ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 244, с. 1–22

УДК ???

Крамеровские асимптотики в методе усреднения для систем с быстрыми гиперболическими движениями[1]

©2004 г. В. И. Бахтин[2]

Поступило в 2003 г.

Работа посвящена изучению динамической системы $w' = S(w,z,\varepsilon)$, $z' = z + \varepsilon v(w,z,\varepsilon)$. Предполагается, что медленные движения определяются векторным полем $v(w,z,\varepsilon)$ в евклидовом пространстве, а быстрые движения происходят в окрестности топологически перемешивающего гиперболического аттрактора. Для разности между истинным и усредненным медленными движениями доказана центральная предельная теорема и вычислены точные асимптотики вероятностей больших отклонений, не превосходящих ε^{δ}, причем показатель δ зависит от гладкости системы и тем ближе к нулю, чем выше гладкость.

В работе рассматривается каскад с быстрыми и медленными движениями, в котором медленные движения происходят в евклидовом пространстве, а быстрые — в окрестности топологически перемешивающего гиперболического аттрактора. Предполагается, что быстрые гиперболические движения зависят от медленной переменной, а медленные движения определяются векторным полем v, зависящим от быстрой и медленной переменных. Для каждого значения медленной переменной z строится инвариантная вероятностная мера μ_z на аттракторе. С ее помощью определяется усредненное векторное поле $\overline{v}(z) = \int v\,d\mu_z$ на пространстве медленных движений. Доказывается, что мера μ_z гладко зависит от z и что поле $\overline{v}$ тоже гладкое. Динамическая система, определяемая этим полем, называется *усредненной*. Метод усреднения состоит в замене медленных движений траекториями усредненной системы. Его обоснование заключается в доказательстве того, что разность между истинным и усредненным медленными движениями с подавляющей вероятностью мала.

В случае, когда быстрое движение не зависит от медленного, известны следующие результаты [9, 7]. Во-первых, указанная разность удовлетворяет центральной предельной теореме со среднеквадратичным отклонением порядка $\sqrt{\varepsilon}$ (где ε — малый параметр, характеризующий скорость медленного движения). Во-вторых, вероятности уклонений, превосходящих по порядку $\sqrt{\varepsilon}$, экспоненциально малы. И в-третьих, получены грубые (с точностью до логарифмической эквивалентности) оценки вероятностей для различных типов поведения медленной компоненты траектории, уклоняющихся от усредненной траектории на конечное расстояние.

В данной работе доказывается центральная предельная теорема в случае, когда быстрые движения зависят от медленных. Более того, вычисляются точные асимптотики вероятностей больших уклонений, не превосходящих ε^{δ}. Показатель δ зависит от гладкости системы и тем ближе к нулю, чем выше гладкость. Эти асимптотики аналогичны классическим крамеровским асимптотикам для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Они могут быть получены как для инвариантной меры μ_z, так и для неинвариантных мер следующего вида. Пусть Γ — гладкое подмногообразие фазового пространства,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований. Депонирована в ВИНИТИ 07.05.2001, № 1185–B2001.

[2]Физический факультет, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
E-mail: bakhtin@bsu.by

лежащее в слое $z = \mathrm{const}$ в малой окрестности аттрактора, имеющее размерность растягивающегося слоения и направление, близкое к направлению растягивающегося слоения. Пусть μ — гладкая финитная вероятностная мера на Γ. Обозначим через $z(t)$ медленную компоненту траектории с начальным условием z, а через $\overline{z}(t)$ усредненную траекторию с тем же начальным условием. Тогда для разности $z(t/\varepsilon) - \overline{z}(t/\varepsilon)$ вычисляются крамеровские асимптотики по отношению к мере μ. Оказывается, что в первом приближении они не зависят от пары (Γ, μ), а зависят только от начального условия z. Если рассматриваемая динамическая система порождается отображением Σ_ε, а J — гладкая положительная функция на фазовом пространстве, то те же результаты получаются и для мер вида $\mu \times J \times J \circ \Sigma_\varepsilon \times \ldots \times J \circ \Sigma_\varepsilon^{t/\varepsilon}$.

Доказательство основано на двух независимых техниках. Первая — это аппарат так называемых *слоистых функций*, развитый в [1, 2, 5] (в первых двух работах они назывались регулярными функциями). Вторая — это метод вычисления асимптотических разложений для полугрупп операторов взвешенного условного математического ожидания, изложенный в [4] для случая каскада с медленными и быстрыми марковскими движениями.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 описывается изучаемая система, приводятся неформальные определения слоистых функций и оператора усредненного взвешенного сдвига (их довольно громоздкие строгие определения даны в [5]), излагаются их основные свойства и строятся инвариантные меры на аттракторах. В разд. 2 формулируется теорема об асимптотическом разложении полугруппы операторов усредненного взвешенного сдвига (теорема 2.6). В разд. 3 она доказывается. В последнем разд. 4 из асимптотической теоремы выводятся крамеровские асимптотики для вероятностей больших уклонений от усредненного движения. Основной результат об этих асимптотиках сформулирован в теореме 4.4.

1. СЛОИСТЫЕ ФУНКЦИИ

Ниже используется терминология и обозначения из работы [5]. Пусть M — некоторая выпуклая область стандартного евклидова пространства, а W — риманово многообразие. Рассматривается N раз непрерывно дифференцируемое семейство отображений прямого произведения $W \times M$ в себя вида

$$\begin{cases} w' = S(w, z, \varepsilon), \\ z' = z + \varepsilon v(w, z, \varepsilon), \end{cases} \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, $w \in W$ и $z \in M$. Более коротко оно обозначается как $(w', z') = \Sigma_\varepsilon(w, z)$. Будем считать, что $\Sigma_\varepsilon(W \times M) \subset W \times M$ при всех достаточно малых значениях ε. Этого легко добиться, например, сделав векторное поле v нулевым в окрестности границы M. Тогда Σ_ε порождает динамическую систему с дискретным временем (каскад) на $W \times M$ с быстрыми движениями на W и медленными движениями на M (со скоростью порядка ε). Предполагается, что отображение $S_z(w) = S(w, z, 0)$ при каждом $z \in M$ имеет перемешивающий гиперболический аттрактор, непрерывно зависящий от z (определения см. в [6, 8]). Предположим еще, что система (1) имеет равномерно гиперболический перемешивающий атлас (определение которого дано в [5]). Последнее условие мало ограничительно, потому что локально (в окрестности каждой точки $z \in M$) оно выполняется и ему всегда можно удовлетворить путем уменьшения области M.

В [5] для таких систем были определены понятия листа, следа, слоистой функции и оператора усредненного взвешенного сдвига на пространствах слоистых функций. Коротко говоря, каждый лист Γ представляет собой гладкое подмногообразие в $W \times M$, лежащее в окрестности аттрактора, имеющее размерность растягивающегося слоения и направление, близкое к направлению растягивающегося слоения. След — это пара (Γ, Φ), состоящая из листа Γ и гладкой функции Φ на нем, называемой плотностью. Стандартным следом называется тройка

(Γ, α, Φ), состоящая из следа (Γ, Φ) и точки $\alpha \in \Gamma$, лежащей в R_0-внутренности Γ (где положительное число R_0 не зависит от следа). При этом α называется центром листа Γ. Слоистая функция — это функция на множестве стандартных следов, значение которой линейно зависит от плотности Φ и гладко изменяется при гладкой деформации следа. Для слоистых функций в [5] были определены различные нормы (в зависимости от порядка их гладкости) и соответственно введены банаховы пространства слоистых функций $\mathcal{F}^{pq}$ (p и q — натуральные числа, характеризующие гладкость слоистых функций и удовлетворяющие условиям $p \geq 1$, $q \geq 4$ и $p + q \leq N - 1$, где N — порядок гладкости системы (1)).

Простейшим примером слоистой функции служит функция $g(\Gamma, \alpha, \Phi) = \Phi(\alpha)$. Более содержательный пример — функция вида

$$g(\Gamma, \alpha, \Phi) = \int\limits_{\Gamma} \xi(\rho(\alpha, \beta))\Phi(\beta)\, d\mu(\beta), \tag{2}$$

где μ — риманов объем на Γ, $\rho(\alpha, \beta)$ — расстояние между точками $\alpha, \beta \in \Gamma$, а ξ — гладкая неотрицательная функция на вещественной оси с носителем в малой окрестности нуля.

Пусть u — размерность растягивающегося слоения на аттракторе. Весовой функцией (весом) называется любая гладкая функция J, определенная на многообразии касательных к $W \times M$ подпространств размерности u. В частности, каноническая весовая функция — это величина, обратная коэффициенту растяжения u-мерных объемов при отображении Σ_ε. Весовые функции естественно сужаются на каждый лист. В [5] доказано, что слоистые функции образуют банахов модуль над алгеброй весовых функций с умножением $Jg(\Gamma, \alpha, \Phi) = g(\Gamma, \alpha, J\Phi)$.

Образ следа (Γ, Φ) под действием отображения Σ_ε — это такой след $(\Gamma'_\varepsilon, \Phi'_\varepsilon) = \Sigma_\varepsilon(\Gamma, \Phi)$, что $\Gamma'_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon(\Gamma)$ и $\Phi = \Phi'_\varepsilon \circ \Sigma_\varepsilon$. Зафиксируем некоторое семейство весовых функций J_ε. Тогда соответствующий оператор усредненного взвешенного сдвига $A_{\varepsilon,n}$ на пространстве слоистых функций задается формулой

$$[A_{\varepsilon,n} g](\Gamma, \alpha, \Phi) = \int\limits_{\Gamma'_\varepsilon} \xi_\Gamma(\alpha, \beta) g(\Gamma'_\varepsilon, \beta', \Phi'_\varepsilon)\, d\mu(\beta'), \tag{3}$$

в которой $(\Gamma'_\varepsilon, \Phi'_\varepsilon) = (\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon)^n(\Gamma, \Phi)$, $\beta \in \Gamma$, $\beta' = \Sigma^n_\varepsilon(\beta)$, функция $\xi_\Gamma(\alpha, \beta)$ имеет вид

$$\xi_\Gamma(\alpha, \beta) = \frac{\xi_0(\rho(\alpha, \beta))}{\int_\Gamma \xi_0(\rho(\alpha, \beta))\, d\mu(\alpha)}\,, \tag{4}$$

а ξ_0 — фиксированная гладкая неотрицательная функция на вещественной оси с носителем в малой окрестности нуля. Из этого определения для всех слоистых функций g и гладких функций $f\colon W \times M \to \mathbb{R}$ вытекает гомологическое тождество

$$A_{\varepsilon,n}(fg) = f \circ \Sigma^n_\varepsilon \cdot A_{\varepsilon,n} g. \tag{5}$$

В [5, теоремы 3.2 и 3.3] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Оператор $A_{0,n}$ непрерывно отображает каждое пространство $\mathcal{F}^{pq}$ в себя. Для каждого n существует такое малое положительное число ε_0, что при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ и $l \leq q - 8$ оператор $d^l A_{\varepsilon,n}/d\varepsilon^l$ непрерывно отображает пространство $\mathcal{F}^{pq}$ в $\mathcal{F}^{p+1+l,q-4-l}$* (и, тем более, в $\mathcal{F}^{p+2l,q-5l}$, если только $l \neq 0$).

Слоистая функция называется *положительной*, если она принимает неотрицательные значения на стандартных следах с неотрицательными плотностями. Положительная слоистая функция g называется *сильно положительной*, если существует такое $c > 0$, что для любого стандартного листа Γ с центром α выполняется неравенство $g(\Gamma,\alpha,1)\geq c$. Линейный функционал на пространстве слоистых функций положителен, если он принимает неотрицательные значения на положительных функциях.

Предположим теперь, что семейство весовых функций J_ε положительно и отделено снизу от нуля. Например, это справедливо для канонической весовой функции. Тогда оператор $A_{\varepsilon,n}$ переводит положительные слоистые функции в положительные и сильно положительные в сильно положительные. В этих условиях имеет место следующее утверждение [5, теорема 3.3].

Теорема 1.2. *Если $N\geq 6$, то для каждого достаточно большого $n\in\mathbb{N}$ найдутся такие функция $\lambda=\lambda_n\in C^{N-4}(M)$, сильно положительная слоистая функция $h=h_n\in\mathcal{F}^{1,N-2}$ и положительный $C^\infty(M)$-линейный функционал $\nu=\nu_n\colon\mathcal{F}^{N-5,4}\to C^2(M)$, что при условиях $p\geq 1$, $q\geq 4$ и $p+q\leq N-1$*

а) *функционал ν непрерывно отображает пространство $\mathcal{F}^{pq}$ в $C^{q-2}(M)$;*

б) *выполняются равенства $A_{0,n}h=e^\lambda h$, $\nu\circ A_{0,n}=e^\lambda\nu$, $\nu(h)\equiv 1$;*

в) *последовательность операторов $[e^{-\lambda}A_{0,n}]^m\colon\mathcal{F}^{pq}\to\mathcal{F}^{pq}$ при $m\to\infty$ сходится в равномерной операторной норме к проектору $\overline{A}_{0,n}g=\nu(g)h$.*

Определим $C^\infty(M)$-линейный функционал $\mu_n\colon C^\infty(W\times M)\to C^{N-4}(M)$ формулой $\mu_n(f)=\nu(fh)$. Из теоремы 1.2 вытекает, что этот функционал положителен (переводит неотрицательные функции в неотрицательные) и нормирован (т.е. $\mu_n(1)\equiv 1$). Кроме того, он удовлетворяет тождеству

$$\mu_n(f\circ\Sigma_0^n)=\mu_n(f). \tag{6}$$

Действительно, в силу (5)

$$\mu_n(f\circ\Sigma_0^n)=\nu(f\circ\Sigma_0^n\cdot h)=\nu(f\circ\Sigma_0^n\cdot e^{-\lambda}A_{0,n}h)=e^{-\lambda}\nu(A_{0,n}(fh))=\nu(fh)=\mu_n(f).$$

Утверждение 1.3. *Если две функции $f,f'\in C^\infty(W\times M)$ совпадают при некотором $z=z_0$, то значения функций $\mu_n(f)$ и $\mu_n(f')$ в точке z_0 тоже совпадают.*

Доказательство. Пусть $z=(z_1,\dots,z_k)$ и $z_0=(z_{01},\dots,z_{0k})$. По лемме Адамара разность $f-f'$ представляется в виде

$$f(z,w)-f'(z,w)=\sum_{i=1}^k(z_i-z_{0i})\varphi_i(z,w),\qquad \varphi_i\in C^\infty(W\times M).$$

Поэтому разность $\mu_n(f)-\mu_n(f')=\sum_{i=1}^k(z_i-z_{0i})\mu_n(\varphi_i)$ обращается в нуль при $z=z_0$.

Определим семейство линейных функционалов $\mu_{n,z}\colon C^\infty(W\times M)\to\mathbb{R}$ формулой $\mu_{n,z}(f)=[\mu_n(f)](z)$. Каждый из этих функционалов положителен и нормирован. Из теоремы Рисса следует, что каждый из них отождествляется с борелевской вероятностной мерой на $W\times M$. А из утверждения 1.3 вытекает, что мера $\mu_{n,z}$ сосредоточена на слое $W\times\{z\}$. Наконец, положим

$$\mu_z(f)=\frac{1}{n}\mu_{n,z}(f+f\circ\Sigma_0+\ldots+f\circ\Sigma_0^{n-1}).$$

Тогда μ_z тоже является вероятностной борелевской мерой на $W\times\{z\}$. В силу (6) для нее выполняется тождество $\mu_z(f)=\mu_z(f\circ\Sigma_0)$. Значит, мера μ_z является Σ_0-инвариантной. А если $f\in C^{1+q}(W\times M)$, то из теоремы 1.2 вытекает, что $\mu_z(f)\in C^{q-2}(M)$. Этот факт означает *гладкую зависимость инвариантной меры μ_z от параметра z.*

2. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

Нам удобно отнормировать оператор усредненного взвешенного сдвига $A_{0,n}$ таким образом, чтобы его максимальное собственное значение равнялось не e^{λ_n}, а единице. Для этого достаточно в определении оператора $A_{\varepsilon,n}$ заменить весовую функцию J_ε на *нормированную* весовую функцию $\widehat{J}_\varepsilon = J_\varepsilon e^{-\lambda_n/n}$. Полученный таким образом оператор B_ε будем называть *нормированным* оператором усредненного взвешенного сдвига. Например, в разд. 4 будет доказано, что каноническая весовая функция нормирована и для нее $B_\varepsilon = A_{\varepsilon,n}$. Из гомологического тождества (5) следует, что $B_0 = e^{-\lambda_n} A_{0,n}$. Теорема 1.2 утверждает, что последовательность B_0^m сходится к проектору $\overline{B} = \nu_n \otimes h_n$ в пространстве линейных непрерывных операторов на $\mathcal{F}^{pq}$. Это свойство будем называть *эргодичностью* полугруппы B_0^m. Из него, в частности, вытекает существование достаточно большого C_0 и $\Lambda_0 \in (0,1)$ таких, что

$$\|B_0^m g\|_{pq} \le C_0 \Lambda_0^m \|g\|_{pq} \qquad \text{для} \quad g \in \mathcal{F}^{pq} \cap \ker \nu. \tag{7}$$

Для всякой функции $F \in C^\infty(M)$ определим семейство операторов $B_\varepsilon[F]$ равенствами

$$B_\varepsilon[F]\, g = e^{-F/\varepsilon} B_\varepsilon\big(e^{F/\varepsilon} g\big), \qquad B_0[F]\, g = \lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon[F]\, g. \tag{8}$$

Из гомологического тождества (5) следует, что

$$B_\varepsilon(Fg) = F \circ \Sigma_\varepsilon^n \cdot B_\varepsilon g, \qquad B_0(Fg) = F B_0 g, \tag{9}$$

$$B_\varepsilon[F]\, g = \exp\left(\frac{F \circ \Sigma_\varepsilon^n - F}{\varepsilon}\right) B_\varepsilon g, \qquad B_0[F]\, g = \exp\left(\frac{dF}{dv_n}\right) B_0 g, \tag{10}$$

где

$$v_n(w,z) = \sum_{i=0}^{n-1} v_0 \circ \Sigma_0^i(w,z), \qquad v_0(w,z) = v(w,z,0). \tag{11}$$

Из (9), (10) вытекает $C^\infty(M)$-линейность оператора $B_0[F]$, т.е. равенство $B_0[F] f g = f B_0[F]\, g$ для всех $f \in C^\infty(M)$ и $g \in \mathcal{F}^{pq}$. Из [5, теорема 3.1] следует, что на самом деле в этом тождестве можно брать $F \in C^{p+q+1}(M)$ и $f \in C^{p+q-3}(M)$. Это свойство оператора $B_0[F]$ будем называть *расслоенностью*. Из теоремы 1.1 и (10) вытекает, что семейство $B_\varepsilon[F]$ аналитически зависит от F и гладко (в некотором ослабленном смысле) от ε. Возмущение B_ε оператора B_0, для которого $B_\varepsilon[F]$ аналитически зависит от F и гладко от ε, будем называть *сверхрегулярным*.

В этом разделе будет доказано, что если B_ε — сверхрегулярное возмущение расслоенного эргодического оператора B_0, то для семейства операторов $B_\varepsilon^{t/\varepsilon} e^{\xi F/\varepsilon}$ можно построить асимптотическое разложение по степеням малых параметров ξ, ε. Это разложение аналогично тому, которое было получено в [4] для системы с медленными и марковскими быстрыми движениями.

Из [5, теорема 3.1] и (10) следует, что оператор $B_0[F]\colon \mathcal{F}^{pq} \to \mathcal{F}^{pq}$ аналитически зависит от функции $F \in C^{p+q+1}(M)$.

Утверждение 2.1. *Для всякой достаточно малой функции $F \in C^i(M)$, где $6 \le i \le N$, однозначно определяются аналитически зависящие от F функция $\lambda_F \in C^{i-4}(M)$, слоистая функция $h_F \in \mathcal{F}^{1,i-2}$ и $C^\infty(M)$-линейный функционал $\nu_F\colon \mathcal{F}^{i-5,4} \to C^2(M)$, непрерывно отображающий каждое пространство $\mathcal{F}^{pq}$ в $C^{q-2}(M)$* (при $p \ge 1$, $q \ge 4$ и $p+q \le i-1$), *удовлетворяющие условиям*

$$\lambda_0 = 0, \qquad h_0 = h, \qquad \nu_0 = \nu, \qquad \nu(h_F) = \nu_F(h) = 1,$$

$$B_0[F]\, h_F = e^{\lambda_F} h_F, \qquad \nu_F \circ B_0[F] = e^{\lambda_F} \nu_F.$$

Здесь h и ν — слоистая функция и линейный функционал из теоремы 1.2.

Доказательство. Пространство $\mathcal{F}^{1,i-2}$ разлагается в прямую сумму $\ker\nu \oplus C^{i-4}(M)h$. Применим теорему о неявной функции к уравнению

$$B_0[F](h+\Delta h) - e^{\lambda}(h+\Delta h) = 0 \tag{12}$$

относительно функции $\lambda \in C^{i-4}(M)$ и слоистой функции $\Delta h \in \mathcal{F}^{1,i-2} \cap \ker\nu$. Из (7) следует, что сужение оператора $\mathrm{I} - B_0$ на $\mathcal{F}^{1,i-2} \cap \ker\nu$ обратимо. Поэтому при нулевых F, λ и Δh производная от левой части уравнения (12) по Δh изоморфно отображает $\mathcal{F}^{1,i-2} \cap \ker\nu$ в себя. А производная от левой части (12) по λ изоморфно отображает $C^{i-4}(M)$ на $C^{i-4}(M)h$. Следовательно, к этому уравнению применима теорема о неявной функции и из него однозначно определяются $\lambda_F \in C^{i-4}(M)$ и $\Delta h_F \in \mathcal{F}^{1,i-2} \cap \ker\nu$, аналитически зависящие от F. Положим $h_F = h + \Delta h_F$.

Затем рассмотрим уравнение

$$\Big((\nu+\Delta\nu)\circ B_0[F] - e^{\lambda}(\nu+\Delta\nu)\Big)\Big|_{\ker\nu} = 0 \tag{13}$$

относительно $C^\infty(M)$-линейного функционала $\Delta\nu\colon \mathcal{F}^{i-5,4} \to C^2(M)$, удовлетворяющего условию $\Delta\nu(h) = 0$. К нему тоже применима теорема о неявной функции, потому что оператор $B_0 - \mathrm{I}$ обратим на $\mathcal{F}^{i-5,4} \cap \ker\nu$. Из него однозначно определяется аналитически зависящее от F семейство $\Delta\nu_F$.

Те же самые рассуждения можно провести еще в двух случаях: во-первых, когда $\Delta\nu\colon \mathcal{F}^{pq} \to C^{q-2}(M)$, а во-вторых, когда $\Delta\nu\colon \mathcal{F}^{pq} \to C^2(M)$. В силу единственности неявной функции во всех трех случаях сужение функционала $\Delta\nu_F$ на $\mathcal{F}^{pq}$ должно быть одним и тем же. Поэтому $\Delta\nu_F$ непрерывно отображает каждое $\mathcal{F}^{pq}$ в $C^{q-2}(M)$. Для завершения доказательства осталось положить $\nu_F = \nu + \Delta\nu_F$.

Утверждение 2.2. *При малых $F \in C^6(M)$ функция λ_F выпукло зависит от F.*

Доказательство. Из эргодичности оператора B_0 следует, что

$$\lambda_F = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m(F)}{m}, \qquad \text{где} \quad \lambda_m(F) = \ln\nu\big((B_0[F])^m h\big).$$

Поэтому достаточно убедиться в выпуклости функций $\lambda_m(F)$. В силу (9)–(11)

$$(B_0[F])^m h = \exp\left(\frac{dF}{dv_n} + \frac{dF}{dv_n}\circ\Sigma_0^n + \ldots + \frac{dF}{dv_n}\circ\Sigma_0^{n(m-1)}\right) B_0^m h = \exp\left(\frac{dF}{dv_{nm}}\right) h.$$

Следовательно, $\lambda_m(F) = \ln\nu\big(e^{dF/dv_{nm}}h\big) = \ln\mu\big(e^{dF/dv_{nm}}\big)$. Мы знаем, что функционал $\mu(f) = \nu(fh)$ положителен и нормирован. Для выпуклости $\lambda_m(F)$ достаточно, чтобы для любых $u, v \in C^5(W\times M)$ функция $\varphi(t) = \ln\mu(e^{u+tv})$ имела неотрицательную вторую производную. Вычислим ее:

$$\varphi'(t) = \frac{\mu(e^{u+tv}v)}{\mu(e^{u+tv})}, \qquad \varphi''(t) = \frac{\mu(e^{u+tv}v^2)\mu(e^{u+tv}) - \mu(e^{u+tv}v)^2}{\mu(e^{u+tv})^2}.$$

А числитель последней дроби неотрицателен, потому что в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\mu(e^{u+tv}v)^2 = \mu\big(e^{(u+tv)/2}v\cdot e^{(u+tv)/2}\big)^2 \le \mu(e^{u+tv}v^2)\mu(e^{u+tv}).$$

Утверждение 2.3. *Если у двух функций $F, F' \in C^N(M)$ в некоторой точке $z_0 \in M$ совпадают первые дифференциалы, то $\lambda_F(z_0) = \lambda_{F'}(z_0)$.*

Доказательство. Пусть точка $z \in M$ имеет координаты z_k. По лемме Адамара все частные производные $\partial(F - F')/\partial z_k$ представляются в виде

$$\frac{\partial(F - F')}{\partial z_k}(z) = \sum_l (z_l - z_{0l}) f_{kl}(z), \qquad f_{kl} \in C^{N-2}(M).$$

Тогда из (10) вытекает, что разность $B_0[F] - B_0[F']$ представляется в виде

$$B_0[F] - B_0[F'] = \sum_l (z_l - z_{0l}) \varphi_l B_0, \tag{14}$$

где φ_l — некоторые функции из $C^{N-2}(W \times M)$. По утверждению 2.1 существуют такие вектор $h_F \in \mathcal{F}^{1,N-2}$ и $C^\infty(M)$-линейный функционал $\nu_{F'}\colon \mathcal{F}^{N-5,4} \to C^2(M)$, для которых

$$B_0[F] h_F = e^{\lambda_F} h_F, \qquad \nu_{F'} \circ B_0[F'] = e^{\lambda_{F'}} \nu_{F'}. \tag{15}$$

Отнормируем функционал $\nu_{F'}$ условием $\nu_{F'}(h_F) \equiv 1$. Тогда из (15), (14) и C^∞-линейности $\nu_{F'}$ вытекают равенства

$$e^{\lambda_F} - e^{\lambda_{F'}} = \nu_{F'}(B_0[F] h_F) - \nu_{F'}(B_0[F'] h_F) = \sum_l (z_l - z_{0l}) \nu_{F'}(\varphi_l B_0 h_F).$$

Следовательно, $\lambda_F(z_0) = \lambda_{F'}(z_0)$.

Утверждение 2.4. *Функция $\lambda_F = \lambda_F(z)$ зависит только от z и частных производных первого порядка функции F в точке z, т.е. $\lambda_F(z) = \lambda(z, p)$, где $p = dF(z)/dz$. Она $N - 4$ раз непрерывно дифференцируема по z и аналитически зависит от p.*

Доказательство. Из утверждения 2.3 следует, что $\lambda_F(z) = \lambda(z, dF/dz)$. А если $F(z)$ равняется скалярному произведению (p, z), то по утверждению 2.1 функция $\lambda_F(z) = \lambda(z, p)$ имеет гладкость порядка $N - 4$ по z и аналитически зависит от p.

Определим векторное поле $\overline{v}_n$ на M равенством

$$\overline{v}_n = \nu(v_n h). \tag{16}$$

Оно имеет гладкость не ниже $N - 4$. Из определения (11) поля v_n и определения семейства инвариантных мер μ_z видно, что $\overline{v}_n = n\overline{v}$, где $\overline{v}(z)$ — это среднее значение поля $v(w, z, 0)$ по мере μ_z.

Утверждение 2.5. *Для всякой функции $f \in C^6(M)$*

$$\frac{df}{d\overline{v}_n} = \frac{d}{d\xi}\Big|_{\xi=0} \nu(B_0[\xi f] h) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \nu(B_\varepsilon f h - f B_\varepsilon h) = \frac{d}{d\xi}\Big|_{\xi=0} \lambda_{\xi f}. \tag{17}$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из (10). Из (9) следует, что $B_\varepsilon f - f B_\varepsilon = (f \circ \Sigma_\varepsilon^n - f) B_\varepsilon$. Очевидно, $f \circ \Sigma_0^n - f = 0$ и

$$\frac{d(f \circ \Sigma_\varepsilon^n - f)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{df}{dv_n}.$$

Отсюда вытекает второе равенство (17). Справедливость третьего доказывает выкладка

$$\frac{d}{d\xi}\Big|_{\xi=0} \lambda_{\xi f} = \frac{d}{d\xi}\Big|_{\xi=0} \frac{\nu_{\xi f}(B_0[\xi f] h_{\xi f})}{\nu_{\xi f}(h_{\xi f})} = \frac{d}{d\xi}\Big|_{\xi=0} \nu(B_0[\xi f] h).$$

Мы изучаем нормированный оператор взвешенного сдвига B_ε, полученный из $A_{\varepsilon,n}$ путем замены веса J_ε на нормированный вес $\widehat{J}_\varepsilon = J_\varepsilon e^{-\lambda_n/n}$. Определим еще операторы $\overline{B}$ и $\widetilde{B}$ формулами $\overline{B}g = \nu_n(g)h_n$ и $\widetilde{B} = \mathrm{I} - \overline{B}$. Очевидно, они являются взаимно дополнительными проекторами. Положим

$$p_j = 1 + 2j, \qquad q_{ij} = N - 7 - 6i - 10j,$$

$$\mathfrak{D}' = \{(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2 \mid 6i + 10j \le N - 21\}.$$

Определение 2.1. *Правильной диаграммой Ньютона* будем называть произвольное ограниченное множество $\mathfrak{D} \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, которое вместе с каждой своей точкой (i,j) содержит и весь прямоугольник $\Pi_{ij} = \{(i',j') \mid 0 \le i' \le i,\ 0 \le j' \le j\}$. Точку $(i,j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ назовем *точкой роста* правильной диаграммы Ньютона $\mathfrak{D}$, если она не лежит в $\mathfrak{D}$, а все остальные точки прямоугольника Π_{ij} лежат в $\mathfrak{D}$.

Теорема 2.6. *Пусть $N \ge 27$ и семейство функций $F_t(\xi) \in C^{N-5}(M)$ при $t \in [0,t_0]$ и всех достаточно малых вещественных ξ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot F_t(\xi) = \lambda_{F_t(\xi)}$ с начальным условием $F_0(\xi) = \xi F$. Тогда для всякой слоистой функции $g_0 \in \mathcal{F}^{1,N-2}$ и правильной диаграммы Ньютона $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}'$ с множеством точек роста $\mathfrak{G}$ существуют такие семейства слоистых функций*

$$U_t(\xi,\varepsilon) = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}} \xi^i\varepsilon^j \bigl(\overline{U}_{ijt} h_{F_t(\xi)} + \widetilde{U}_{ijt}\bigr), \qquad V_{t\tau}(\xi,\varepsilon) = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}} \xi^i\varepsilon^j \bigl(\overline{V}_{ijt\tau} + \widetilde{V}_{ijt\tau}\bigr), \tag{18}$$

для которых при всех $t \in [0,t_0]$ и $\tau \in \mathbb{Z}_+$ выполняются тождества

$$g_0 = U_0(\xi,\varepsilon) + V_{00}(\xi,\varepsilon) + \sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i\varepsilon^j), \tag{19}$$

$$B_\varepsilon e^{F_t(\xi)/\varepsilon}\bigl(U_t(\xi,\varepsilon) + V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)\bigr) = e^{F_{t+\varepsilon}(\xi)/\varepsilon}\Biggl(U_{t+\varepsilon}(\xi,\varepsilon) + V_{t+\varepsilon,\tau+1}(\xi,\varepsilon) + \sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i\varepsilon^j)\Biggr), \tag{20}$$

в которых слоистые функции $\xi^{-i}\varepsilon^{-j}O(\xi^i\varepsilon^j) \in \mathcal{F}^{[2N/5],4}$ равномерно ограничены. Коэффициенты семейств (18) таковы, что при всех $t \in [0,t_0]$ и $\tau \in \mathbb{Z}_+$ определены производные

$$\frac{d^n\overline{U}_{ijt}}{dt^n} \in C^{q_{ij}-7-n}(M), \qquad n \le q_{ij} - 9,$$

$$\frac{d^n\overline{V}_{ijt\tau}}{dt^n} \in \overline{B}\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}-n}, \qquad \frac{d^n\widetilde{U}_{ijt}}{dt^n}, \frac{d^n\widetilde{V}_{ijt\tau}}{dt^n} \in \widetilde{B}\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}-n}, \qquad n \le q_{ij} - 4.$$

Все они равномерно ограничены в указанных пространствах, линейно и непрерывно зависят от g_0, а нормы производных $d^n\overline{V}_{ijt\tau}/dt^n$ и $d^n\widetilde{V}_{ijt\tau}/dt^n$ экспоненциально убывают по τ.

Если в тождествах (19), (20) пренебречь остаточными членами, то из них вытекает асимптотическое разложение

$$B_\varepsilon^{t/\varepsilon} e^{\xi F/\varepsilon} g_0 \sim e^{F_t(\xi)/\varepsilon}\bigl(U_t(\xi,\varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(\xi,\varepsilon)\bigr), \qquad t \in \varepsilon\mathbb{Z} \cap [0,t_0], \quad \varepsilon > 0. \tag{21}$$

Дополнение 1. Начальные коэффициенты разложений (18) имеют вид $\widetilde{U}_{00t} = \overline{V}_{00t\tau} = 0$, $\widetilde{V}_{00t\tau} = B_0^\tau \widetilde{B} g_0$, а $\overline{U}_{00t}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\overline{U}_{00t}}{dt} = \frac{d\overline{U}_{00t}}{d\overline{v}} + \alpha\overline{U}_{00t}, \quad \overline{U}_{000} = \nu(g_0), \qquad \text{где} \quad \alpha = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \nu(B_\varepsilon h) \in C^{N-9}(M).$$

Если функция $\overline{U}_{000}$ на M отделена снизу от нуля, то и семейство $\overline{U}_{00t}$ на отрезке $[0, t_0]$ отделено снизу от нуля.

Многочлены Тейлора степени k по переменной ξ от функции $F_t(\xi)$ и семейства операторов $U_t(\xi, \varepsilon)$ обозначим $J_\xi^k F_t(\xi)$ и $J_\xi^k U_t(\xi, \varepsilon)$.

Дополнение 2. В теореме 2.6 можно заменить $F_t(\xi)$ на $J_\xi^k F_t(\xi)$ и $U_t(\xi, \varepsilon)$ на $J_\xi^k U_t(\xi, \varepsilon)$. При этом k можно брать в пределах от $(N-26)/6$ до $3N/5-11$. В частности, годится $k = [N/5]$.

Дополнение 3. Если слоистая функция g_0 сильно положительна, то для любого стандартного следа (Γ, α, Φ) с плавной плотностью Φ (в смысле определения 5.1 из [5]) и любого натурального k в пределах от $(N-26)/6$ до $3N/5 - 8$ справедливо равенство

$$\frac{e^{J_\xi^k F_{i\varepsilon}(\xi)/\varepsilon}\bigl(J_\xi^k U_{i\varepsilon}(\xi,\varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(\xi,\varepsilon)\bigr)(\Gamma,\alpha,\Phi)}{e^{J_\xi^k F_{i\varepsilon}(\xi)/\varepsilon}\bigl(J_\xi^k U_{i\varepsilon}(\xi,\varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(\xi,\varepsilon) + \sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i\varepsilon^j)\bigr)(\Gamma,\alpha,\Phi)} = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i\varepsilon^j)$$

равномерно по (Γ, α, Φ) и $t \in [0, t_0]$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ 2.6

Напомним, что нормированный оператор усредненного взвешенного сдвига $B_0 = e^{-\lambda_n} A_{0,n}$ при некоторых C_0 и $\Lambda_0 \in (0,1)$ удовлетворяет оценке (7)

$$\|B_0^m g\|_{pq} \le C_0 \Lambda_0^m \|g\|_{pq}, \qquad g \in \mathcal{F}^{pq} \cap \ker \overline{B}, \tag{22}$$

где $p \ge 1$, $q \ge 4$ и $p + q \le N - 1$. Из (10) вытекает равенство

$$e^{-F_{t+\varepsilon}(\xi)/\varepsilon} B_\varepsilon e^{F_t(\xi)/\varepsilon} g = e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon g, \tag{23}$$

в котором

$$\Phi_t(\xi,\varepsilon) = \Phi_t(\xi,\varepsilon,w,z) = \frac{F_t(\xi, \Sigma_\varepsilon^n(w,z)) - F_{t+\varepsilon}(\xi,z)}{\varepsilon}.$$

По условию теоремы 2.6 семейство функций $F_t(\xi, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot F = \lambda_F$ с начальным условием $F_0(\xi, z) = \xi F(z)$ и имеет гладкость $N-5$. Из равенства $\lambda_0 = 0$ вытекает, что $F_t(0, z) \equiv 0$ и соответственно $\Phi_t(0, \varepsilon) \equiv 0$.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы* 2.6 *функция* $\Phi_t(\xi, \varepsilon, w, z)$ *непрерывно дифференцируема* $N-6$ *раз по всем переменным, а семейство слоистых функций* $h_{F_t(\xi)}$ *обладает тем свойством, что*

$$\frac{\partial^{i+n}}{\partial\xi^i\partial t^n} h_{F_t(\xi)} \in \mathcal{F}^{1,N-7-i-n}, \qquad i + n \le N - 11.$$

Доказательство. Первое очевидно. Второе вытекает из того, что по утверждению 2.1 функция $h_{F_t(\xi)} \in \mathcal{F}^{1,N-7-i-n}$ аналитически зависит от $F_t(\xi) \in C^{N-5-i-n}(M)$, а последнее семейство в указанном пространстве $i+n$ раз дифференцируемо по t, ξ.

Лемма 3.2. *Предположим, что* $p + q \le N - 6$ *и что семейство функций* $\overline{U}_t \in C^{q-2}(M)$ *и семейства слоистых функций* $\widetilde{U}_t, V_{t\tau} \in \mathcal{F}^{pq}$ *удовлетворяют оценкам вида*

$$\left\|\frac{d^n \overline{U}_t}{dt^n}\right\|_{q-2-n} \le M, \qquad \left\|\frac{d^n \widetilde{U}_t}{dt^n}\right\|_{p,q-n} \le M, \qquad \left\|\frac{d^n V_{t\tau}}{dt^n}\right\|_{p,q-n} \le M\Lambda^\tau, \qquad n \le q-4,$$

с некоторыми константами $M > 0$ и $\Lambda \in (\Lambda_0, 1)$, не зависящими от $t \in [0, t_0]$ и $\tau \in \mathbb{Z}_+$. Тогда слоистые функции

$$W_t^1(\xi,\varepsilon) = e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon(\overline{U}_t h_{F_t(\xi)}) - \overline{U}_{t+\varepsilon} h_{F_{t+\varepsilon}(\xi)}, \qquad W_t^2(\xi,\varepsilon) = e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon \widetilde{U}_t - \widetilde{U}_{t+\varepsilon},$$

$$W_{t\tau}^3(\xi,\varepsilon) = e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon V_{t\tau} - V_{t+\varepsilon,\tau+1}, \qquad W^4(\xi) = \overline{U}_0 h_{\xi F} + \widetilde{U}_0 + V_{00}$$

можно разложить в многочлены Тейлора по ξ, ε до любой степени $\nu \le (q-4)/5$:

$$W_t^1(\xi,\varepsilon) = \sum_{\substack{l>0\\ k+l<\nu}} \xi^k \varepsilon^l W_{klt}^1 + \sum_{\substack{l>0\\ k+l=\nu}} \xi^k \varepsilon^l W_{klt}^1(\xi,\varepsilon),$$

$$W_t^2(\xi,\varepsilon) = \sum_{k+l<\nu} \xi^k \varepsilon^l W_{klt}^2 + \sum_{k+l=\nu} \xi^k \varepsilon^l W_{klt}^2(\xi,\varepsilon),$$

$$W_{t\tau}^3(\xi,\varepsilon) = \sum_{k+l<\nu} \xi^k \varepsilon^l W_{klt\tau}^3 + \sum_{k+l=\nu} \xi^k \varepsilon^l W_{klt\tau}^3(\xi,\varepsilon),$$

$$W^4(\xi) = \sum_{k\ge 0} \xi^k W_k^4.$$

Существуют такие большие константы C_{kl}, не зависящие от M и Λ, что коэффициенты этих разложений удовлетворяют оценкам

$$\|W_{klt}^1(\xi,\varepsilon)\|_{1+2\nu,q-5\nu} \le C_{kl} M, \qquad \|W_{klt}^2(\xi,\varepsilon)\|_{p+2\nu,q-5\nu} \le C_{kl} M,$$

$$\|W_{klt\tau}^3(\xi,\varepsilon)\|_{p+2\nu,q-5\nu} \le C_{kl} M \Lambda^\tau;$$

$$\left\|\frac{d^n W_{klt}^1}{dt^n}\right\|_{1+2l,q-k-5l-n} \le C_{kl} M, \qquad \left\|\frac{d^n W_{klt}^2}{dt^n}\right\|_{p+2l,q-k-5l-n} \le C_{kl} M,$$

$$\left\|\frac{d^n W_{klt\tau}^3}{dt^n}\right\|_{p+2l,q-k-5l-n} \le C_{kl} M \Lambda^\tau, \qquad \|W_k^4\|_{p,q} \le C_{k0} M$$

при $n \le q-k-5l-4$.

В этой формулировке подразумевается, что если выписана оценка нормы $\|g\|_{\alpha,\beta}$, то соответствующая функция g определена и принадлежит $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$.

Доказательство. Из утверждения 2.1 и теоремы 3.1 из [5] следует, что $\overline{U}_t h_{F_t(\xi)} \in \mathcal{F}^{1,q}$. Из теоремы 1.1 и леммы 3.1 вытекает, что при $l \ge 1$

$$\frac{\partial^l W_t^1(\xi,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^l} \in \mathcal{F}^{1+2l,q-5l}, \qquad \frac{\partial^l W_t^2(\xi,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^l} \in \mathcal{F}^{p+2l,q-5l}, \qquad \frac{\partial^l W_{t\tau}^3(\xi,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^l} \in \mathcal{F}^{p+2l,q-5l}.$$

Дальнейшее дифференцирование по ξ, t в силу леммы 3.1 и теоремы 3.1 из [5] показывает, что

$$\frac{\partial^{k+l+n} W_t^1(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi^k \partial\varepsilon^l \partial t^n} \in \mathcal{F}^{1+2l,q-k-5l-n}, \qquad \frac{\partial^{k+l+n} W_t^2(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi^k \partial\varepsilon^l \partial t^n} \in \mathcal{F}^{p+2l,q-k-5l-n},$$

$$\frac{\partial^{k+l+n} W_{t\tau}^3(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi^k \partial\varepsilon^l \partial t^n} \in \mathcal{F}^{p+2l,q-k-5l-n}.$$

При $\varepsilon = 0$ оператор B_0 непрерывно отображает пространство $\mathcal{F}^{pq}$ в себя. Поэтому последние включения верны также при нулевых l и ε. Из них вытекают тейлоровские разложения для

$W_t^i(\xi,\varepsilon)$ при $i=1,2,3$, а также оценки норм коэффициентов этих разложений. Существование разложения и оценки для $W^4(\xi)$ вытекают просто из того, что функция $h_{\xi F}\in\mathcal{F}^{1,N-7}$ аналитически зависит от ξ.

Из (23) и утверждения 2.1 вытекают тождества

$$e^{\Phi_t(\xi,0)}B_0=e^{-\dot F_t(\xi)}B_0[F_t(\xi)],\qquad B_0[F_t(\xi)]\,h_{F_t(\xi)}=e^{\dot F_t(\xi)}h_{F_t(\xi)}.$$

Из них и расслоенности $B_0[F_t(\xi)]$ следует, что $W_t^1(\xi,0)\equiv 0$. Поэтому $W_{k0t}^1=0$.

В условиях теоремы 2.6 рассмотрим невязки

$$P_t(\xi,\varepsilon)=e^{-F_{t+\varepsilon}(\xi)/\varepsilon}B_\varepsilon e^{F_t(\xi)/\varepsilon}U_t(\xi,\varepsilon)-U_{t+\varepsilon}(\xi,\varepsilon)=e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)}B_\varepsilon U_t(\xi,\varepsilon)-U_{t+\varepsilon}(\xi,\varepsilon),\tag{24}$$

$$Q_{t\tau}(\xi,\varepsilon)=e^{-F_{t+\varepsilon}(\xi)/\varepsilon}B_\varepsilon e^{F_t(\xi)/\varepsilon}V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)-V_{t+\varepsilon,\tau+1}(\xi,\varepsilon)=e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)}B_\varepsilon V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)-V_{t+\varepsilon,\tau+1}(\xi,\varepsilon),\tag{25}$$

$$R(\xi,\varepsilon)=g_0-U_0(\xi,\varepsilon)-V_{00}(\xi,\varepsilon).\tag{26}$$

Очевидно, сумма “O-больших” в (19) равна $R(\xi,\varepsilon)$, а сумма “O-больших” в (20) равна $P_t(\xi,\varepsilon)+Q_{t\tau}(\xi,\varepsilon)$. Пусть

$$p_j=1+2j,\qquad q_{ij}=N-7-6i-10j,$$
$$p'_{ij}=\max\{p_{j'}\mid(i',j')\in\mathfrak{D}\cap\Pi_{ij}\},\qquad q'_{ij}=\min\{q_{i'j'}-5\mid(i',j')\in\mathfrak{D}\cap\Pi_{ij}\},$$

Будем доказывать теорему 2.6, наращивая по индукции диаграмму $\mathfrak{D}$.

Предположение индукции. Пусть правильная диаграмма Ньютона $\mathfrak{D}$ содержится в множестве $\mathfrak{D}'=\{(i,j)\in\mathbb{Z}_+^2\mid 6i+10j\le N-21\}$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ множество точек роста $\mathfrak{D}$, а через $\mathfrak{G}'$ множество точек роста $\mathfrak{D}'$. Допустим, что в условиях теоремы 2.6

а) построены семейства операторов

$$\overline U_t(\xi,\varepsilon)=\sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}}\xi^i\varepsilon^j\overline U_{ijt},\qquad \widetilde U_t(\xi,\varepsilon)=\sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}}\xi^i\varepsilon^j\widetilde U_{ijt},\qquad U_t(\xi,\varepsilon)=\overline U_t(\xi,\varepsilon)h_{F_t(\xi)}+\widetilde U_t(\xi,\varepsilon);$$

$$\overline V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)=\sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}}\xi^i\varepsilon^j\overline V_{ijt\tau},\qquad \widetilde V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)=\sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}}\xi^i\varepsilon^j\widetilde V_{ijt\tau},\qquad V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)=\overline V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)+\widetilde V_{t\tau}(\xi,\varepsilon);$$

б) при всех $t\in[0,t_0]$ и $\tau\in\mathbb{Z}_+$ определены производные

$$\frac{d^n\overline U_{ijt}}{dt^n}\in C^{q_{ij}-7-n}(M),\qquad n\le q_{ij}-9,$$

$$\frac{d^n\overline V_{ijt\tau}}{dt^n}\in\overline B\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}-n},\qquad \frac{d^n\widetilde U_{ijt}}{dt^n},\frac{d^n\widetilde V_{ijt\tau}}{dt^n}\in\widetilde B\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}-n},\qquad n\le q_{ij}-4,$$

которые равномерно ограничены в указанных пространствах, линейно и непрерывно зависят от g_0, а нормы производных $d^n\overline V_{ijt\tau}/dt^n$ и $d^n\widetilde V_{ijt\tau}/dt^n$ экспоненциально убывают по τ;

в) выполняется начальное условие

$$R(\xi,\varepsilon)=g_0-U_0(\xi,\varepsilon)-V_{00}(\xi,\varepsilon)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\mathfrak{D}}\xi^i\varepsilon^jR_{ij},\qquad R_{ij}\in\mathcal{F}^{p'_{ij},q'_{ij}};$$

г) выполняются равенства

$$P_t(\xi,\varepsilon)=\sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}'\setminus\mathfrak{D}}\xi^i\varepsilon^jP_{ijt}+\sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}'}\xi^i\varepsilon^jP_{ijt}(\xi,\varepsilon), \tag{27}$$

$$\overline{B}P_{ijt}=0 \qquad \text{при} \quad (i,j-1)\in\mathfrak{D} \quad \text{и} \quad (i,j)\in\mathfrak{D}'\setminus\mathfrak{D}, \tag{28}$$

$$Q_{t\tau}(\xi,\varepsilon)=\sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}'\setminus\mathfrak{D}}\xi^i\varepsilon^jQ_{ijt\tau}+\sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}'}\xi^i\varepsilon^jQ_{ijt\tau}(\xi,\varepsilon); \tag{29}$$

д) существуют такие константы C_{ij} и $\Lambda\in(\Lambda_0,1)$, не зависящие от g_0, что при всех $t\in[0,t_0]$, $\tau\in\mathbb{Z}_+$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}\|P_{ijt}(\xi,\varepsilon)\|_{[2N/5],4}\le C_{ij}\|g_0\|_{1,N-2}, \qquad \|Q_{ijt\tau}(\xi,\varepsilon)\|_{[2N/5],4}\le C_{ij}\|g_0\|_{1,N-2},\\ \left\|\frac{d^nP_{ijt}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}-n}\le C_{ij}\|g_0\|_{1,N-2}, \qquad \left\|\frac{d^nQ_{ijt\tau}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}-n}\le C_{ij}\Lambda^\tau\|g_0\|_{1,N-2},\end{gathered} \tag{30}$$

в которых $n\le q_{ij}-4$, а если $(i,j-1)\notin\mathfrak{D}$, то

$$\left\|\frac{d^nP_{ijt}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}+5-n}\le C_{ij}\|g_0\|_{1,N-2}, \qquad n\le q_{ij}+1 \tag{31}$$

(подразумевается, что все указанные производные существуют и принадлежат соответствующим пространствам);

е) при $\varepsilon=0$ выполняется тождество $\widetilde{U}_t(\xi,0)\equiv 0$.

Очевидно, если мы докажем это предположение для произвольной правильной диаграммы $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{D}'$, то тем самым будет доказана и теорема 2.6.

Базис индукции. Предположение индукции выполнено, если диаграмма $\mathfrak{D}$ пуста, функции $U_t(\xi,\varepsilon)$, $V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)$ и невязки $P_t(\xi,\varepsilon)$, $Q_{t\tau}(\xi,\varepsilon)$ нулевые, а $R(\xi,\varepsilon)=R_{00}=g_0$. Для $\mathfrak{D}=\varnothing$ числа p'_{ij} и q'_{ij} формально не определены, но можно взять $p'_{ij}=1$ и $q'_{ij}=N-2$.

Шаг индукции. Рассмотрим любую точку роста $(i,j)\in\mathfrak{G}$ диаграммы $\mathfrak{D}$, лежащую в $\mathfrak{D}'$. Положим

$$\overline{P}_{ijt}=\overline{B}P_{ijt}, \qquad \widetilde{P}_{ijt}=\widetilde{B}P_{ijt}, \qquad \overline{Q}_{ijt\tau}=\overline{B}Q_{ijt\tau}, \qquad \widetilde{Q}_{ijt\tau}=\widetilde{B}Q_{ijt\tau}.$$

А. *Вычисление* $\widetilde{U}_{ijt}$. Вначале заметим, что $\overline{P}_{ijt}\equiv 0$. При $j>0$ это вытекает из (28), а при $j=0$ из того, что в силу условия е) предположения индукции и расслоенности $B_0[F_t(\xi)]$ будет

$$P_t(\xi,0)=e^{-\dot{F}_t(\xi)}B_0[F_t(\xi)](\overline{U}_t(\xi,0)h_{F_t(\xi)})-\overline{U}_t(\xi,0)h_{F_t(\xi)}\equiv 0. \tag{32}$$

Следовательно, чтобы “убить” слагаемое $\xi^i\varepsilon^jP_{ijt}$ в (27), достаточно подобрать такой добавочный одночлен $\xi^i\varepsilon^j\widetilde{U}_{ijt}$ к слоистой функции $U_t(\xi,\varepsilon)$ в (24), при котором выполняется уравнение

$$B_0\widetilde{U}_{ijt}-\widetilde{U}_{ijt}=-\widetilde{P}_{ijt}.$$

Оно имеет единственное решение

$$\widetilde{U}_{ijt}=(\mathrm{I}-B_0)^{-1}\widetilde{P}_{ijt}. \tag{33}$$

В силу (22) и (30) будет $d^n\widetilde{U}_{ijt}/dt^n\in\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}-n}$ при $n\le q_{ij}-4$. Заметим, что при $j=0$ из тождества (32) вытекает $P_{i0t}\equiv 0$, откуда $\widetilde{U}_{i0t}\equiv 0$. Поэтому после добавления $\xi^i\varepsilon^j\widetilde{U}_{ijt}$ к $U_t(\xi,\varepsilon)$ условие е) предположения индукции останется в силе.

Б. *Вычисление* $\widetilde{V}_{ijt\tau}$. Чтобы "убить" слагаемое $\xi^i\varepsilon^j\widetilde{Q}_{ijt\tau}$ в (29), нужно подобрать такой добавочный одночлен $\xi^i\varepsilon^j\widetilde{V}_{ijt\tau}$ к функции $V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)$ в (25), при котором выполняется равенство

$$B_0\widetilde{V}_{ijt\tau} - \widetilde{V}_{ijt,\tau+1} = -\widetilde{Q}_{ijt\tau}.$$

Из него следует, что

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{ijt\tau} &= \widetilde{Q}_{ijt,\tau-1} + B_0\widetilde{V}_{ijt,\tau-1} = \widetilde{Q}_{ijt,\tau-1} + B_0\widetilde{Q}_{ijt,\tau-2} + B_0^2\widetilde{V}_{ijt,\tau-2} = \ldots = \\ &= \widetilde{Q}_{ijt,\tau-1} + B_0\widetilde{Q}_{ijt,\tau-2} + \ldots + B_0^{\tau-1}\widetilde{Q}_{ijt0} + B_0^{\tau}\widetilde{V}_{ijt0}.\end{aligned} \tag{34}$$

Функцию $\widetilde{V}_{ijt0}$ следует взять такой, чтобы после завершения шага индукции могло выполняться начальное условие в) для новой диаграммы $\mathfrak{D}$, к которой присоединена рассматриваемая точка $(i,j)\in\mathfrak{G}\cap\mathfrak{D}'$. Это будет возможно только в том случае, если $\widetilde{V}_{ij00} = \widetilde{R}_{ij} - \widetilde{U}_{ij0}$. Остается свобода выбора $\widetilde{V}_{ijt0}$ при $t>0$. Проще всего взять $\widetilde{V}_{ijt0} = \widetilde{V}_{ij00}$. Очевидно, $p'_{ij}\le p_j$, а если $(i,j)\notin\mathfrak{D}$, то $q'_{ij}\ge q_{ij}$. По предположению индукции $R_{ij}\in\mathcal{F}^{p'_{ij},q'_{ij}}\subset\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}}$ и $\widetilde{Q}_{ijt\tau}\in\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}}$, а по построению $\widetilde{U}_{ij0}\in\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}}$. Поэтому $\widetilde{V}_{ijt\tau}\in\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}}$.

В. *Вычисление* $\overline{V}_{ijt\tau}$. Чтобы "убить" слагаемое $\xi^i\varepsilon^j\overline{Q}_{ijt\tau}$ в (29), необходимо и достаточно подобрать такой добавочный одночлен $\xi^i\varepsilon^j\overline{V}_{ijt\tau}$ к функции $V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)$ в (25), чтобы выполнялось уравнение

$$\overline{V}_{ijt\tau} - \overline{V}_{ijt,\tau+1} = -\overline{Q}_{ijt\tau}.$$

Нам нужно найти его решение $\overline{V}_{ijt\tau}$, стремящееся к нулю при $\tau\to\infty$. Из него получаем

$$\begin{aligned}\overline{V}_{ijt\tau} &= -\overline{Q}_{ijt\tau} + \overline{V}_{ijt,\tau+1} = -\overline{Q}_{ijt\tau} - \overline{Q}_{ijt,\tau+1} + \overline{V}_{ijt,\tau+2} = \ldots = \\ &= -\overline{Q}_{ijt\tau} - \overline{Q}_{ijt,\tau+1} - \overline{Q}_{ijt,\tau+2} - \ldots\end{aligned} \tag{35}$$

Тогда из (30) следует, что

$$\left\|\frac{d^n\overline{V}_{ijt\tau}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}-n} \le C_{ij}\frac{\Lambda^\tau}{1-\Lambda}\,\|g_0\|_{1,N-2}.$$

Г. *Вычисление* $\overline{U}_{ijt}$. Заменим слоистую функцию $U_t(\xi,\varepsilon)$ на $U_t(\xi,\varepsilon)+\xi^i\varepsilon^j\widetilde{U}_{ijt}$ и заново вычислим соответствующую невязку (24). Она будет иметь вид

$$P'_t(\xi,\varepsilon) = P_t(\xi,\varepsilon) + \xi^i\varepsilon^jW_t^2(\xi,\varepsilon), \qquad \text{где} \quad W_t^2(\xi,\varepsilon) = e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)}B_\varepsilon\widetilde{U}_{ijt} - \widetilde{U}_{ij,t+\varepsilon}.$$

С помощью леммы 3.2 построим тейлоровское разложение $W_t^2(\xi,\varepsilon)$ по ξ, ε до степени $\nu = [q_{ij}/5]-1$. В результате получим тейлоровское разложение для $P'_t(\xi,\varepsilon)$. В этом новом разложении по сравнению со старым коэффициент $P_{i,j+1,t}$ (при $\xi^i\varepsilon^{j+1}$) изменится и станет равен

$$P'_{i,j+1,t} = P_{i,j+1,t} + \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\left(B_\varepsilon\widetilde{U}_{ijt} - \widetilde{U}_{ij,t+\varepsilon}\right) = P_{i,j+1,t} + W_{01t}^2. \tag{36}$$

Из леммы 3.2 и (31) следует, что

$$\frac{d^nW_{01t}^2}{dt^n}\in\mathcal{F}^{p_j+2,q_{ij}-5-n}, \qquad \frac{d^nP_{i,j+1,t}}{dt^n}\in\mathcal{F}^{p_{j+1},q_{i,j+1}+5-n},$$

откуда

$$\frac{d^nP'_{i,j+1,t}}{dt^n}\in\mathcal{F}^{p_j+2,\,q_{ij}-5-n}, \qquad n\le q_{ij}-9. \tag{37}$$

Нам осталось подобрать такой добавок $\xi^i\varepsilon^j\overline{U}_{ijt}e_{F_t(\xi)}$ к функции $U_t(\xi,\varepsilon)$ в (24), чтобы удовлетворить равенству (28), или, что то же самое, “убить” слагаемое $\xi^i\varepsilon^{j+1}\overline{B}P'_{i,j+1,t}$ в (27). Для этого необходимо и достаточно решить уравнение

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\overline{B}\big(B_\varepsilon(\overline{U}_{ijt}h)-\overline{U}_{ij,t+\varepsilon}h\big)=-\overline{B}P'_{i,j+1,t}.$$

Оно равносильно

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\nu\Big(B_\varepsilon(\overline{U}_{ijt}h)-\overline{U}_{ijt}B_\varepsilon h+\overline{U}_{ijt}B_\varepsilon h-\overline{U}_{ijt}B_0h+\overline{U}_{ijt}h-\overline{U}_{ij,t+\varepsilon}h\Big)=-\nu(P'_{i,j+1,t}).$$

А последнее в силу утверждения 2.5 равносильно

$$\frac{d\overline{U}_{ijt}}{d\overline{v}_n}+\alpha\overline{U}_{ijt}-\frac{d\overline{U}_{ijt}}{dt}=-\nu(P'_{i,j+1,t}),\qquad \text{где}\quad \alpha=\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\nu(B_\varepsilon h)\in C^{N-9}(M). \tag{38}$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Оно имеет единственное решение при любом начальном условии $\overline{U}_{ij0}$. Чтобы удовлетворить условию в) предположения индукции, следует взять $\overline{U}_{ij0}=\nu(R_{ij}-\overline{V}_{ij00})$. У нас $R_{ij}\in\mathcal{F}^{p'_{ij},q'_{ij}}\subset\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}}$ и $\overline{V}_{ij00}\in\mathcal{F}^{p_j,q_{ij}}$. Следовательно, $\overline{U}_{ij0}\in C^{q_{ij}-2}(M)$. А из (37) вытекает, что $d^n\nu(P'_{i,j+1,t})/dt^n\in C^{q_{ij}-7-n}(M)$. Поэтому для решения $\overline{U}_{ijt}$ уравнения (38) будет $d^n\overline{U}_{ijt}/dt^n\in C^{q_{ij}-7-n}(M)$.

Д. *Построение новых невязок.* Вначале докажем оценки

$$\left\|\frac{d^n\overline{U}_{ijt}}{dt^n}\right\|_{q_{ij}-7-n}\le C\|g_0\|_{1,N-2},\qquad \left\|\frac{d^n\widetilde{U}_{ijt}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}-n}\le C\|g_0\|_{1,N-2},$$

$$\left\|\frac{\overline{V}_{ijt\tau}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}-n}\le C\Lambda^\tau\|g_0\|_{1,N-2},\qquad \left\|\frac{d^n\widetilde{V}_{ijt\tau}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}-n}\le C\Lambda^\tau\|g_0\|_{1,N-2}$$

с некоторой константой C, не зависящей от g_0. Первые три из них вытекают просто из определений функций $\overline{U}_{ijt}$, $\widetilde{U}_{ijt}$, $\overline{V}_{ijt\tau}$ и соответствующих оценок д) предположения индукции. А из (22), определения $\widetilde{V}_{ijt\tau}$ и оценок для $d^nQ_{ijt\tau}/dt^n$ вытекает

$$\left\|\frac{d^n\widetilde{V}_{ijt\tau}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}-n}\le\|\widetilde{B}\|C_{ij}\big(\Lambda^{\tau-1}+C_0\Lambda_0\Lambda^{\tau-2}+\ldots+C_0\Lambda_0^{\tau-1}\big)\|g_0\|_{1,N-2}+C_0\Lambda_0^\tau\left\|\frac{d^n\widetilde{V}_{ijt0}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}-n}\le$$

$$\le\|\widetilde{B}\|C_{ij}C_0\frac{\Lambda^\tau}{\Lambda-\Lambda_0}\|g_0\|_{1,N-2}+C_0\Lambda^\tau\left\|\frac{d^n\widetilde{V}_{ijt0}}{dt^n}\right\|_{p_j,q_{ij}-n}.$$

Нетрудно видеть, что правая часть последнего неравенства по порядку не превосходит $\Lambda^\tau\|g_0\|_{1,N-2}$.

Заменим в определениях невязок (24)–(26) функции $U_t(\xi,\varepsilon)$ и $V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)$ соответственно на

$$U'_t(\xi,\varepsilon)=U_t(\xi,\varepsilon)+\xi^i\varepsilon^j\big(\overline{U}_{ijt}h_{F_t(\xi)}+\widetilde{U}_{ijt}\big),\qquad V'_{t\tau}(\xi,\varepsilon)=V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)+\xi^i\varepsilon^j\big(\overline{V}_{ijt\tau}+\widetilde{V}_{ijt\tau}\big).$$

Тогда новые невязки будут иметь вид

$$P'_t(\xi,\varepsilon)=P_t(\xi,\varepsilon)+\xi^i\varepsilon^j\big(W_t^1(\xi,\varepsilon)+W_t^2(\xi,\varepsilon)\big), \tag{39}$$

$$Q'_{t\tau}(\xi,\varepsilon)=Q_{t\tau}(\xi,\varepsilon)+\xi^i\varepsilon^jW_{t\tau}^3(\xi,\varepsilon), \tag{40}$$

$$R'(\xi,\varepsilon)=R(\xi,\varepsilon)+\xi^i\varepsilon^jW^4(\xi), \tag{41}$$

где

$$W_t^1(\xi,\varepsilon) = e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon\big(\overline{U}_{ijt} h_{F_t(\xi)}\big) - \overline{U}_{ij,t+\varepsilon} h_{F_{t+\varepsilon}(\xi)},$$

$$W_t^2(\xi,\varepsilon) = e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon \widetilde{U}_{ijt} - \widetilde{U}_{ij,t+\varepsilon},$$

$$W_{t\tau}^3(\xi,\varepsilon) = e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon\big(\overline{V}_{ijt\tau} + \widetilde{V}_{ijt\tau}\big) - \big(\overline{V}_{ij,t+\varepsilon,\tau+1} + \widetilde{V}_{ij,t+\varepsilon,\tau+1}\big),$$

$$W^4(\xi) = \overline{U}_{ij0} h_{\xi F} + \widetilde{U}_{ij0} + \overline{V}_{ij00} + \widetilde{V}_{ij00}.$$

С помощью леммы 3.2 разложим добавочные функции $W_t^1(\xi,\varepsilon)$, $W_t^2(\xi,\varepsilon)$, $W_{t\tau}^3(\xi,\varepsilon)$ в многочлены Тейлора по ξ, ε до степени $\nu = [q_{ij}/5] - 2$, а $W^4(\xi)$ в ряд по ξ. Остается проверить, что в результате получатся разложения для невязок (39)–(41), удовлетворяющие требованиям в) и д) предположения индукции для диаграммы $\mathfrak{D} \cup \{(i,j)\}$.

Е. *Проверка условий* в) *и* д). Для всех трех невязок она производится примерно одинаково. Поэтому мы рассмотрим только одну невязку (39), для которой эта проверка наиболее сложна. В разложении $P_t'(\xi,\varepsilon)$ по степеням ξ, ε коэффициент при $\xi^{i'}\varepsilon^{j'}$ обозначим $P'_{i'j't}$. Если $i' < i$ или $j' < j$, то $P'_{i'j't} = P_{i'j't}$, а для $P_{i'j't}$ оценки (30), (31) выполняются. Пусть теперь $i' \ge i$ и $j' \ge j$. Представим $i' = i + k$, $j' = j + l$.

Вначале рассмотрим случай $k + l < \nu$. Тогда $P'_{i'j't} = P_{i'j't} + W^1_{klt} + W^2_{klt}$ (где коэффициенты W^1_{klt} и W^2_{klt} взяты из леммы 3.2). По лемме 3.2

$$\frac{d^n W^1_{klt}}{dt^n} \in \mathcal{F}^{1+2l,q_{ij}-5-k-5l-n}, \qquad \frac{d^n W^2_{klt}}{dt^n} \in \mathcal{F}^{p_j+2l,q_{ij}-k-5l-n}, \tag{42}$$

причем $W^1_{k0t} = 0$. Легко видеть, что $1 + 2l \le p_j + 2l = p_{j'}$ и $q_{ij} - k - 5l \ge q_{i'j'} + 5(k+l)$. Поэтому производные (42) принадлежат пространству $\mathcal{F}^{p_{j'},q_{i'j'}-n}$, а в случае $(k,l) \ne (0,1)$ пространству $\mathcal{F}^{p_{j'},q_{i'j'}+5-n}$, где им и положено быть в соответствии с оценками д).

Рассмотрим случай $k + l = \nu$. У нас $\nu = [q_{ij}/5] - 2$. Следовательно,

$$6i' + 10j' > 6i + 10j + 5\nu \ge 6i + 10j + q_{ij} - 14 = N - 21$$

и точка (i',j') лежит вне $\mathfrak{D}'$. Поэтому нужно лишь проверить, что $W^1_{klt}(\xi,\varepsilon), W^2_{klt}(\xi,\varepsilon) \in$ $\in \mathcal{F}^{[2N/5],4}$. Это действительно так, потому что по лемме 3.2 функции $W^1_{klt}(\xi,\varepsilon)$, $W^2_{klt}(\xi,\varepsilon)$ принадлежат $\mathcal{F}^{p_j+2\nu,q_{ij}-5-5\nu}$, где

$$p_j + 2\nu \le 1 + 2j + 2q_{ij}/5 - 4 = -3 + 2j + 2(N - 7 - 6i - 10j)/5 < 2N/5,$$

$$q_{ij} - 5 - 5\nu \ge q_{ij} - 5 - q_{ij} + 10 = 5.$$

Из той же леммы 3.2 следует, что нормы производных $d^n W^1_{klt}/dt^n$ и $d^n W^2_{klt}/dt^n$ в соответствующих пространствах будут оцениваться через $\|g_0\|_{1,N-2}$. Следовательно, и $d^n P'_{i'j't}/dt^n$ будут оцениваться через $\|g_0\|_{1,N-2}$. Теорема 2.6 доказана.

Для доказательства дополнения 1 достаточно сделать только один шаг индукции при $i = j = 0$. Поскольку $P_{00t} = Q_{00t\tau} = P_{01t} = 0$, а $R_{00} = g_0$, то из формул (33)–(35) получаем

$$\widetilde{U}_{00t} = 0, \qquad \widetilde{V}_{00t\tau} = B_0^\tau \widetilde{V}_{00t0} = B_0^\tau \widetilde{R}_{00} = B_0^\tau \widetilde{B} g_0, \qquad \overline{V}_{00t\tau} = 0.$$

Тогда из (36) следует, что $P'_{01t} = 0$, и уравнение (38) для нахождения $\overline{U}_{00t}$ приобретает вид

$$\frac{d\overline{U}_{00t}}{dt} = \frac{d\overline{U}_{00t}}{d\overline{v}_n} + \alpha \overline{U}_{00t}, \qquad \text{где} \quad \overline{U}_{000} = \nu(R_{00}) = \nu(g_0).$$

Пусть g^t — фазовый поток векторного поля $-\overline{v}_n$ на M. Тогда функция $u_t = \overline{U}_{00t} \circ g^t$ удовлетворяет обыкновенному линейному дифференциальному уравнению $\dot{u}_t = \alpha \circ g^t u_t$. Из определения (38) функции α видно, что она ограничена на M. Если $\inf_M u_0 = m > 0$, то отсюда следует неравенство $u_t \ge m e^{t \inf \alpha}$.

Чтобы убедиться в справедливости дополнения 2, достаточно проверить, что равенства (19), (20) остаются в силе, если в них заменить $F_t(\xi)$ на $F_t'(\xi) = J_\xi^k F_t(\xi)$, а $U_t(\xi,\varepsilon)$ на $U_t'(\xi,\varepsilon) = J_\xi^k U_t(\xi,\varepsilon)$. Отсюда естественно возникают ограничения на k. С одной стороны, k должно быть настолько большим, чтобы образующиеся после указанной замены в (19), (20) дополнительные невязки представлялись в виде $\sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i\varepsilon^j)$. На самом деле они имеют вид $O(\xi^{k+1})$, поэтому нам достаточно, чтобы точка $(k+1,0)$ лежала вне $\mathfrak{D}'$, что равносильно неравенству $k \ge (N-26)/6$. С другой стороны, k должно быть не слишком велико, чтобы эти дополнительные невязки имели необходимую гладкость и принадлежали пространству $\mathcal{F}^{[2N/5],4}$. Для этого достаточно, чтобы четыре функции

$$
\begin{gathered}
\bigl(J_\xi^k U_0(\xi,\varepsilon) - U_0(\xi,\varepsilon)\bigr)/\xi^{k+1}, \qquad \bigl(J_\xi^k U_{t+\varepsilon}(\xi,\varepsilon) - U_{t+\varepsilon}(\xi,\varepsilon)\bigr)/\xi^{k+1},\\
\bigl(e^{J_\xi^k \Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon J_\xi^k U_t(\xi,\varepsilon) - e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon U_t(\xi,\varepsilon)\bigr)/\xi^{k+1},\\
\bigl(e^{J_\xi^k \Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon V_{t\tau}(\xi,\varepsilon) - e^{\Phi_t(\xi,\varepsilon)} B_\varepsilon V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)\bigr)/\xi^{k+1}
\end{gathered}
\tag{43}
$$

принадлежали $\mathcal{F}^{[2N/5],4}$. Из леммы 3.1 следует, что функция $\bigl(J_\xi^k \Phi_t(\xi,\varepsilon) - \Phi_t(\xi,\varepsilon)\bigr)/\xi^{k+1}$ имеет гладкость не ниже $N-7-k$ по всем переменным и что слоистая функция $\bigl(J_\xi^k h_{F_t(\xi)} - h_{F_t(\xi)}\bigr)/\xi^{k+1}$ принадлежит пространству $\mathcal{F}^{1,N-8-k}$. Исходя из определения $U_t(\xi,\varepsilon)$ и $V_{t\tau}(\xi,\varepsilon)$ несложно показать, что можно обеспечить принадлежность слоистых функций (43) пространству $\mathcal{F}^{[2N/5],4}$, добившись, чтобы оно было модулем над $C^{N-7-k}(W\times M)$. А это будет при $N-7-k \ge [2N/5]+4$, для чего достаточно $k \le 3N/5 - 11$. Позволим себе опустить подтверждающие это элементарные рассуждения.

Докажем дополнение 3. Вначале заметим, что из определений плавной плотности и нормы слоистой функции (определения 5.1 и 3.3 из [5]) вытекает существование такого большого C, что для любого стандартного следа (Γ,α,Φ) с плавной плотностью и любой функции $g \in \mathcal{F}^{pq}$ выполняется оценка

$$
|g(\Gamma,\Phi)| \le C\|g\|_{pq} \inf \Phi. \tag{44}
$$

По условию функции g_0 и h_0 сильно положительны, что означает обычную положительность плюс существование такого $c > 0$, что $g_0(\Gamma,\alpha,1) \ge c$ и $h_0(\Gamma,\alpha,1) \ge c$ для всех стандартных листов (Γ,α). Назовем слоистую функцию *слабо положительной*, если она принимает неотрицательные значения на стандартных следах с плавными плотностями. Поскольку образ следа с плавной плотностью тоже имеет плавную плотность (следствие 5.1.1 из [5]), оператор B_0 сохраняет как сильную, так и слабую положительность.

Фиксируем стандартный след с плавной плотностью (Γ,α,Φ). Из сильной положительности g_0 и оценки (44) для функции h_0 вытекает, что при некотором $\delta > 0$ функция $g_0 - \delta h_0$ слабо положительна. Такой же будет и $B_0^k(g_0 - \delta h_0) = B_0^k g_0 - \delta h_0$. Поэтому

$$
B_0^k g_0(\Gamma,\Phi) \ge \delta h_0(\Gamma,\Phi) \ge \delta c \inf \Phi.
$$

Из (19), (20) при $\xi = \varepsilon = 0$ следует, что $U_0(0,0) + V_{0,k}(0,0) = B_0^k g_0$. По соображениям непрерывности для любого натурального m существует такая малая область изменения параметров ξ и ε, в которой

$$
\bigl[U_{k\varepsilon}(\xi,\varepsilon) + V_{k\varepsilon,k}(\xi,\varepsilon)\bigr](\Gamma,\alpha,\Phi) \ge \frac{\delta c}{2} \inf \Phi, \qquad k = 0,\dots,m. \tag{45}
$$

А из дополнения 1 легко вывести существование такого $c_0 > 0$, что

$$U_t(\xi, \varepsilon)(\Gamma, \alpha, \Phi) \geq c_0 \inf \Phi \tag{46}$$

при всех достаточно малых ξ, ε и $t \in [0, t_0]$. Поскольку $V_{t\tau}$ экспоненциально убывает по τ, из (45), (46) вытекает существование такого $c_1 > 0$, что

$$\big[U_t(\xi, \varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(\xi, \varepsilon)\big](\Gamma, \alpha, \Phi) \geq c_1 \inf \Phi.$$

С другой стороны, в силу (44)

$$\Bigg[\sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i \varepsilon^j)\Bigg](\Gamma, \alpha, \Phi) = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i \varepsilon^j) \cdot \inf \Phi$$

равномерно по (Γ, α, Φ) и $t \in [0, t_0]$. Из последних двух оценок вытекает дополнение 3.

4. КРАМЕРОВСКИЕ АСИМПТОТИКИ

Рассмотрим произвольное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Скажем, что другое вероятностное пространство $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbf{P}')$ является его *расширением*, если задана измеримая проекция $\pi\colon (\Omega', \mathcal{A}', \mathbf{P}') \to (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, сохраняющая меру (т.е. $\mathbf{P}(M) = \mathbf{P}'(\pi^{-1}(M))$ для всех $M \in \mathcal{A}$). Всякая случайная величина χ на Ω индуцирует случайную величину $\chi' = \chi \circ \pi$ на Ω'. При этом функции распределения χ и χ' совпадают. Ниже мы будем использовать переход от Ω к расширенному вероятностному пространству Ω' для вычисления распределения случайной величины χ.

Напомним, что оператор усредненного взвешенного сдвига $A_{\varepsilon,n}$ определяется формулой

$$A_{\varepsilon,n} g(\Gamma, \alpha, \Phi) = \int\limits_{\Gamma'_\varepsilon} \xi_\Gamma(\alpha, \beta) g(\Gamma'_\varepsilon, \beta', \Phi'_\varepsilon)\, d\mu(\beta'). \tag{47}$$

В ней (Γ, α, Φ) — произвольный стандартный след с центром α, точка β принадлежит Γ, $\beta' = \Sigma_\varepsilon^n(\beta)$, след $(\Gamma'_\varepsilon, \Phi'_\varepsilon)$ совпадает с $(\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon)^n(\Gamma, \Phi)$, а μ — риманов объем на Γ'_ε. Стандартная неотрицательная функция $\xi_\Gamma(\alpha, \beta)$ на $\Gamma \times \Gamma$ определяется таким образом, что она строго положительна, если расстояние между α и β меньше некоторого достаточно малого, но фиксированного числа $r_0 > 0$, обращается в нуль, если расстояние между α и β больше $2r_0$, и удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_\Gamma \xi_\Gamma(\alpha, \beta)\, d\mu(\alpha) \equiv 1. \tag{48}$$

Как и раньше, будем предполагать, что весовая функция J_ε отделена снизу от нуля. Тогда *нормированный* оператор усредненного взвешенного сдвига B_ε получается из $A_{\varepsilon,n}$ путем замены в определении $A_{\varepsilon,n}$ веса J_ε на нормированный вес $\widehat{J}_\varepsilon = e^{-\lambda_n/n} J_\varepsilon$ (где e^{λ_n} — максимальное собственное значение $A_{0,n}$). Если исходный вес изначально нормирован, то $A_{\varepsilon,n}$ совпадает с B_ε.

Пусть (G_0, Φ_0) — некоторый след, имеющий достаточно большие линейные размеры, с положительной плотностью Φ_0. Предположим, что множество Γ_0 компактно содержится в G_0 и что для любой точки $\alpha \in \Gamma_0$ существует стандартный лист (Γ, α) с центром α, целиком лежащий в G_0. Пусть слоистая функция g_0 определяется тем, что ее значение на всяком стандартном следе (Γ, α, Φ) равно $\Phi(\alpha)$. Определим следующие линейные функционалы $\nu_k\colon C^\infty(G_0) \to \mathbb{R}$:

$$\nu_k(f) = \int\limits_{\Gamma_0} A^k_{\varepsilon,n} g_0(\Gamma, \alpha, f\Phi_0)\, d\mu(\alpha). \tag{49}$$

Исходя из определения (47) эти функционалы можно представить как кратные интегралы. Для этого построим последовательности следов $(G_i, \Phi_i) = (\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon)^{ni}(G_0, \Phi_0)$ и $(G_i, f_i) = \Sigma_\varepsilon^{ni}(G_0, f)$. Тогда, очевидно,

$$\Phi_i(\Sigma_\varepsilon^{ni}(\alpha)) = (\Phi \times J_\varepsilon \times J_\varepsilon \circ \Sigma_\varepsilon \times \ldots \times J_\varepsilon \circ \Sigma_\varepsilon^{ni-1})(\alpha),$$

$$f_i(\Sigma_\varepsilon^{ni}(\alpha)) = f(\alpha), \qquad (G_i, f_i\Phi_i) = (\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon)^{ni}(G_0, f\Phi_0).$$

Будем рассматривать такие последовательности пар точек $(\alpha_i, \beta_i) \in G_i$, $i = 0, \ldots, k$, в которых $\alpha_{i+1} = \Sigma_\varepsilon^n(\beta_i)$ при всех $i = 0, \ldots, k-1$. Тогда из (47), (49) вытекает, что

$$\nu_k(f) = \int\limits_{G_k} f_k(\alpha_k)\Phi_k(\alpha_k)\, d\mu(\alpha_k) \int\limits_{G_{k-1}} \xi_{G_{k-1}}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})\, d\mu(\alpha_{k-1}) \ldots$$

$$\ldots \int\limits_{G_1} \xi_{G_1}(\alpha_1, \beta_1)\, d\mu(\alpha_1) \int\limits_{\Gamma_0} \xi_G(\alpha_0, \beta_0)\, d\mu(\alpha_0) = \tag{50}$$

$$= \int\limits_{\Gamma_0} d\mu(\alpha_0) \int\limits_{G_1} \xi_{G_0}(\alpha_0, \beta_0)\, d\mu(\alpha_1) \ldots \int\limits_{G_k} \xi_{G_{k-1}}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) f_k(\alpha_k)\Phi_k(\alpha_k)\, d\mu(\alpha_k). \tag{51}$$

Для любого $R > 0$ обозначим через Γ_0^{+R} множество точек листа G_0, которые лежат на расстоянии меньше R от Γ_0, а через Γ_0^{-R} множество тех точек Γ_0, которые лежат на расстоянии больше R от $G_0 \setminus \Gamma_0$. Не ограничивая общности, можно считать, что отображение Σ_ε растягивает все листы с коэффициентом растяжения не меньше Λ^{-1}, где число $\Lambda \in (0, 1)$ не зависит от листа.

Утверждение 4.1. *Для каждых ε, k существует такая неотрицательная гладкая функция $\zeta\colon G_0 \to [0, 1]$, обращающаяся в единицу на Γ_0^{-R} и в нуль на $G_0 \setminus \Gamma_0^{+R}$, где $R = 2r_0(1 - \Lambda)^{-1}$, что*

$$\nu_k(f) = \int\limits_{G} \zeta f \Phi_0 \times J_\varepsilon \times J_\varepsilon \circ \Sigma_\varepsilon \times \ldots \times J_\varepsilon \circ \Sigma_\varepsilon^{nk-1}\, d\mu \circ \Sigma_\varepsilon^{nk} \tag{52}$$

(где μ — риманов объем на $\Sigma_\varepsilon^{nk}(G_0)$). *В частности, для канонического веса J_ε получаем*

$$\nu_k(\Phi) = \int\limits_{G_0} \zeta \Phi\, d\mu,$$

где μ — риманов объем на G_0.

Доказательство. Положим

$$\zeta(\alpha) = \int\limits_{G_{k-1}} \xi_{G_{k-1}}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})\, d\mu(\alpha_{k-1}) \ldots \int\limits_{\Gamma_0} \xi_{G_0}(\alpha_0, \beta_0)\, d\mu(\alpha_0), \tag{53}$$

где $\beta_{k-1} = \Sigma_\varepsilon^{n(k-1)}(\alpha)$. Тогда из (50) вытекает (52). Пусть

$$\Gamma_0^- = \Gamma_0^{-2r_0}, \quad \Gamma_1^- = \bigl(\Sigma_\varepsilon^n(\Gamma_0^-)\bigr)^{-2r_0}, \ \ldots, \quad \Gamma_k^- = \bigl(\Sigma_\varepsilon^n(\Gamma_{k-1}^-)\bigr)^{-2r_0}.$$

Из того что отображение Σ_ε растягивает все листы с коэффициентом не меньше Λ^{-1}, вытекает включение $\Sigma_\varepsilon^{ni}(\Gamma_0^{-R}) \subset \Gamma_i^-$ для всех i. Последовательно вычисляя в (53) интегралы справа налево и учитывая (48), получаем, что при $\beta_i \in \Gamma_i^-$

$$\int\limits_{G_i} \xi_{G_i}(\alpha_i, \beta_i)\, d\mu(\alpha_i) \ldots \int\limits_{G_1} \xi_{G_1}(\alpha_1, \beta_1)\, d\mu(\alpha_1) \int\limits_{\Gamma_0} \xi_G(\alpha_0, \beta_0)\, d\mu(\alpha_0) = 1.$$

Из этого равенства (для $i = k-1$) и включения $\Sigma_\varepsilon^{n(k-1)}(\Gamma_0^{-R}) \subset \Gamma_{k-1}^-$ вытекает равенство $\zeta(\alpha) = 1$ при $\alpha \in \Gamma_0^{-R}$. Аналогично проверяется, что $\zeta(\alpha) = 0$ при $\alpha \in G_0 \setminus \Gamma_0^{+R}$. Наконец, из (48) и (53) видно, что $\zeta(\alpha) \in [0,1]$ при $\alpha \in G_0$. Утверждение 4.1 доказано.

Мы изучаем след (G_0, Φ_0) с положительной плотностью Φ_0 и лист $\Gamma_0 \subset G_0$, обладающий тем свойством, что для каждой точки $\alpha \in \Gamma_0$ существует стандартный лист (Γ, α), целиком лежащий в G_0. Определим линейные функционалы $\mathbf{P}_k$ на $C^\infty(G_0)$ формулой

$$\mathbf{P}_k(f) = \frac{\nu_k(f)}{\nu_k(1)}. \tag{54}$$

Из (52) видно, что функционал $\mathbf{P}_k$ положителен (принимает неотрицательные значения на неотрицательных функциях). Кроме того, он нормирован (т.е. $\mathbf{P}_k(1) = 1$). Из теоремы Рисса следует, что $\mathbf{P}_k$ определяет борелевскую вероятностную меру на G_0.

Рассмотрим вероятностное пространство $(G_0, \mathcal{B}, \mathbf{P}_k)$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на G_0. Определим вероятностное пространство Ω_k как множество последовательностей пар точек $(\alpha_i, \beta_i) \in G_i$, $i = 0, \dots, k-1$, в которых расстояние между α_i и β_i не превосходит $2r_0$ и $\alpha_{i+1} = \Sigma_\varepsilon^n(\beta_i)$ при всех i. Очевидно, в каждой такой последовательности точки β_i однозначно восстанавливаются по α_i. Поэтому всякая функция f на Ω_k представляется как $f = f(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$. Определим вероятностную меру $\mathbf{P}'_k$ на Ω_k как линейный функционал $\mathbf{P}'_k(f) = \nu'_k(f)/\nu'_k(1)$, где

$$\nu'_k(f) = \int\limits_{\Gamma_0} d\mu(\alpha_0) \int\limits_{G_1} \xi_{G_0}(\alpha_0, \beta_0)\, d\mu(\alpha_1) \dots \int\limits_{G_k} \xi_{G_{k-1}}(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) f(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \Phi_k(\alpha_k)\, d\mu(\alpha_k). \tag{55}$$

Если $f(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = f_k(\alpha_k)$, то (55) совпадает с (51). Поэтому $(\Omega_k, \mathcal{B}, \mathbf{P}'_k)$ является расширением $(G_0, \mathcal{B}, \mathbf{P}_k)$. Соответствующая проекция $\pi\colon \Omega_k \to G_0$ сопоставляет последовательности $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ такую точку $\alpha \in G_0$, что $\Sigma_\varepsilon^{nk}(\alpha) = \alpha_k$. Рассмотрим случайную величину $f(\alpha) = F \circ \Sigma_\varepsilon^{nk}(\alpha)$ на G_0. Она индуцирует случайную величину $f \circ \pi(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = F(\alpha_k)$ на Ω_k. Поэтому распределение $F \circ \Sigma_\varepsilon^{nk}$ по мере $\mathbf{P}_k$ совпадает с распределением $F(\alpha_k)$ по мере $\mathbf{P}'_k$.

Теорема 4.2. *Пусть вес J_ε нормирован, плотность Φ_0 на листе G_0 плавная, а значение слоистой функции g_0 на любом стандартном следе (Γ, α, Φ) равно $\Phi(\alpha)$. Тогда в условиях теоремы 2.6 существует семейство непрерывных функций $G_k(\xi, \varepsilon)\colon \Omega_k \to \mathbb{C}$, аналитически зависящее от ξ и вещественное при $\xi \in \mathbb{R}$, для которого при всех достаточно малых ξ, ε и $t \in \varepsilon\mathbb{Z} \cap [0, t_0]$ выполняются равенства*

$$\mathbf{P}'_{t/\varepsilon}\big(\exp(\xi F(\alpha_{t/\varepsilon})/\varepsilon + G_{t/\varepsilon}(\xi, \varepsilon))\big) = \frac{e^{F_t^*(\xi)/\varepsilon} \int_{\Gamma_0} \big(U_t^*(\xi, \varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(\xi, \varepsilon)\big)(\Gamma, \alpha, \Phi_0)\, d\mu(\alpha)}{\int_{\Gamma_0} \big(U_t^*(0, \varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(0, \varepsilon)\big)(\Gamma, \alpha, \Phi_0)\, d\mu(\alpha)}, \tag{56}$$

в которых $F_t^*(\xi) = J_\xi^{[N/5]} F_t(\xi)$ и $U_t^*(\xi, \varepsilon) = J_\xi^{[N/5]} \overline{U}_t(\xi, \varepsilon) + \widetilde{U}_t(\xi, \varepsilon)$ являются многочленами Тейлора степени $[N/5]$ по переменной ξ, и

$$G_{t/\varepsilon}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{G}} O(\xi^i \varepsilon^j). \tag{57}$$

Доказательство. Положим для краткости $k = t/\varepsilon$. Перепишем тождества (19) и (20) из теоремы 2.6 с учетом дополнения 2 к ней, в котором возьмем $k = [N/5]$:

$$g_0 = U_0^*(\xi, \varepsilon) + V_{00}(\xi, \varepsilon) + \sum_{(i,j) \in \mathfrak{G}} O(\xi^i \varepsilon^j), \tag{58}$$

$$B_\varepsilon e^{F_t^*(\xi)/\varepsilon} \big(U_t^*(\xi, \varepsilon) + V_{t\tau}(\xi, \varepsilon)\big) = e^{F_{t+\varepsilon}^*(\xi)/\varepsilon} \Bigg(U_{t+\varepsilon}^*(\xi, \varepsilon) + V_{t+\varepsilon, \tau+1}(\xi, \varepsilon) + \sum_{(i,j) \in \mathfrak{G}} O(\xi^i \varepsilon^j)\Bigg). \tag{59}$$

Обозначим через (Γ_i, α_i) стандартный лист, лежащий в G_i. Определим функции

$$\psi_{k-i}(\xi,\varepsilon)(\alpha_{k-i}) = \frac{e^{F^*_{i\varepsilon}(\xi)/\varepsilon}\big(U^*_{i\varepsilon}(\xi,\varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(\xi,\varepsilon)\big)(\Gamma_{k-i},\alpha_{k-i},\Phi_{k-i})}{e^{F^*_{i\varepsilon}(\xi)/\varepsilon}\big(U^*_{i\varepsilon}(\xi,\varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(\xi,\varepsilon) + \sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i\varepsilon^j)\big)(\Gamma_{k-i},\alpha_{k-i},\Phi_{k-i})},$$

$$\psi_k(\xi,\varepsilon)(\alpha_k) = \frac{g_0(\Gamma_k,\alpha_k,\Phi_k)}{\big(U^*_0(\xi,\varepsilon) + V_{00}(\xi,\varepsilon) + \sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i\varepsilon^j)\big)(\Gamma_k,\alpha_k,\Phi_k)},$$

где числители и знаменатели берутся из (58) и (59), а также

$$\Psi_k(\xi,\varepsilon)(\alpha_0,\dots,\alpha_k) = \prod_{i=0}^{k} \psi_{k-i}(\xi,\varepsilon)(\alpha_{k-i}).$$

Возьмем в (55) функцию $f = \Psi_k(\xi,\varepsilon)e^{\xi F(\alpha_k)/\varepsilon}$. Вычислим последовательно все интегралы в (55), используя на каждом шаге определение оператора B_ε и равенства (58), (59). У нас получится

$$\nu'_k\big(\Psi_k(\xi,\varepsilon)e^{\xi F(\alpha_k)/\varepsilon}\big) = \int\limits_{\Gamma_0} e^{F^*_t(\xi)/\varepsilon}\big(U^*_t(\xi,\varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(\xi,\varepsilon)\big)(\Gamma,\alpha,\Phi_0)\,d\mu(\alpha), \tag{60}$$

$$\nu'_k(\Psi_k(0,\varepsilon)) = \int\limits_{\Gamma_0} \big(U^*_t(0,\varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(0,\varepsilon)\big)(\Gamma,\alpha,\Phi_0)\,d\mu(\alpha). \tag{61}$$

Положим

$$G_k(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \ln\psi_i(\xi,\varepsilon)(\alpha_i) - \ln\frac{\nu'_k(\Psi_k(0,\varepsilon))}{\nu'_k(1)}.$$

Тогда деление (60) на (61) дает (56). Из дополнения 3 следует, что $\psi_i(\xi,\varepsilon)(\alpha_i) - 1 = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(\xi^i\varepsilon^j)$ равномерно по $i = 1,\dots,k$. Отсюда вытекают оценки (57). Теорема доказана.

Сформулируем теперь теорему, позволяющую извлекать из (56) точные асимптотики вероятностей больших уклонений для случайной величины $F\circ\Sigma_\varepsilon^{t/\varepsilon}$ по отношению к вероятностной мере $\mathbf{P}_{t/\varepsilon}$. Предположим, что некоторая вещественная случайная величина S имеет функцию распределения Ψ, а Φ_d — гауссово распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией d.

Теорема 4.3 [3]. *Пусть выполняется тождество* $\mathbf{E}\,e^{\xi S+G(\xi)} = e^{\varphi(\xi)}$ *при* $|\xi|\le R$, *где* $G(\xi)$ *— случайная величина, аналитически зависящая от комплексного параметра* ξ *и вещественная при вещественных* ξ, *а* φ *— аналитическая функция, удовлетворяющая условиям* $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ *и* $\varphi''(0)=d>0$. *Если положительная константа* Γ *и не убывающая при* $r>0$ *функция* $\gamma(r)$ *таковы, что* $\sup_{|\xi|<R}|\varphi(\xi)|\le\Gamma$ *и* $\sup_{|\xi|<r}\operatorname{ess\,sup}|G(\xi)|\le\gamma(r)$, *то при всех* $\alpha>0$

$$\frac{1-\Psi(\varphi'(\alpha))}{1-\Phi_d(\varphi'(\alpha))} = e^{\varphi(\alpha)-\alpha\varphi'(\alpha)+\varphi'(\alpha)^2/2d}\left[1 + O\left(\inf_{0<r<dR^3/\Gamma}\left(\frac{1}{r\sqrt{d}} + \gamma(r)\right)(\alpha\sqrt{d}+1)\right)\right]. \tag{62}$$

В этой формуле символ $O(\zeta)$ обозначает функцию, для которой $|O(\zeta)|\le\Delta|\zeta|$ при всех $|\zeta|\le\delta$, где Δ и δ — универсальные положительные постоянные.

Применим эту теорему к случайной величине $F \circ \Sigma_\varepsilon^{t/\varepsilon}$. В условиях теорем 2.6 и 4.2 введем обозначения

$$f_t(\xi,\varepsilon) = \frac{F_t^*(\xi)}{\varepsilon} + \ln \frac{\int_{\Gamma_0} (U_t^*(\xi,\varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(\xi,\varepsilon))(\Gamma,\alpha,\Phi_0)\, d\mu(\alpha)}{\int_{\Gamma_0} (U_t^*(0,\varepsilon) + V_{t,t/\varepsilon}(0,\varepsilon))(\Gamma,\alpha,\Phi_0)\, d\mu(\alpha)}, \tag{63}$$

$$a = \frac{\partial f_t(\xi,\varepsilon)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0}, \qquad S = \frac{F \circ \Sigma_\varepsilon^{t/\varepsilon}}{\varepsilon} - a, \qquad \varphi(\xi) = f_t(\xi,\varepsilon) - a\xi. \tag{64}$$

Пусть Ψ — функция распределения случайной величины $S = F \circ \Sigma_\varepsilon^{t/\varepsilon}/\varepsilon - a$ по мере $\mathbf{P}_{t/\varepsilon}$, а Φ_d — гауссово распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $d = \varphi''(0)$.

Теорема 4.4. *Если в условиях теоремы* 4.2 *производная* $\partial^2 F_t(0)/\partial\xi^2$ *положительна, диаграмма* $\mathfrak{D}$ *совпадает с множеством* $\mathfrak{D}' = \{(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2 \mid 6i + 10j \le N - 21\}$, *а число* $N > 32$, *то в обозначениях* (63), (64) *для любого* $\delta > 9/(N-14)$ *и всех* $\alpha \in (0, \varepsilon^\delta)$

$$\frac{1 - \Psi(\varphi'(\alpha))}{1 - \Phi_d(\varphi'(\alpha))} = e^{\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha) + \varphi'(\alpha)^2/2d}\big[1 + O\big(\varepsilon^{-9/(N-14)}(\alpha + \sqrt{\varepsilon})\big)\big]. \tag{65}$$

Это и есть крамеровская асимптотика для случайной величины S, а тем самым и для случайной величины $F \circ \Sigma_\varepsilon^{t/\varepsilon}/\varepsilon$, поскольку последняя отличается от S лишь неслучайным слагаемым a. Она охватывает область, в которой $\alpha < \varepsilon^\delta$. В этой области $\varphi'(\alpha)$ по порядку не превосходит $\varepsilon^{\delta-1}$ и соответственно разность $F \circ \Sigma_\varepsilon^{t/\varepsilon} - \varepsilon a$ по порядку не превосходит ε^δ.

Доказательство теоремы 4.4. Из теоремы 4.2 вытекает тождество $\mathbf{E}\, e^{\xi S + G_t(\xi,\varepsilon)} = e^{\varphi(\xi)}$. Поэтому достаточно всего лишь сослаться на теорему 4.3. Нужно только оценить невязку в равенстве (62). В данной ситуации дисперсия $d = \varphi''(0) = \varepsilon^{-1}F_t''(0) + O(1)$ будет порядка ε^{-1}. Нетрудно видеть, что число R в (62) можно взять порядка единицы, а Γ — порядка ε^{-1}. Подберем такую функцию $\gamma(r,\varepsilon)$, чтобы выполнялась оценка $\sup_{|\xi|<r} \operatorname{ess\,sup} |G_t(\xi,\varepsilon)| \le \gamma(r,\varepsilon)$. Воспользуемся известным неравенством $a^p b^q \le a + b$, где $p + q = 1$. Если $(i,j) \in \mathfrak{G}$, то $6i + 10j \ge N - 20$. Тогда

$$|\xi^i \varepsilon^j| \le |\xi|^{(6i+10j)/6} + \varepsilon^{(6i+10j)/10} \le |\xi|^{(N-20)/6} + \varepsilon^{(N-20)/10}.$$

Следовательно, при малых ξ, ε и некотором достаточно большом C

$$|G_t(\xi,\varepsilon)| = \varepsilon^{-1} \sum_{(i,j)\in\mathfrak{G}} O(|\xi|^i \varepsilon^j) \le C\varepsilon^{-1}\big(|\xi|^{(N-20)/6} + \varepsilon^{(N-20)/10}\big).$$

Поэтому можно взять $\gamma(r,\varepsilon) = C\varepsilon^{-1}\big(r^{(N-20)/6} + \varepsilon^{(N-20)/10}\big)$. Элементарная выкладка показывает, что в этой ситуации

$$\inf_{0<r<dR^3/\Gamma} \left(\frac{1}{r\sqrt{d}} + \gamma(r,\varepsilon)\right) \sim \varepsilon^{(N-32)/(2N-28)}$$

(инфимум достигается при $r \sim \varepsilon^{9/(N-14)}$). Из этой оценки и (62) вытекает (65).

В заключение скажем несколько слов о математическом ожидании и дисперсии случайной величины $F \circ \Sigma_\varepsilon^{t/\varepsilon}$. Разложим функцию $F_t(\xi)$ по степеням ξ: $F_t(\xi) = \xi F_{1t} + \xi^2 F_{2t} + \dots$ Из (56) видно, что математическое ожидание $F \circ \Sigma_\varepsilon^{t/\varepsilon}$ равно $F_{1t} + O(\varepsilon)$, а дисперсия равна $2\varepsilon F_{2t} + O(\varepsilon^2)$. По построению функция $F_t(\xi)$ является решением дифференциального уравнения $\dot F = \lambda_F$ с начальным условием $F_0(\xi) = \xi F$. В силу утверждения 2.5 $d\lambda_{\xi f}/d\xi\big|_{\xi=0} = df/d\overline{v}_n$, где $\overline{v}_n = n\overline{v}$. Поэтому коэффициенты F_{1t} и F_{2t} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dF_{1t}}{dt} = n\frac{dF_{1t}}{d\overline{v}}, \qquad \frac{dF_{2t}}{dt} = n\frac{dF_{2t}}{d\overline{v}} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\lambda_{\xi F_{1t}}}{d\xi^2}\right|_{\xi=0}$$

с начальными условиями $F_{10} = F$ и $F_{20} = 0$. Пусть g^t — фазовый поток векторного поля $\overline{v}$ на M. Тогда $F_{1t}(z) = F\circ g^{nt}(z)$. По утверждению 2.2 вторая производная $d^2\lambda_{\xi f}/d\xi^2$ всегда неотрицательна. Поэтому функция F_{2t} тоже неотрицательна (а в случае общего положения строго положительна). Эти факты следует истолковывать следующим образом. Если $\{(w_i, z_i)\}_{i=0}^{\infty}$ — траектория исходного каскада (1) с начальным условием $(w_0, z_0) \in G_0$, то точка $z_{t/\varepsilon}$ имеет асимптотически нормальное распределение, у которого математическое ожидание в первом приближении равно $g^t(z_0)$, а дисперсия по порядку не превосходит ε. Формула (65) позволяет вычислить асимптотические разложения по степеням ε для математического ожидания, дисперсии и старших семиинвариантов случайной величины $F(z_{t/\varepsilon})$, а также дает точные асимптотики вероятностей больших уклонений $F(z_{t/\varepsilon})$ от $F\circ g^t(z_0)$ на расстояния, по порядку не превосходящие ε^δ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахтин В.И.* Прямой метод построения инвариантной меры на гиперболическом аттракторе // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, №5. С. 934–957.
2. *Бахтин В.И.* Случайные процессы, порожденные гиперболической последовательностью отображений. I, II // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, №2. С. 40–72; №3. С. 184–195.
3. *Бахтин В.И.* Большие уклонения случайной величины с конечным числом семиинвариантов, значения которых вычислены приближенно // Теория вероятн. и ее примен. 1997. Т. 42, №3. С. 603–608.
4. *Бахтин В.И.* Крамеровские асимптотики в системе с медленными и марковскими быстрыми движениями // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44, №1. С. 14–33.
5. *Бахтин В.И.* Слоистые функции и оператор усредненного взвешенного сдвига для возмущений гиперболических отображений // Наст. изд. С. ??.
6. *Боуэн Р.* Методы символической динамики: Сб. ст. М.: Мир, 1979. 245 с.
7. *Минасян В.Б.* Принцип усреднения и теорема о больших уклонениях для некоторого семейства расширений Y-потока // УМН. 1980. Т. 35, №2. С. 215–216.
8. *Песин Я.Б.* Общая теория гладких гиперболических динамических систем // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 2. С. 123–173. (Итоги науки и техники).
9. *Kifer Yu.* Averaging in dynamical systems and large deviations // Invent. Math. 1992. V. 110, N 2. P. 337–370.