omega_c^{\mathcal{M}}$ мера $\mu_c^{\mathcal{M}}$ непрерывна. Множество крайних точек $\mathcal{M}$ непусто, откуда $\mu_d(\Omega_d^{\mathcal{M}}) > 0$. Более того, мощность атомов меры $\mu_d^{\mathcal{M}}$ совпадает с мощностью множества крайних точек $\mathcal{M}$, значит, в силу следствия 10, число атомов $\mu_d^{\mathcal{M}}$ не менее, чем счетно. Ясно также, что любые две различные крайние точки множества $\mathcal{M}$ являются дизъюнктными. *Неизвестно, будет ли пространство $N(I - T^*)$ дискретным или же $\mu_c^{\mathcal{M}}(\Omega_d^{\mathcal{M}}) > 0$.*

Пространство $N(I - T^*)$ и компонента $L_1(\Omega_d)$ (см. § 2) являются дизъюнктными и, более того, существует ненулевой функционал $x^* \in \ell_\infty^*$ дизъюнктный с ним обоими (см. [2]). Следовательно (сравните с (1))

$$\ell_\infty^* \approx L_1(\Omega_d) \oplus B_{\mathcal{M}} \oplus B,$$

где $B_{\mathcal{M}}$ — компонента, порожденная множеством $\mathcal{M}$ (или множеством $N(I-T^*)$), а компонента B ненулевая. С другой стороны,

$$N(I-T^*) = R(I-T)^\circ = bs^\circ = ac_0^\circ \approx (\ell_\infty/ac_0)^*,$$

где поляры берутся в дуальной системе $\langle \ell_\infty, \ell_\infty^* \rangle$, откуда получается равенство

$$(\ell_\infty/ac_0)^* \approx L_1(\Omega_d^{\mathcal{M}}) \oplus L_1(\Omega_c^{\mathcal{M}})$$

аналогичное равенству (2).

Из теоремы 11 легко вытекает следующий результат [5].

Следствие 12. *Замыкание пространства bs в ℓ_∞ совпадает с ac_0.*

Доказательство. Если найдется $x \in ac_0$ и $x \notin bs$, то для некоторого $x^* \in \ell_\infty^*$ будет $x^*x \neq 0$ и $x^*(bs) = \{0\}$. Ясно, что $(x^*)^+ \neq 0$ или $(x^*)^- \neq 0$. Пусть для определенности $(x^*)^+ \neq 0$. Тогда $0 < (x^*)^+ \in N(I-T^*)$, следовательно $z^* = \frac{(x^*)^+}{\|(x^*)^+\|} \in \mathcal{M}$ и $z^*x \neq 0$, что невозможно. □

Дальнейшие свойства пространств bs, ac_0, других связанным с ними пространств последовательностей и слабых топологий в этих пространствах можно найти в [5].

Критерий того, когда функционал $z^* \in \mathcal{M}$ является крайней точкой множества $\mathcal{M}$ содержится в следующей

Теорема 13. *Для функционала $z^* \in \mathcal{M}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *z^* — крайняя точка множества $\mathcal{M}$;*

б) *для любого $x \in \ell_\infty$ такого, что $z^*x = 0$ существует последовательность $z_n \in bs$ для которой $z^*|x - z_n| \downarrow 0$;*

в) *для любого $x \in \ell_\infty$ существует последовательность $z_n \in bs$ для которой $z^*|x - z_n| \downarrow |z^*x|$;*

г) *для любых $x \in \ell_\infty$ существует $z_n \in bs$ для которой $z^*(x + z_n)^+ \downarrow (z^*x)^+$;*

д) *для любых $x \in \ell_\infty$ существует $z_n \in bs$ для которой $z^*(x + z_n)^- \uparrow (z^*x)^-$;*

е) *для любых $x, y \in \ell_\infty$ существует $z_n \in bs$ для которой $z^*((x + z_n) \vee y) \downarrow (z^*x) \vee (z^*y)$;*

ж) *для любых $x, y \in \ell_\infty$ существует $z_n \in bs$ для которой $z^*((x + z_n) \wedge y) \uparrow (z^*x) \wedge (z^*y)$.*

Доказательство. а) ⇒ б). Определим $z_e^* \in bs_e^*$ по правилу $x^*(x + \lambda e) = \lambda$, $x \in bs$ (см. доказательство теоремы 3). Ясно, что множество $\mathcal{M}$ совпадает со всеми положительными продолжениями z_e^* на все ℓ_∞. Следовательно, в силу теоремы Lipecki - Plachky - Thomsen ([4], стр. 25) z^* — крайняя точка в том и только том случае, когда существуют $z_n \in bs$ и λ_n такие, что $z^*|x - z_n - \lambda_n e| \to 0$. Из соотношений

$$|\lambda_n| = |z^*(x - z_n - \lambda_n e)| \leq z^*|x - z_n - \lambda_n e|$$

следует $\lambda_n \to 0$, а значит $z^*|x - z_n| \to 0$.

б) ⇒ а). Так как $z^*(x - (z^*x)e) = 0$, то $z^*|x - z_n - (z^*x)e| \to 0$ для некоторой последовательности $z_n \in bs$, откуда z^* — крайняя точка.

а) ⇒ в). Существует $z_n \in bs$ для которой $z^*|x - z_n - \lambda_n e| \to 0$, откуда $\lambda_n \to z^*x$, а значит

$$|z^*|x - z_n| - |z^*x|| \leq z^*|x - z_n - (z^*x)e| \to 0,$$

что и требовалось.

а) ⇒ г), д). Фиксируем $x \in \ell_\infty$. Тогда $z^*|x - z_n| \downarrow |z^*x| = (z^*x)^+ + (z^*x)^-$ для некоторой $z_n \in bs$. Из соотношений

$$(z^*x)^+ + (z^*x)^- \leq z^*(x - z_n)^+ + z^*(x - z_n)^- = z^*|x - z_n| \downarrow |z^*x|$$

и неравенств

$$z^*(x - z_n)^+ \leq z^*x^+, \quad z^*(x - z_n)^- \leq z^*x^-$$

следует $z^*(x - z_n)^+ \to (z^*x)^+$, $z^*(x - z_n)^- \to (z^*x)^-$.

г) $\Rightarrow$ е). Существует $z_n \in bs$ для которой $z^*(y-x-z_n)^+ \downarrow z^*(y-x)^+$, откуда, в силу равенства $(x+z_n) \vee y = x + z_n + (y-x-z_n)^+$, имеем

$$z^*(x+z_n) \vee y = z^*x + z^*(y-x-z_n)^+ \downarrow z^*x + (z^*(y-x))^+ = (z^*x) \vee (z^*x).$$

Аналогично доказывается д) $\Rightarrow$ ж).

е) $\Rightarrow$ в). Для элементов x и $-x$ существует $z_n \in bs$ для которой

$$|z^*x| \leftarrow z^*((x+z_n)\vee(-x)) = z^*\left((x+z_n)\vee(-x)-\frac{z_n}{2}\right) = z^*\left(\left(x+\frac{z_n}{2}\right)\vee\left(-\left(x+\frac{z_n}{2}\right)\right)\right) = z^*\left|x+\frac{z_n}{2}\right|,$$

что и требовалось. Аналогично доказывается ж) $\Rightarrow$ в), а импликация в) $\Rightarrow$ б) очевидна. $\square$

Теорема 13 представляет собой аналог известного результата о том, что функционал z^* является крайней точкой $B^+_{\ell^*_\infty}$ тогда и только тогда, когда z^* — решеточный гомоморфизм, что эквивалентно, например, выполнению любого из следующих условий:

$$|z^*x| = z^*|x|, \quad z^*(x \vee y) = (z^*x) \vee (z^*y), \quad z^*(x^+) = (z^*x)^+.$$

Пространство ac_0 не является идеалом в ℓ_∞. Достаточно заметить, что последовательность $(1, -1, 1, -1, \ldots) \in ac_0$. По лемме Цорна в ac_0 существует максимальный по включению идеал J. В силу того, что сумма идеалов — идеал, замыкание идеала также идеал, J будет являться замкнутым и содержать любой другой идеал в ac_0.

Теорема 14. *Имеют места следующие равенства* $(ac_0)^+ = J^+$ *и* $J = (ac_0)^+ - (ac_0)^+$, *где* $(ac_0)^+ = \{x \geq 0 : x \in ac_0\}$, $J^+ = \{x \geq 0 : x \in J\}$.

Доказательство. Включение $(ac_0)^+ \supseteq J^+$ очевидно. Если $x \in (ac_0)^+$, то идеал I_x, порожденный x в ℓ_∞, содержится в ac_0 (если $z \in I_x$, то $|z| \leq \lambda x$ при некотором λ, откуда $|z^*z| \leq \lambda z^*x = 0$ для любого $z^* \in \mathcal{M}$). Значит $I_x \in J$, следовательно $(ac_0)^+ \subseteq J_+$. Таким образом $(ac_0)^+ = J_+$ и, в итоге, $J = (ac_0)^+ - (ac_0)^+$. $\square$

Из леммы 7 следует, что идеал J — недополняемое подпространство в пространстве ℓ_∞.

Результаты данной статьи были анонсированы в [3].

Литература

1. **Abramovich Y.A., Aliprantis C.D.** An invitation to the operator theory. Graduate studies in Mathematics. — Vol. 50. — 2002.

2. **Алехно Е.А.** Некоторые специальные свойства функционалов Мазура. I// Труда Института математики НАН Беларуси. Минск. 2004. Т. 12, №1. С. 17-20.

3. **Алехно Е.А.** Некоторые специальные свойства банаховских функционалов. II// Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Тез. докл. междунар. конф., 13-19 сент. 2006, Минск, Беларусь. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2006. С. 16.

4. **Aliprantis C.D., Burkinshaw O.** Positive operators. Academic Press, 1985.

5. **Bennett G., Kalton N.J.** Consistency theorems for almost convergence.// Trans. of the Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 198. P. 23-43.

6. **Jerison M.** The set of all generalized limits of bounded sequences.// Can. J. Math. 1957. Vol. 9. P. 79-89.

7. **Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.** Позитивные линейные системы. Москва: Наука, 1985.

8. **Lindenstrauss J.** On complemented subspaces of m.// Israel J. Math. 1967. Vol. 5, №3. P. 153-156.

9. **Lorentz G.G.** A contribution to the theory of divergent sequences.// Acta Math. 1948. Vol. 80. P. 167-190.

10. **Sobczyk A.** Projection of the space m on its subspace c_0.// Bull. Amer. Math. Soc. 1941. Vol. 47. P. 938-947.

11. **Schaefer H.H.** Banach lattices and positive operators. Springer-Verlag, 1974.

Белорусский Государственный университет, г. Минск;
E-mail: Alekhno@bsu.by