ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 244, с. 1–30

УДК ???

Слоистые функции и оператор усредненного взвешенного сдвига для возмущений гиперболических отображений[1]

©2004 г. В. И. Бахтин[2]

Поступило в 2003 г.

С целью изучить возмущения семейства отображений, обладающих гиперболическим перемешивающим аттрактором, автор развивает аппарат слоистых функций — аналогов обобщенных функций, для которых основными являются гладкие меры на листах (следы), а лист — это пунктированное подмногообразие в окрестности аттрактора. Размерность таких подмногообразий должна совпадать с размерностью растягивающегося слоения, а значение слоистой функции на следе должно гладко изменяться при гладкой поперечной деформации следа (включающей и деформацию самой меры).

В работах [1–3] для изучения стохастических свойств гиперболической последовательности отображений было введено понятие регулярной функции. С его помощью удалось доказать гладкую зависимость инвариантных мер на гиперболическом аттракторе от параметра, а также получить предельные теоремы для случайных процессов на аттракторе. В этой работе аналогичный аппарат развивается в случае динамической системы, являющейся возмущением семейства отображений, обладающих гиперболическим перемешивающим аттрактором. Только здесь мы будем использовать название "слоистая функция" вместо "регулярной функции". Это делается по двум причинам: во-первых, слово "слоистая" точнее отражает природу изучаемого объекта, а во-вторых, из-за смысловой перегруженности слова "регулярный".

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем, порожденную отображением

$$\begin{cases} w' = S(w, z, \varepsilon), \\ z' = z + \varepsilon v(w, z, \varepsilon). \end{cases}$$

Будем его коротко обозначать как $(w', z') = \Sigma_\varepsilon(w, z)$. Предположим, что отображение $w \mapsto S(w, z, 0)$ при каждом z имеет гиперболический перемешивающий аттрактор. Ниже для такой системы будет введено понятие слоистой функции, которое является далеким аналогом обобщенных функций. Обобщенные функции определяются как линейные функционалы на некотором пространстве основных функций. Для слоистых функций основными служат не обычные функции, а так называемые *следы*. След — это гладкая мера на некотором *листе*, а лист — это подмногообразие в окрестности гиперболического аттрактора, на котором отмечена одна точка, называемая *центром*. Это подмногообразие должно иметь ту же размерность, что и растягивающееся слоение. Рассматриваются лишь те листы, которые имеют направление, мало отличающееся от направления растягивающихся слоев. При этом требуется, чтобы значение слоистой функции на следе гладко изменялось при гладкой поперечной деформации следа (включающей и деформацию самой меры).

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований. Депонирована в ВИНИТИ 23.03.2001, № 721–B2001.

[2] Физический факультет, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. E-mail: bakhtin@bsu.by

Если Γ — лист с центром α, а Φ — мера на нем, то произведением следа (Γ,Φ) и функции $J = J(w,z)$ называется след $(\Gamma, J\Phi)$. Образом следа (Γ,Φ) называется след $\Sigma_\varepsilon(\Gamma,\Phi) = (\Sigma_\varepsilon(\Gamma), \Phi\circ\Sigma_\varepsilon^{-1})$. На множестве следов определяется оператор $\Sigma_\varepsilon J$, действующий по формуле $\Sigma_\varepsilon J(\Gamma,\Phi) = \Sigma_\varepsilon(\Gamma, J\Phi)$. Рассмотрим произвольную слоистую функцию $g(\Gamma,\alpha,\Phi)$. Определим для нее новую слоистую функцию $A_{\varepsilon,n}g(\Gamma,\alpha,\Phi)$ следующим образом. Пусть $(\Gamma',\Phi') = (\Sigma_\varepsilon J)^n(\Gamma,\Phi)$ и $\beta' = \Sigma_\varepsilon^n(\beta)$. Положим

$$A_{\varepsilon,n}g(\Gamma,\alpha,\Phi) = \int\limits_{\Gamma'} \xi_\Gamma(\alpha,\beta) g(\Gamma',\beta',\Phi')\,d\mu(\beta').$$

В этой формуле μ — риманов объем на Γ', а $\xi_\Gamma(\alpha,\beta)$ — некоторая стандартная неотрицательная функция на $\Gamma\times\Gamma$. Таким образом, на пространстве слоистых функций возникает оператор *усредненного взвешенного сдвига* $A_{\varepsilon,n}$ (с весовой функцией J). В данной работе изучаются его простейшие свойства.

Основные результаты таковы. Если подходящим образом определить норму на пространстве слоистых функций, то оно становится банаховым модулем над алгеброй конечно гладких функций, зависящих от переменных w и z. Если весовая функция J положительна и отделена снизу от нуля, то при $\varepsilon = 0$ и больших n для оператора $A_{0,n}$ существуют такая гладкая функция $\lambda_n = \lambda_n(z)$ и такая слоистая функция h_n, что $A_{0,n}h_n = e^{\lambda_n}h_n$. Кроме того, последовательность операторов $(e^{-\lambda_n}A_{0,n})^m$ при $m\to\infty$ сходится к некоторому проектору, отображающему весь модуль слоистых функций на подмодуль, порожденный h_n (над алгеброй функций, зависящих только от z). А при ненулевых ε семейство $A_{\varepsilon,n}$ в некотором смысле гладко зависит от ε (точнее, *квазидифференцируемо*, если пользоваться терминологией [2]).

Структура работы следующая. В разд. 1 подробно описывается изучаемая система, для нее определяется специальный гиперболический атлас и понятие листа. В разд. 2 строится Σ_ε-инвариантный класс листов. В разд. 3 даются строгие определения пространств слоистых функций и оператора усредненного взвешенного сдвига. Там же формулируются все основные результаты (теоремы 3.1–3.3). Последующие шесть разделов содержат подробные доказательства. Почти все доказательства носят вычислительный характер. В их основе лежат аккуратное дифференцирование неявных функций и получение оценок для их производных. К сожалению, геометрически прозрачные идеи, связанные со слоистыми функциями, имеют довольно громоздкую аналитическую формализацию. Из-за этого "доказательная" часть занимает много места, содержит много формул и очень мало нетривиальных приемов.

1. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ АТЛАС И ЛИСТЫ

Пусть M — некоторая выпуклая область стандартного евклидова пространства, а W — риманово многообразие. Рассмотрим N раз непрерывно дифференцируемое семейство отображений прямого произведения $W\times M$ в себя вида

$$\begin{cases} w' = S(w,z,\varepsilon),\\ z' = z + \varepsilon v(w,z,\varepsilon), \end{cases} \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, $w\in W$ и $z\in M$. Будем его коротко обозначать как $(w',z') = \Sigma_\varepsilon(w,z)$. Предположим, что $\Sigma_\varepsilon(W\times M)\subset W\times M$ при всех достаточно малых значениях ε. Тогда Σ_ε порождает динамическую систему с дискретным временем (каскад) на $W\times M$ с быстрыми движениями на W и медленными движениями на M (со скоростью порядка ε). Предположим еще, что отображение $S_z(w) = S(w,z,0)$ при каждом $z\in M$ имеет перемешивающий гиперболический аттрактор, непрерывно зависящий от z (определения см. в [4, 5]). Введем для таких систем понятие равномерно гиперболического атласа. Оно обобщает понятие гиперболического атласа, приведенное в [1] в случае аттрактора, не зависящего от параметра.

Пусть заданы два евклидовых пространства $\mathbb{R}^u$ и $\mathbb{R}^s$, причем $u+s=\dim W$. Произвольную точку из $\mathbb{R}^u$ будем называть x, а точку из $\mathbb{R}^s$ будем называть y. Обозначим через $\mathbb{B}^u_r$ и $\mathbb{B}^s_r$ открытые шары радиуса r с центром в нуле в $\mathbb{R}^u$ и $\mathbb{R}^s$ соответственно. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечный набор карт на W вида $w=\chi(x,y)$, где $\chi\colon \mathbb{B}^u_5\times\mathbb{B}^s_5\to W$. Мы не требуем, чтобы эти карты покрывали все W. Ту часть W, которую покрывают карты из $\mathfrak{A}$, обозначим $W_{\mathfrak{A}}$. Записью Σ_ε в картах $\chi,\chi'\in\mathfrak{A}$ будем считать отображение

$$\begin{cases} x'=X(x,y,z,\varepsilon),\\ y'=Y(x,y,z,\varepsilon),\\ z'=Z(x,y,z,\varepsilon)=z+\varepsilon Z'(x,y,z,\varepsilon), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$(x',y')=\bigl(X(x,y,z,\varepsilon),\,Y(x,y,z,\varepsilon)\bigr)=(\chi')^{-1}\circ S(\chi(x,y),z,\varepsilon), \tag{3}$$

$$z'=Z(x,y,z,\varepsilon)=z+\varepsilon v(\chi(x,y),z,\varepsilon),\quad Z'(x,y,z,\varepsilon)=v(\chi(x,y),z,\varepsilon). \tag{4}$$

Определение 1.1. Конечный набор карт $\mathfrak{A}$ вида $\chi\colon \mathbb{B}^u_5\times\mathbb{B}^s_5\to W$ назовем *равномерно гиперболическим атласом* для системы (1), если существуют такие положительные числа a, b, θ, что

а) выполняется условие $a+\theta^{-1}b<1$, а θ достаточно мало (а именно $\theta<1/10$);

б) при малых ε выполняется включение $\Sigma_\varepsilon(W_{\mathfrak{A}}\times M)\subset\bigcup_{\chi\in\mathfrak{A}}\chi(\mathbb{B}^u_1\times\mathbb{B}^s_1)\times M$;

в) для любых карт $\chi,\chi'\in\mathfrak{A}$ и произвольных x, y, z, ε из области определения отображения (3)
$$\left\|\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^{-1}\right\|\le a,\qquad \left\|\frac{\partial Y}{\partial y}\right\|\le a,\qquad \left\|\frac{\partial X}{\partial y}\right\|\le b,\qquad \left\|\frac{\partial Y}{\partial x}\right\|\le b; \tag{5}$$

г) все частные производные от X, Y, Z, Z' вплоть до порядка N ограничены.

Определение 1.2. Назовем атлас $\mathfrak{A}$ *перемешивающим*, если существуют такие набор карт $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ и натуральное n_0, что при всех $n\ge n_0$ и $z\in M$

а) для любых карт $\chi\in\mathfrak{A}$ и $\chi'\in\mathfrak{B}$ пересечение $S^n_z\bigl(\chi(\mathbb{B}^u_1\times\mathbb{B}^s_1)\bigr)\cap\chi'(\mathbb{B}^u_1\times\mathbb{B}^s_1)$ непусто;

б) выполняется включение $S^n_z(W_{\mathfrak{A}})\subset\bigcup_{\chi\in\mathfrak{B}}\chi(\mathbb{B}^u_1\times\mathbb{B}^s_1)$.

В [1] показано, что при фиксированном $z_0\in M$ отображение $S_{z_0}(w)=S(w,z_0,0)$ имеет гиперболический перемешивающий аттрактор в том и только том случае, когда для него существует гиперболический перемешивающий атлас. Если немного увеличить числа a, b, то тот же атлас будет гиперболическим и перемешивающим для отображений S_z при всех z, близких к z_0. Мы же предположим еще больше: что у системы (1) есть равномерно гиперболический перемешивающий атлас $\mathfrak{A}$, обслуживающий все $z\in M$. Зафиксируем этот атлас раз и навсегда. Тогда при каждом $z\in M$ отображение S_z имеет гиперболический аттрактор $H_z=\bigcap_n S^n_z(W_{\mathfrak{A}})$.

Пусть числа d, η и параметр ε удовлетворяют условиям

$$\sup\left\|\frac{\partial(X,Y,Z,Z')}{\partial(x,y,z,\varepsilon)}\right\|<d,\qquad \eta=\frac{b}{d},\qquad |\varepsilon|<\theta\eta^2. \tag{6}$$

В (6) верхняя грань берется по всем картам $\chi,\chi'\in\mathfrak{A}$ и допустимым значениям переменных x, y, z, ε.

Определение 1.3. *Косым листом* (или просто листом) будем называть любое гладкое подмногообразие $\Gamma \subset W_{\mathfrak{A}} \times M$ размерности u, которое изображается в некоторой карте $\chi \in \mathfrak{A}$ в виде графика $\{(x, y(x), z(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{B}_5^u \times \mathbb{B}_5^s \times M$ пары функций $y(x), z(x)$ класса $C^N(U)$, которые удовлетворяют неравенствам $\|dy(x)/dx\| \le \theta$ и $\|dz(x)/dx\| \le \theta\eta$. Тройку $(y = y(x), z = z(x), \chi)$ будем отождествлять с листом Γ и писать $\Gamma \sim (y(x), z(x), \chi)$. Скажем, что лист *прямой*, если он целиком лежит в одном слое $z = \mathrm{const}$.

Можно доказать, что отображение Σ_ε растягивает косые листы в x-направлении, сохраняя ограничения на производные от $y(x)$ и $z(x)$. Сформулируем соответствующие утверждения.

Утверждение 1.1. *Если $V = (V_x, V_y, V_z)$ — вектор из (x, y, z)-пространства, а вектор $V' = (V'_x, V'_y, V'_z)$ — его образ под действием отображения* (2), *то при условиях* (5), (6) *из неравенств $\|V_y\| \le \theta\|V_x\|$ и $\|V_z\| \le \theta\eta\|V_x\|$ вытекают*

$$\|V'_y\| \le \theta\|V'_x\|, \qquad \|V'_z\| \le \theta\eta\|V'_x\|, \qquad \|V'_x\| \ge (a+b)^{-1}\|V_x\|.$$

Доказательство. В силу (5), (6)

$$\frac{\|V'_y\|}{\|V'_x\|} \le \frac{b\|V_x\| + a\|V_y\| + d\|V_z\|}{a^{-1}\|V_x\| - b\|V_y\| - d\|V_z\|} \le \frac{b + a\theta + d\theta\eta}{a^{-1} - b\theta - d\theta\eta} \le \frac{\theta(a + \theta^{-1}b + b)}{a^{-1} - 2\theta b} < \theta,$$

$$\frac{\|V'_z\|}{\|V'_x\|} \le \frac{\varepsilon d\|V_x\| + \varepsilon d\|V_y\| + (1+\varepsilon d)\|V_z\|}{a^{-1}\|V_x\| - b\|V_y\| - d\|V_z\|} \le \frac{\varepsilon d(1+\theta) + (1+\varepsilon d)\theta\eta}{a^{-1} - 2\theta b} < \theta\eta,$$

$$\frac{\|V'_x\|}{\|V_x\|} \ge \frac{a^{-1}\|V_x\| - b\|V_y\| - d\|V_z\|}{\|V_x\|} \ge a^{-1} - 2\theta b > (a+b)^{-1}.$$

Обозначим через $B(x, r)$ открытый шар с центром x и радиусом r.

Утверждение 1.2. *Пусть задан лист $\Gamma \sim (y(x), z(x), \chi)$, причем x изменяется в области $U = B(x_0, r)$, а точка $\Sigma_\varepsilon^n(\chi(x_0, y(x_0)), z(x_0))$ имеет в некоторой карте $\chi' \in \mathfrak{A}$ изображение $(x'_0, y'_0, z'_0) \in \mathbb{B}_4^u \times \mathbb{B}_4^s \times M$. Тогда однозначно определяется лист $\Gamma' \sim (y'(x'), z'(x'), \chi')$, являющийся подмножеством $\Sigma_\varepsilon^n(\Gamma)$, для которого $y'(x'_0) = y'_0$ и $z'(x'_0) = z'_0$, а x' изменяется в области $U' = B(x'_0, r/(a+b)^n) \cap \mathbb{B}_5^u$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 1$. По предыдущему утверждению отображение $x'(x) = X(x, y(x), z(x), \varepsilon)$ локально диффеоморфно и растягивает все расстояния по крайней мере в $(a+b)^{-1}$ раз. Для любой точки $x' \in U'$ рассмотрим путь $x'_t = x'_0 + t(x' - x'_0)$, $t \in [0, 1]$. При малых t для него однозначно восстанавливается прообраз относительно отображения $x'(x)$ — гладкий путь x_t, выходящий из x_0. Очевидно, $\|x_t - x_0\| \le (a+b)t\|x' - x'_0\|$. Поэтому x_t восстанавливается для всех $t \in [0, 1]$. Определим функции $y'(x')$ и $z'(x')$ формулами

$$y'(x') = Y(x_1, y(x_1), z(x_1), \varepsilon), \qquad z'(x') = Z(x_1, y(x_1), z(x_1), \varepsilon).$$

В силу предыдущего утверждения $\|dy'(x')/dx'\| \le \theta$ и $\|dz'(x')/dx'\| \le \theta\eta$. При $n = 1$ утверждение доказано. При других n доказательство аналогично.

Наряду с отдельными листами мы будем рассматривать их деформации $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi)$, зависящие от конечномерного параметра $t = (t_1, \dots, t_n)$ произвольной размерности n. Обозначим через i произвольное целое неотрицательное число; через $j = (j_1, \dots, j_n)$ целочисленный мультииндекс; через $v = (v_1, \dots, v_n)$ вектор размерности n с неотрицательными компонентами; через σ число из отрезка $[0, \eta]$. Сопоставим каждой паре неотрицательных целых чисел (i, k) какое-нибудь положительное число α_{ik}. Ниже будем использовать сокращенную запись $v^j = v_1^{j_1} \dots v_n^{j_n}$.

Определение 1.4. Будем говорить, что вектор v *мажорирует* деформацию функции $y_t(x)$ (обозначение $y_t \prec v$), если при всех x, t

$$\left\| \frac{\partial^{i+|j|} y_t(x)}{\partial x^i \partial t^j} \right\| \le \alpha_{i|j|} v^j, \qquad 1 \le i + |j| \le N. \tag{7}$$

Скажем, что пара (v, σ) *мажорирует* деформацию пары функций $(y_t(x), z_t(x))$ (обозначение $(y_t, z_t) \prec (v, \sigma)$), если при всех x, t наряду с (7) выполняются неравенства

$$\left\| \frac{\partial^{i+|j|} z_t(x)}{\partial x^i \partial t^j} \right\| \le \alpha_{i|j|} \sigma v^j, \qquad i > 0, \quad i + |j| \le N; \tag{8}$$

$$\left\| \frac{\partial^{|j|} z_t(x)}{\partial t^j} \right\| \le \alpha_{0|j|} \eta v^j, \qquad 1 \le |j| \le N. \tag{9}$$

Рассмотрим произвольное отображение вида (2). Предположим, что все частные производные вплоть до порядка N от функций X, Y, Z, Z' ограничены и что выполняются оценки (5), (6), причем $a + \theta^{-1} b < 1$ и $\theta < 1/10$. Возьмем какую-нибудь деформацию пары функций (y_t, z_t) и построим по ней новую деформацию $(y'_{t\varepsilon}, z'_{t\varepsilon})$ таким образом, чтобы при каждых t, ε график $\{(x', y'_{t\varepsilon}(x'), z'_{t\varepsilon}(x'))\}$ получался из графика $\{(x, y_t(x), z_t(x))\}$ под действием отображения (2).

Теорема 1.3. *В условиях* (5), (6) *существуют такой набор констант* $\alpha_{ik} \ge \theta$, *не зависящий от* ε (*причем* $\alpha_{10} = \theta$), *и такое большое число* C, *что*

а) *если* $\varepsilon = 0$, $z_t(x) = \mathrm{const}$ *и* $y_t \prec v$, *то* $y'_{t0} \prec (1-b)^{1/N} v$;

б) *если* $\sigma \in [0, \eta]$ *и* $(y_t, z_t) \prec (v, \sigma)$, *то* $(y'_{t\varepsilon}, z'_{t\varepsilon}) \prec (v', \sigma')$, *где* $v' = v + C(\sigma + \varepsilon) v$ *и* $\sigma' = (1-b)(\sigma + C\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 1.3 будет изложено в следующем разделе. С этого момента договоримся, что константы α_{ik} выбраны раз и навсегда. Если $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi)$ и $(y_t, z_t) \prec (v, \sigma)$, то будем писать просто $\Gamma_t \prec (v, \sigma)$. Если же $z_t(x) = \mathrm{const}$ и $y_t \prec v$, то будем писать $\Gamma_t \prec v$. Конечно, теорему 1.3 можно непосредственно применять к любой деформации листа Γ_t. Договоримся писать $\Gamma' \subset \Sigma^n_\varepsilon(\Gamma)$ только в том случае, когда существует такая открытая область $G \subset \Gamma$, которую Σ^n_ε гомеоморфно отображает на Γ'. Многократно применяя утверждение б) теоремы 1.3 к деформации листа Γ_t, получаем

Следствие 1.3.1. *Если* $\Gamma'_t \subset \Sigma^n_0(\Gamma_t)$ *и* $\Gamma_t \prec (v, \sigma)$, *то* $\Gamma'_t \prec (e^{c\sigma} v,\, (1-b)^n \sigma)$, *где* $c = C/b$.

Зафиксируем какое-нибудь число $\sigma_0 \in (0, \eta]$.

Определение 1.5. Косой лист $\Gamma \sim (y(x), z(x), \chi)$ назовем *плавным*, если выполняются условия

$$\left\| \frac{d^i y(x)}{dx^i} \right\| \le \alpha_{i0}, \qquad \left\| \frac{d^i z(x)}{dx^i} \right\| \le \alpha_{i0} \sigma_0, \qquad i = 1, \dots, N. \tag{10}$$

Поскольку $\alpha_{10} = \theta$, эти условия включают в себя ограничения на производные $\|dy/dx\| \le \theta$ и $\|dz/dx\| \le \theta\eta$, которым по определению удовлетворяет каждый лист.

Следствие 1.3.2. *При малых* ε *плавность листа* Γ *влечет плавность любого листа* $\Gamma' \subset \Sigma_\varepsilon(\Gamma)$.

Доказательство. Отождествим Γ и Γ' с тривиальными деформациями, вовсе не зависящими от t. Тогда плавность листа Γ равносильна тому, что $\Gamma \prec (0, \sigma_0)$. В силу утверждения б) теоремы 1.3 будет $\Gamma' \prec (0, \sigma')$, где $\sigma' = (1-b)(\sigma_0 + C\varepsilon) < \sigma_0$, откуда следует плавность Γ'.

Следствие 1.3.3. *Если* $\Gamma' \subset \Sigma_\varepsilon(\Gamma)$ *и* $\Gamma \prec (0, C\varepsilon/b)$, *то и* $\Gamma' \prec (0, C\varepsilon/b)$.

Это следствие вытекает из утверждения б) теоремы 1.3, если положить $v = 0$ и $\sigma = C\varepsilon/b$.

С этого момента договоримся называть термином “лист” *только плавные листы.*

Теорема 1.4. *Существуют такие большие константы* C_n, *что если* $\Gamma_t \prec (v, \eta)$ *и* $\Gamma'_{t\varepsilon} \subset \subset \Sigma^n_\varepsilon(\Gamma_t)$, *где* $\Gamma'_{t\varepsilon} \sim (y'_{t\varepsilon}(x'), z'_{t\varepsilon}(x'), \chi')$, *то*

$$\left\| \frac{\partial^{i+|j|+l} y'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i \partial t^j \partial \varepsilon^l} \right\| \le C_n v^j, \qquad \left\| \frac{\partial^{i+|j|+l} z'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i \partial t^j \partial \varepsilon^l} \right\| \le C_n v^j, \qquad 1 \le i + |j| + l \le N. \tag{11}$$

Эта теорема тоже будет доказана в следующем разделе.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ ОБ ОБРАЗАХ ЛИСТОВ

Очевидно, функции $y'_{t\varepsilon}$ и $z'_{t\varepsilon}$ из теоремы 1.3 задаются параметрическими уравнениями

$$x' = X(x, y_t(x), z_t(x), \varepsilon), \tag{12}$$

$$y'_{t\varepsilon}(x') = Y(x, y_t(x), z_t(x), \varepsilon), \tag{13}$$

$$z'_{t\varepsilon}(x') = Z(x, y_t(x), z_t(x), \varepsilon) = z_t(x) + \varepsilon Z'(x, y_t(x), z_t(x), \varepsilon). \tag{14}$$

Из утверждения 1.1 следует, что производная $\partial x'/\partial x$ растягивает векторы из $\mathbb{R}^u$ по крайней мере в $(a+b)^{-1}$ раз. Поэтому уравнение (12) определяет неявную функцию $x = x(x', t, \varepsilon)$, причем

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial x'} \right\| \le a + b. \tag{15}$$

Ниже всегда будем считать, что

$$X = X(x, y, z, \varepsilon), \qquad Y = Y(x, y, z, \varepsilon), \qquad Z = z + \varepsilon Z'(x, y, z, \varepsilon),$$
$$y = y_t(x), \qquad z = z_t(x), \qquad x = x(x', t, \varepsilon),$$

но для краткости не будем явно выписывать аргументы этих функций. Еще введем обозначения

$$\frac{dX}{dx} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon \frac{dZ'}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\left(\frac{\partial Z'}{\partial x} + \frac{\partial Z'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial Z'}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Исходя из (12)–(14) вычислим частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \left(\frac{dX}{dx}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial X(x,y,z,\varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial X(x,y,z,\varepsilon)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial X(x,y,z,\varepsilon)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-1}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\left(\frac{dX}{dx}\right)^{-1} \left(\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \right) = -\frac{\partial x}{\partial x'} \left(\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \right), \tag{17}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = -\left(\frac{dX}{dx}\right)^{-1} \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial y'_{t\varepsilon}(x')}{\partial x'} = \frac{dY}{dx}\frac{\partial x}{\partial x'} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \right)^{-1}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial y'_{t\varepsilon}(x')}{\partial t} = \frac{dY}{dx}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{dY}{dx}\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{dY}{dx}\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial t}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial z'_{t\varepsilon}(x')}{\partial x'} = \frac{dZ}{dx}\frac{\partial x}{\partial x'} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\frac{dZ'}{dx}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial z'_{t\varepsilon}(x')}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{dZ}{dx}\frac{\partial x}{\partial t} =$$

$$= \left(\mathrm{I} + \varepsilon\frac{\partial Z'}{\partial z} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\frac{dZ'}{dx}\right)\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial t} + \left(\varepsilon\frac{\partial Z'}{\partial y} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\frac{dZ'}{dx}\right)\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{22}$$

Равенство (16) определяет $\partial x/\partial x'$ как функцию от шести переменных x, y, z, ε, $\partial y/\partial x$, $\partial z/\partial x$. При условиях $\|\partial y/\partial x\| \le \theta$ и $\|\partial z/\partial x\| \le \theta\eta$ эта функция $N-1$ раз непрерывно дифференцируема по совокупности указанных переменных, причем все ее частные производные ограничены. То же самое можно сказать о производных, стоящих в левых частях равенств (17)–(22).

Скажем, что индексная пара (i,j), где $j=(j_1,\dots,j_n)$, *младшая* по отношению к паре (i',j'), если выполняются условия $i+|j| \le i'+|j'|$, $|j| \le |j'|$ и $(i,|j|) \ne (i',|j'|)$. Этот частичный порядок определяет также старшинство среди частных производных вида $\partial^{i+|j|}y/\partial x^i\partial t^j$ и $\partial^{i+|j|}z/\partial x^i\partial t^j$.

Лемма 2.1. *Если $i \ge 2$ или $|j| \ge 1$, то для любого вектора $V' \in \mathbb{R}^u$*

$$\frac{\partial^{i+|j|}y'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i\partial t^j}(V')^i = \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{dY}{dx}\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial^{i+|j|}y_t(x)}{\partial x^i\partial t^j}\left(\frac{\partial x}{\partial x'}V'\right)^i +$$

$$+ \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{dY}{dx}\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial^{i+|j|}z_t(x)}{\partial x^i\partial t^j}\left(\frac{\partial x}{\partial x'}V'\right)^i + P_{ij},$$

$$\frac{\partial^{i+|j|}z'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i\partial t^j}(V')^i = \left(\mathrm{I} + \varepsilon\frac{\partial Z'}{\partial z} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\frac{dZ'}{dx}\right)\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial^{i+|j|}z_t(x)}{\partial x^i\partial t^j}\left(\frac{\partial x}{\partial x'}V'\right)^i +$$

$$+ \left(\varepsilon\frac{\partial Z'}{\partial y} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\frac{dZ'}{dx}\right)\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial^{i+|j|}y_t(x)}{\partial x^i\partial t^j}\left(\frac{\partial x}{\partial x'}V'\right)^i + Q_{ij}.$$

Каждая координата вектора P_{ij} — это конечная сумма произведений вида $p_1p_2p_3$, а каждая координата вектора Q_{ij} — конечная сумма произведений вида $q_1q_2q_3$, где

а) *p_1 и q_1 — гладкие функции от переменных x, y, z, $\partial y/\partial x$, $\partial z/\partial x$, ε, у которых все частные производные ограничены;*

б) *p_2 и q_2 — произведения некоторых координат вектора V', состоящие из i сомножителей;*

в) *p_3 и q_3 — конечные произведения некоторых частных производных от y и z, младших по отношению к (i,j), причем для каждого из этих произведений сумма всех встречающихся в нем мультииндексов, отвечающих дифференцированиям по t, равна j;*

г) *каждое произведение $q_1q_2q_3$ содержит множитель, который либо совпадает с ε, либо является компонентой некоторой производной вида $\partial^{i'+|j'|}z/\partial x^{i'}\partial t^{j'}$, у которой $i' > 0$.*

Доказательство. При $i=0$ и $|j|=1$ это сразу вытекает из равенств (20), (22), если взять P_{ij} и Q_{ij} нулевыми. При $i=2$ и $j=0$ равенства леммы получаются непосредственным дифференцированием (19), (21). Для остальных пар индексов утверждение получается по индукции в порядке возрастания их старшинства. Нужно просто последовательно дифференцировать равенства леммы и на каждом шаге представлять очередные производные от $y'_{t\varepsilon}(x')$ и $z'_{t\varepsilon}(x')$ в виде функций от x, y, z, $\partial y/\partial x$, $\partial z/\partial x$, ε, V' и младших производных от y и z, используя подстановки (16), (17). Подробности предоставляем читателю.

Вернемся к доказательству теоремы 1.3. Допустим, выполняются неравенства $\|\partial y/\partial x\| \le \theta$ и $\|\partial z/\partial x\| \le \theta\sigma$ при некотором $\sigma \le \eta$. Тогда по утверждению 1.1 будет $\|\partial y'_{t\varepsilon}/\partial x'\| \le \theta$, а в силу (15), (21)

$$\left\|\frac{\partial z'_{t\varepsilon}}{\partial x'}\right\| \le (\theta\sigma + \varepsilon d)(a+b) \le \theta\Bigl(\sigma + \frac{\varepsilon d}{\theta}\Bigr)(1-b) = \theta\sigma',$$

где $\sigma' = (1-b)(\sigma + \varepsilon d/\theta)$. Поэтому можно взять $\alpha_{10} = \theta$ в (7), (8).

Остальные α_{ik} находятся по индукции в порядке возрастания старшинства индексов. Произведем шаг индукции. Фиксируем пару (I,J). Предположим, что для всех пар индексов (i,j), младших по отношению к (I,J), уже определен некоторый набор констант $\alpha_{i|j|}$. Покажем, как в этом случае определить $\alpha_{I|J|}$. Пусть выполнены неравенства (7)–(9). Оценим две производные $\partial^{I+|J|}y'_{t\varepsilon}(x')/(\partial x')^I\partial t^J$ и $\partial^{I+|J|}z'_{t\varepsilon}(x')/(\partial x')^I\partial t^J$ с помощью леммы 2.1. В силу леммы 2.1 найдется такая большая константа C' (зависящая от уже выбранных $\alpha_{i|j|}$, но не от $\alpha_{I|J|}$), что для векторов P_{IJ} и Q_{IJ} из этой леммы выполняются оценки

$$\|P_{IJ}\| \le C'\|V'\|^I v^J, \qquad \|Q_{IJ}\| \le C'\|V'\|^I(\sigma+\varepsilon)v^J. \tag{23}$$

В силу (19)

$$\left\|\frac{dY}{dx}\frac{\partial x}{\partial x'}\right\| = \left\|\frac{\partial y'_{t\varepsilon}}{\partial x'}\right\| \le \theta. \tag{24}$$

Подставляя в равенства леммы 2.1 неравенства (5)–(9), (15), (23), (24), получаем оценки

$$\left\|\frac{\partial^{I+|J|}y'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^I\partial t^J}\right\| \le (a+\theta b)\alpha_{I|J|}v^J(a+b)^I + 2d\alpha_{I|J|}\eta v^J(a+b)^I + C'v^J \le$$
$$\le (a+3b)\alpha_{I|J|}v^J + C'v^J \le \alpha_{I|J|}(a+3b+C'/\alpha_{I|J|})v^J,$$

при $J \ne 0$

$$\left\|\frac{\partial^{|J|}z'_{t\varepsilon}(x')}{\partial t^J}\right\| \le (1+\theta\sigma d + 2\varepsilon d^2)\alpha_{0|J|}\eta v^J + (\theta\sigma b + 2\varepsilon d)\alpha_{0|J|}v^J + C'(\sigma+\varepsilon)v^J \le$$
$$\le \alpha_{0|J|}\eta\Bigl(1+\theta\sigma d + 2\varepsilon d^2 + \theta\sigma b/\eta + 2\varepsilon d/\eta + C'(\sigma+\varepsilon)/(\alpha_{0|J|}\eta)\Bigr)v^J,$$

при $I > 0$

$$\left\|\frac{\partial^{I+|J|}z'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^I\partial t^J}\right\| \le (1+\theta\sigma d+2\varepsilon d^2)\alpha_{I|J|}\sigma v^J(a+b)^I + (\theta\sigma b + 2\varepsilon d)\alpha_{I|J|}v^J(a+b)^I + C'(\sigma+\varepsilon)v^J \le$$
$$\le \alpha_{I|J|}\Bigl[(1+\theta\sigma d+\theta b)(a+b)\sigma + 2\varepsilon d^2\sigma + 2\varepsilon d + C'(\sigma+\varepsilon)/\alpha_{I|J|}\Bigr]v^J \le$$
$$\le \alpha_{I|J|}\Bigl[(1-2b+C'/\alpha_{I|J|})\sigma + (4d + C'/\alpha_{I|J|})\varepsilon\Bigr]v^J.$$

Если числа $\alpha_{I|J|}$ и C велики по сравнению с C', то из этих неравенств вытекают оценки

$$\left\| \frac{\partial^{I+|J|} y'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^I \partial t^J} \right\| \le \alpha_{I|J|}(1-b)v^J,$$

$$\left\| \frac{\partial^{I+|J|} z'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^I \partial t^J} \right\| \le \alpha_{I|J|}(1-b)(\sigma + C\varepsilon)v^J \qquad \text{при} \quad I > 0,$$

$$\left\| \frac{\partial^{|J|} z'_{t\varepsilon}(x')}{\partial t^J} \right\| \le \alpha_{0|J|}\eta(1 + C(\sigma+\varepsilon))v^J \qquad \text{при} \quad J \ne 0.$$

А из них уже вытекает теорема 1.3.

Предположим, что деформации функций $y_t(x)$ и $z_t(x)$ в (12)–(14) зависят не только от параметра t, но еще и от ε. Обозначим их $y_{t\varepsilon}(x)$ и $z_{t\varepsilon}(x)$ соответственно.

Лемма 2.2. *В условиях* (12)–(14) *и при* $1 \le i + |j| + l \le N$

$$\frac{\partial^{i+|j|+l} y'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i \partial t^j \partial \varepsilon^l}(V')^i = P_{ijl}, \qquad \frac{\partial^{i+|j|+l} z'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i \partial t^j \partial \varepsilon^l}(V')^i = Q_{ijl},$$

причем каждая координата вектора P_{ijl} — это конечная сумма произведений вида $p_1p_2p_3$, а каждая координата вектора Q_{ijl} — конечная сумма произведений вида $q_1q_2q_3$, где

а) *p_1 и q_1 — гладкие функции от переменных x, y, z, $\partial y/\partial x$, $\partial z/\partial x$, ε, у которых все частные производные ограничены*;

б) *p_2 и q_2 — произведения координат вектора V', состоящие каждое из i сомножителей*;

в) *p_3 и q_3 — конечные произведения некоторых частных производных от $y_{t\varepsilon}(x)$ и $z_{t\varepsilon}(x)$ по x, t, ε порядка не выше $i+|j|+l$, причем для каждого из этих произведений сумма всех встречающихся в нем мультииндексов, отвечающих дифференцированиям по t, равна j.*

Доказательство. При $i \ge 2$ или $|j| \ge 1$ это утверждение получается простым дифференцированием по ε равенств из леммы 2.1, при $j = 0$ и $i = 1$ дифференцированием равенств (19), (21), а при $j = 0$ и $i = 0$ дифференцированием равенств (13), (14). При каждом дифференцировании нужно использовать подстановку (18).

Доказательство теоремы 1.4 проводится при помощи леммы 2.2 индукцией по n. Просто на каждом шаге индукции нужно подставлять в равенства леммы 2.2 оценки (11), полученные на предыдущем шаге. А при $n = 1$ в качестве таких оценок следует взять (7)–(9).

3. СЛЕДЫ И СЛОИСТЫЕ ФУНКЦИИ

Мы рассматриваем динамическую систему (1), для которой фиксирован равномерно гиперболический перемешивающий атлас $\mathfrak{A}$, определены понятие плавного косого листа, а также понятие мажорируемости для деформаций листов.

Определение 3.1. *Косым следом* (или просто следом) будем называть пару (Γ, Φ), состоящую из плавного косого листа Γ и гладкой вещественнозначной функции Φ на нем, называемой *плотностью*. Скажем, что след *прямой*, если соответствующий лист Γ прямой. След (Γ', Φ') назовем *сужением* следа (Γ, Φ), если $\Gamma' \subset \Gamma$, а плотность Φ' на Γ' совпадает с Φ. *Образом* следа (Γ, Φ) будем называть такой след $(\Gamma', \Phi') = \Sigma_\varepsilon(\Gamma, \Phi)$, что $\Gamma' = \Sigma_\varepsilon(\Gamma)$ и $\Phi = \Phi' \circ \Sigma_\varepsilon$.

Определение 3.2. *Весовой функцией* (весом) будем называть любую гладкую функцию J, определенную на многообразии касательных к $W_{\mathfrak{A}} \times M$ подпространств размерности u.

При записи в гиперболических картах вес J является функцией от переменных x, y, z, $p = dy/dx$ и $q = dz/dx$. Сразу отметим, что нас будет интересовать его поведение лишь в области, где выполнены неравенства $\|p\| \le \theta$ и $\|q\| \le \theta\eta$.

Каноническая весовая функция — это величина, обратная коэффициенту растяжения u-мерных объемов при отображении Σ_ε. Очевидно, она зависит от ε, и поэтому правильнее говорить о целом семействе весовых функций J_ε.

Для веса J_ε и косого листа Γ естественно определяется сужение J_ε на Γ, которое мы будем обозначать той же буквой. Отображение $\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon$ множества косых следов в себя задается формулой $\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon(\Gamma, \Phi) = \Sigma_\varepsilon(\Gamma, J_\varepsilon \Phi)$. Если вес J_ε канонический, а Φ — плотность некоторой меры по отношению к риманову объему на Γ, то тогда плотность следа $\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon(\Gamma, \Phi)$ автоматически является плотностью соответствующей меры на $\Sigma_\varepsilon(\Gamma)$, индуцированной отображением Σ_ε.

Лист $\Gamma \sim (y(x), z(x), \chi)$ назовем *стандартным,* если областью определения функций $y(x)$ и $z(x)$ служит открытый единичный шар $B(x_0, 1) \subset \mathbb{B}_5^u$. Для стандартных листов будем использовать обозначение $\Gamma \sim (y(x), z(x), \chi, x_0)$; при этом подразумевается, что $x \in B(x_0, 1)$. Точку $\alpha = (\chi(x_0, y(x_0)), z(x_0))$ назовем *центром* стандартного листа. Если будет нужно подчеркнуть, что стандартный лист Γ имеет центр α, то будем использовать для него обозначение $\Gamma(\alpha)$. Скажем, что след (Γ, Φ) стандартен, если соответствующий лист Γ стандартен. Для всякого стандартного следа (Γ, Φ) можно считать, что при записи в карте областью определения плотности $\Phi = \Phi(x)$ служит все тот же шар $B(x_0, 1)$. Скажем, что два стандартных следа (Γ_1, Φ_1) и (Γ_2, Φ_2) *эквивалентны*, если их центры совпадают, пересечение $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ открыто в Γ_1 и Γ_2 и на этом пересечении плотности Φ_1 и Φ_2 совпадают. *Стандартная деформация* листа — это такая деформация $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi, x_0)$, что все функции $y_t(x)$ и $z_t(x)$ имеют одну и ту же область определения $B(x_0, 1) \subset \mathbb{B}_5^u$. Деформация следа (Γ_t, Φ_t) стандартна, если соответствующая деформация листа Γ_t стандартна.

Деформацию стандартных следов (Γ_t, Φ_t) назовем *скользящей*, если все эти следы являются сужениями одного и того же следа (Γ, Φ). При скользящей деформации лист Γ_t и его центр сдвигаются вдоль Γ.

Определение 3.3. Назовем *слоистой функцией* (на косых следах) типа (p, q), где $p \ge 1$, $q \ge 4$ и $p + q \le N - 1$, любую вещественнозначную функцию $g(\Gamma, \Phi)$, определенную на множестве стандартных косых следов (с плавными листами) и обладающую следующими свойствами:

а) она линейно зависит от Φ;

б) ее значения на эквивалентных следах совпадают;

в) найдется такое число $c \ge 0$, что для любой стандартной деформации плавных прямых листов $\Gamma_{tz} \sim (y_t(x), z, \chi, x_0)$ и плотности $\Phi = \Phi(x)$ из мажорируемости $y_t \prec v$ вытекают оценки
$$\left| \frac{\partial^{|j|+|k|} g(\Gamma_{tz}, \Phi)}{\partial t^j \partial z^k} \right| \le c v^j \|\Phi\|_{p+|j|+|k|}, \qquad |j| + |k| \le q, \quad |k| \le q - 2; \tag{25}$$

г) существует такое $c \ge 0$, что если стандартная деформация плавных косых листов $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi, x_0)$ мажорируется парой (v, σ), где $\sigma \in [0, \sigma_0]$, а семейство прямых листов $\overline{\Gamma}_t$ имеет вид $\overline{\Gamma}_t \sim (y_t(x), z_t(x_0), \chi, x_0)$, то для любой плотности $\Phi = \Phi(x)$ выполняются оценки
$$\left| \frac{\partial^{|j|} g(\Gamma_t, \Phi)}{\partial t^j} - \frac{\partial^{|j|} g(\overline{\Gamma}_t, \Phi)}{\partial t^j} \right| \le c \sigma v^j \|\Phi\|_{p+1+|j|}, \qquad |j| \le q - 4; \tag{26}$$

д) все указанные в (25), (26) производные непрерывны по t, z и непрерывно меняются при скользящих деформациях следов.

Точное значение малого положительного числа $\sigma_0 \in (0,\eta]$, участвующего в определении плавных листов, будет выбрано ниже в теоремах 3.2 и 3.3. Минимально возможное c, при котором выполняются неравенства (25), (26), обозначим $\|g\|_{pq}$. Очевидно, $\|g\|_{pq}$ является нормой. Множество всех слоистых функций типа (p,q) вместе с этой нормой образует банахово пространство, которое мы обозначим $\mathcal{F}^{pq}$. Из (25), (26) следует, что если $p' \geq p$ и $q' \leq q$, то $\mathcal{F}^{pq} \subset \mathcal{F}^{p'q'}$, причем $\|g\|_{pq} \geq \|g\|_{p'q'}$. Слоистые функции можно умножать на обычные функции по следующему правилу: если $f \in C^\infty(W \times M)$, то $fg(\Gamma,\Phi) = g(\Gamma, f\Phi)$. Формально слоистая функция $g \in \mathcal{F}^{pq}$ определена на множестве стандартных следов с бесконечно дифференцируемыми плотностями. Однако по непрерывности она продолжается на следы с плотностями гладкости $p+q$.

Рассмотрим простейшие примеры слоистых функций. Для всякого стандартного следа $(\Gamma(\alpha),\Phi)$ с центром α положим $g_0(\Gamma(\alpha),\Phi) = \Phi(\alpha)$. Пусть $\xi_0(t)$ — бесконечно гладкая функция на вещественной оси, у которой носитель сосредоточен в достаточно малой окрестности нуля. Положим

$$g_1(\Gamma(\alpha),\Phi) = \int\limits_\Gamma \xi_0\big(\rho(\alpha,\beta)\big)\Phi(\beta)\,d\mu(\beta),$$

где $\rho(\alpha,\beta)$ — расстояние между α и точкой $\beta \in \Gamma$, а μ — риманов объем на Γ. Нетрудно видеть, что g_0 и g_1 будут слоистыми функциями типа $(0, N-1)$.

Теорема 3.1. *Пространство $\mathcal{F}^{pq}$ является банаховым модулем над алгеброй весовых функций гладкости $p+q$, над $C^{p+q}(W \times M)$ и над $C^{p+q-3}(M)$.*

Эта теорема будет доказана в следующем разделе.

Не ограничивая общности, можно считать, что риманова метрика на W соизмерима с евклидовой метрикой в гиперболических картах. Это означает, что длина касательного вектора к W и длина его изображения в карте могут отличаться не более чем в конечное число раз, не зависящее от вектора и карты.

Выберем такое малое положительное число r_0, что для любого стандартного листа $\Gamma \sim \sim (y(x), z(x), \chi, x_0)$ его сужение $\Gamma^* \sim (y(x), z(x), \chi)$, где $x \in B(x_0, 1-a-b)$, содержит пересечение Γ с $2r_0$-окрестностью его центра $\alpha = (\chi(x_0, y(x_0)), z(x_0))$. Фиксируем бесконечно гладкую неотрицательную функцию $\xi_0(t)$ на вещественной оси, которая обращается в единицу при $|t| \leq r_0$ и в нуль при $|t| \geq 2r_0$. На каждом листе Γ, лежащем в римановом многообразии $W \times M$, индуцируется риманов объем μ. Определим на Γ функцию двух переменных

$$\xi_\Gamma(\alpha,\beta) = \frac{\xi_0(\rho(\alpha,\beta))}{\int_\Gamma \xi_0(\rho(\alpha,\beta))\,d\mu(\alpha)},$$

где $\rho(\alpha,\beta)$ — расстояние между α и β. Она обращается в нуль, если $\rho(\alpha,\beta) \geq 2r_0$, строго положительна, если $\rho(\alpha,\beta) \leq r_0$, и

$$\int\limits_\Gamma \xi_\Gamma(\alpha,\beta)\,d\mu(\alpha) \equiv 1. \tag{27}$$

Чтобы не иметь дела с краем Γ, удобно считать, что эта функция определена на $2r_0$-внутренности Γ (т.е. на множестве пар точек из Γ, лежащих на расстоянии больше $2r_0$ от края Γ).

Зафиксируем семейство весовых функций J_ε. Пусть (Γ,Φ) — произвольный стандартный след с центром α, а $(\Gamma'_\varepsilon, \Phi'_\varepsilon) = (\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon)^n(\Gamma,\Phi)$. В силу утверждения 1.2 для любой точки $\beta \in \Gamma$ из $2r_0$-окрестности α существует стандартный след $(\Gamma'_\varepsilon(\beta'), \Phi'_\varepsilon) \subset (\Gamma'_\varepsilon, \Phi'_\varepsilon)$ с центром $\beta' = \Sigma^n_\varepsilon(\beta)$.

Определение 3.4. Определим оператор *усредненного взвешенного сдвига* $A_{\varepsilon,n}$ на пространстве слоистых функций $\mathcal{F}^{pq}$ формулой

$$(A_{\varepsilon,n}g)(\Gamma(\alpha),\Phi)=\int\limits_{\Gamma'_\varepsilon}\xi_\Gamma(\alpha,\beta)g(\Gamma'_\varepsilon(\beta'),\Phi'_\varepsilon)\,d\mu(\beta'). \tag{28}$$

Очевидно, для всех $g\in\mathcal{F}^{pq}$ и $f\in C^{p+q}(W\times M)$ выполняется *гомологическое тождество*

$$A_{\varepsilon,n}(fg)=f\circ\Sigma^n_\varepsilon\cdot A_{\varepsilon,n}g. \tag{29}$$

Теорема 3.2. *Для каждого n существуют такие малые положительные числа $\sigma_0\in(0,\eta]$ и $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\sigma_0)$, что при всех $\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ и $l\le q-8$ оператор $d^lA_{\varepsilon,n}/d\varepsilon^l$ непрерывно отображает пространство $\mathcal{F}^{pq}$ в $\mathcal{F}^{p+1+l,q-4-l}$* (и, тем более, в $\mathcal{F}^{p+2l,q-5l}$, если только $l\ne 0$).

Эта теорема будет доказана в разд. 6.

Скажем, что слоистая функция *положительна*, если она принимает неотрицательные значения на следах с неотрицательными плотностями. Назовем положительную слоистую функцию g *сильно положительной*, если существует такое $c>0$, что для любого стандартного листа Γ выполняется неравенство $g(\Gamma,1)\ge c$. Линейный функционал на пространстве слоистых функций назовем положительным, если он принимает неотрицательные значения на положительных функциях.

Предположим теперь, что семейство весовых функций J_ε положительно и отделено снизу от нуля в области $\|dy/dx\|\le\theta$, $\|dz/dx\|\le\theta\eta$ при записи в координатах x, y, z, dy/dx, dz/dx, соответствующих любой гиперболической карте. Тогда оператор $A_{\varepsilon,n}$ переводит положительные слоистые функции в положительные и сильно положительные в сильно положительные. В этих условиях имеет место

Теорема 3.3. *Для каждого достаточно большого $n\in\mathbb{N}$ найдутся малое число $\sigma_0\in(0,\eta]$, функция $\lambda=\lambda_n\in C^{N-4}(M)$, сильно положительная слоистая функция $h=h_n\in\mathcal{F}^{1,N-2}$ и положительный $C^\infty(M)$-линейный функционал $\nu=\nu_n\colon\mathcal{F}^{N-5,4}\to C^2(M)$ такие, что*

а) *функционал ν непрерывно отображает каждое пространство $\mathcal{F}^{pq}$ в пространство $C^{q-2}(M)$;*

б) *оператор $A_{0,n}$ непрерывно отображает каждое пространство $\mathcal{F}^{pq}$ в себя;*

в) *выполняются равенства $A_{0,n}h=e^\lambda h$, $\nu\circ A_{0,n}=e^\lambda\nu$, $\nu(h)\equiv 1$;*

г) *последовательность операторов $[e^{-\lambda}A_{0,n}]^m\colon\mathcal{F}^{pq}\to\mathcal{F}^{pq}$ при $m\to\infty$ сходится в равномерной операторной норме к проектору $\overline{A}_{0,n}g=\nu(g)h$.*

Это основная теорема данной работы. Она будет доказана в разд. 9.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1

Рассмотрим слоистую функцию $g\in\mathcal{F}^{pq}$ и весовую функцию J гладкости $p+q$. Доказательство того, что произведение Jg тоже принадлежит $\mathcal{F}^{pq}$ и непрерывно зависит от сомножителей, проводится при помощи прямой оценки всех производных, участвующих в определении слоистой функции. Здесь нет никаких идей, нужно только аккуратно произвести и записать процедуру вычисления этих производных.

Рассмотрим стандартную деформацию $\Gamma_t\sim(y_t(x),z_t(x),\chi,x_0)$. Построим по ней деформацию прямых листов $\overline{\Gamma}_t\sim(y_t(x),z_t(x_0),\chi,x_0)$. Соединим их гомотопией

$$\Gamma_{t\tau}\sim(y_t(x),\ \tau z_t(x)+(1-\tau)z_t(x_0),\ \chi,x_0),\qquad \tau\in[0,1].$$

Можно считать, что $\Gamma_{t\tau}$ — стандартная деформация косых листов, зависящая от составного параметра (t,τ). Она может мажорироваться парами вида $((v,v_\tau),\sigma)$, где (v,v_τ) — составной вектор, имеющий ту же структуру, что и составной параметр (t,τ). Непосредственно из определения мажорируемости 1.4 вытекает

Лемма 4.1. *Если* $\Gamma_t \prec (v,\sigma)$, *где* $\sigma \in [0,\eta]$, *то* $\Gamma_{t\tau} \prec ((v,B_1\sigma),\eta)$, *где* $B_1 = \max_{i,k}\alpha_{ik}/\theta\eta$.

Лемма 4.2. *Существует такое большое* B_2, *что для любой слоистой функции* $g \in \mathcal{F}^{pq}$ *и стандартной деформации прямых следов* (Γ_t,Φ) *из мажорируемости* $\Gamma_t \prec (v,0)$ *вытекают оценки*

$$\left|\frac{\partial^{|j|}g(\Gamma_t,\Phi)}{\partial t^j}\right| \le B_2\|g\|_{pq}v^j\|\Phi\|_{p+|j|}, \qquad |j| \le q-2.$$

Доказательство. Пусть $\Gamma_t \sim (y_t(x),z_t,\chi,x_0)$. Положим $\Gamma_{tz} \sim (y_t(x),z,\chi,x_0)$. Тогда

$$\frac{\partial^{|j|}g(\Gamma_t,\Phi)}{\partial t^j} = \sum_{k\le j} C_j^k\,\frac{\partial^{|j|}g(\Gamma_{t,z_T},\Phi)}{\partial t^{j-k}\partial T^k}\bigg|_{T=t} \qquad \text{и} \qquad \left\|\frac{\partial^{|k|}z_T}{\partial T^k}\right\| \le \alpha_{0|k|}\eta v^k.$$

Из этих формул и определения $\|g\|_{pq}$ вытекает оценка леммы.

Пусть J — весовая функция. При записи в координатах, соответствующих любой гиперболической карте χ, она представляется как функция от пяти переменных $J = J(x,y,z,dy/dx, dz/dx)$. Обозначим через $\|J\|_q^\chi$ ее C^q-норму по отношению к этим переменным и положим $\|J\|_q = \max_{\chi\in\mathfrak{A}}\|J\|_q^\chi$. Рассмотрим семейство прямых листов $\Gamma_{tz} \sim (y_t(x),z,\chi)$. Сужение веса J на лист Γ_{tz} представляется как некоторая функция $\Psi_{tz}(x) = J(x,y_t(x),z,dy_t(x)/dx,0)$. Дифференцируя $\Psi_{tz}(x)$ как сложную функцию и подставляя оценки (7), получаем следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Существует такая константа* B_3, *что из мажорируемости* $y_t \prec v$ *вытекают оценки*

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|+|k|}\Psi_{tz}(x)}{\partial x^i\partial t^j\partial z^k}\right\| \le B_3v^j\|J\|_{i+|j|+|k|}, \qquad i+|j|+|k| \le N-1.$$

Рассмотрим деформацию косых листов $\Gamma_t \sim (y_t,z_t,\chi)$. Сужение веса J на лист Γ_t представляется как функция

$$\Psi_t(x) = J(x,y_t(x),z_t(x),dy_t(x)/dx,dz_t(x)/dx).$$

Дифференцируя ее и подставляя оценки (7)–(9), получаем следующую лемму.

Лемма 4.4. *Существует такое большое* B_4, *что из мажорируемости* $\Gamma_t \prec (v,\eta)$ *вытекают оценки*

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|}\Psi_t(x)}{\partial x^i\partial t^j}\right\| \le B_4v^j\|J\|_{i+|j|}, \qquad i+|j| \le N-1.$$

Лемма 4.5. *Существует такое большое* B_5, *что для любой стандартной деформации прямых листов* $\Gamma_{tz} \sim (y_t(x),z,\chi,x_0)$ *и семейства плотностей* $\Phi_{tz}(x)$ *из мажорируемости* $y_t \prec v$ *и оценок*

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j'|+|k'|}\Phi_{tz}(x)}{\partial x^i\partial t^{j'}\partial z^{k'}}\right\| \le \beta v^{j'}, \qquad i+|j'|+|k'| \le p+|j|+|k|,$$

выполняющихся при некотором $\beta \ge 0$ *и фиксированных мультииндексах* j *и* k, *вытекают оценки*

$$\left|\frac{\partial^{|j|+|k|}g(\Gamma_{tz},\Phi_{tz})}{\partial t^j\partial z^k}\right| \le B_5\|g\|_{pq}\beta v^j, \qquad |j|+|k| \le q, \quad |k| \le q-2.$$

Доказательство. Дифференцируя по формуле Лейбница, получаем

$$\frac{\partial^{|j|+|k|} g(\Gamma_{tz}, \Phi_{tz})}{\partial t^j \partial z^k} = \sum_{j' \le j} \sum_{k' \le k} C_j^{j'} C_k^{k'} \frac{\partial^{|j-j'|+|k-k'|}}{\partial t^{j-j'} \partial z^{k-k'}} g(\Gamma_{tz}, \Phi_{TZ}^{j'k'}) \Big|_{\substack{T=t \\ Z=z}}, \tag{30}$$

где

$$\Phi_{tz}^{j'k'}(x) = \frac{\partial^{|j'|+|k'|} \Phi_{tz}(x)}{\partial t^{j'} \partial z^{k'}}.$$

Если рассматривать $\Phi_{tz}^{j'k'}$ как функцию от x, то из условия леммы вытекают оценки $\|\Phi_{tz}^{j'k'}\|_{p+|j-j'|+|k-k'|} \le \beta v^{j'}$. Тогда в силу (30) и определения $\|g\|_{pq}$

$$\left| \frac{\partial^{|j|+|k|} g(\Gamma_{tz}, \Phi_{tz})}{\partial t^j \partial z^k} \right| \le \sum_{j' \le j} \sum_{k' \le k} C_j^{j'} C_k^{k'} \|g\|_{pq} v^{j-j'} \beta v^{j'}.$$

Лемма 4.6. *Существует такое большое B_6, что для любой стандартной деформации косых листов $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi, x_0)$, деформации прямых листов $\overline{\Gamma}_t \sim (y_t(x), z_t(x_0), \chi, x_0)$ и семейства плотностей $\Phi_t(x)$ из мажорируемости $\Gamma_t \prec (v, \sigma)$ и оценок*

$$\left\| \frac{\partial^{i+|j'|} \Phi_t(x)}{\partial x^i \partial t^{j'}} \right\| \le \beta v^{j'}, \qquad i + |j'| \le p + 1 + |j|, \tag{31}$$

выполняющихся при некотором $\beta \ge 0$ и фиксированном мультииндексе j, вытекают оценки

$$\left| \frac{\partial^{|j|} g(\Gamma_t, \Phi_t)}{\partial t^j} - \frac{\partial^{|j|} g(\overline{\Gamma}_t, \Phi_t)}{\partial t^j} \right| \le B_6 \|g\|_{pq} \beta \sigma v^j, \qquad |j| \le q - 4. \tag{32}$$

А если оценки (31) *выполняются для всех индексов $i + |j'| \le p + |j|$, то*

$$\left| \frac{\partial^{|j|} g(\overline{\Gamma}_t, \Phi_t)}{\partial t^j} \right| \le B_6 \|g\|_{pq} \beta v^j, \qquad |j| \le q - 2. \tag{33}$$

Следовательно, в условиях (31)

$$\left| \frac{\partial^{|j|} g(\Gamma_t, \Phi_t)}{\partial t^j} \right| \le B_6 (1 + \sigma) \|g\|_{pq} \beta v^j, \qquad |j| \le q - 4. \tag{34}$$

Доказательство. По формуле Лейбница

$$\frac{\partial^{|j|} g(\Gamma_t, \Phi_t)}{\partial t^j} - \frac{\partial^{|j|} g(\overline{\Gamma}_t, \Phi_t)}{\partial t^j} = \sum_{j' \le j} C_j^{j'} \left(\frac{\partial^{|j-j'|} g(\Gamma_t, \Phi_T^{j'})}{\partial t^{j-j'}} - \frac{\partial^{|j-j'|} g(\overline{\Gamma}_t, \Phi_T^{j'})}{\partial t^{j-j'}} \right) \Big|_{T=t}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial^{|j|} g(\overline{\Gamma}_t, \Phi_t)}{\partial t^j} = \sum_{j' \le j} C_j^{j'} \left. \frac{\partial^{|j-j'|} g(\overline{\Gamma}_t, \Phi_T^{j'})}{\partial t^{j-j'}} \right|_{T=t}, \tag{36}$$

где

$$\Phi_t^{j'}(x) = \frac{\partial^{|j'|} \Phi_t(x)}{\partial t^{j'}}.$$

Будем рассматривать $\Phi_t^{j'}$ как функцию от x. Тогда по условию леммы выполняется неравенство $\|\Phi_t^{j'}\|_{p+1+|j-j'|} \le \beta v^{j'}$. Легко видеть, что из определения $\|g\|_{pq}$ и (35) вытекает (32). Из мажорируемости $\Gamma_t \prec (v,\sigma)$ следует $\overline{\Gamma}_t \prec (v,0)$. Если оценки (31) выполняются при $i+|j'| \le p+|j|$, то $\|\Phi_t^{j'}\|_{p+|j-j'|} \le \beta v^{j'}$. Поэтому из леммы 4.2 и (36) вытекает (33).

Теперь можно провести доказательство теоремы 3.1.

Выберем такую константу B_0, что для любых функций $\Phi,\Psi \in C^q(\mathbb{B}_5^u)$, где $q \le N$, выполняется неравенство $\|\Phi\Psi\|_q \le B_0\|\Phi\|_q\|\Psi\|_q$. Пусть $g \in \mathcal{F}^{pq}$, а J — бесконечно гладкая весовая функция. Очевидно, для произведения Jg выполняются условия а) и б) определения 3.3.

Проверим для функции Jg условие в) определения 3.3. Рассмотрим стандартную деформацию прямых листов $\Gamma_{tz} \sim (y_t(x), z, \chi, x_0)$, у которой $y \prec v$, и плотность $\Phi(x)$. Пусть $\Psi_{tz}(x)$ — сужение J на Γ_{tz}. Функция Ψ_{tz} удовлетворяет лемме 4.3. Поэтому произведение $\Psi_{tz}\Phi$ удовлетворяет лемме 4.5, в которой можно взять константу $\beta = B_0B_3\|J\|_{p+q}\|\Phi\|_{p+|j|+|k|}$. В силу этой леммы

$$\left|\frac{\partial^{|j|+|k|}Jg(\Gamma_{tz},\Phi)}{\partial t^j\,\partial z^k}\right| = \left|\frac{\partial^{|j|+|k|}g(\Gamma_{tz},\Psi_{tz}\Phi)}{\partial t^j\,\partial z^k}\right| \le B_5\|g\|_{pq}B_0B_3\|J\|_{p+q}\|\Phi\|_{p+|j|+|k|}.$$

Это неравенство полностью аналогично оценке (25), если в ней слоистую функцию g заменить на Jg, а число c на $B_0B_3B_5\|g\|_{pq}\|J\|_{p+q}$.

Проверим для Jg условие г) определения 3.3. Рассмотрим стандартную деформацию косых листов $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi, x_0)$, которая мажорируется парой (v,σ), а также деформацию $\overline{\Gamma}_t \sim (y_t(x), z_t(x_0), \chi, x_0)$ и соединяющую их прямолинейную гомотопию $\Gamma_{t\tau} \sim$ $\sim (y_t(x), \tau z_t(x) + (1-\tau)z_t(x_0), \chi, x_0)$. Пусть $\Psi_{t\tau}(x)$ — сужение веса J на $\Gamma_{t\tau}$. Тогда $Jg(\Gamma_t,\Phi) =$ $= g(\Gamma_{t1},\Psi_{t1}\Phi)$ и $Jg(\overline{\Gamma}_t,\Phi) = g(\Gamma_{t0},\Psi_{t0}\Phi)$. Очевидно,

$$Jg(\Gamma_t,\Phi) - Jg(\overline{\Gamma}_t,\Phi) = \bigl[g(\Gamma_{t1},\Psi_{t1}\Phi) - g(\Gamma_{t0},\Psi_{t1}\Phi)\bigr] + g(\Gamma_{t0},\Psi_{t1}\Phi - \Psi_{t0}\Phi). \tag{37}$$

По лемме 4.1 $\Gamma_{t\tau} \prec ((v,B_1\sigma),\eta)$. Применим лемму 4.4 к деформации $\Gamma_{t\tau}$. По ней

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|+l}\Psi_{t\tau}(x)}{\partial x^i\partial t^j\partial\tau^l}\right\| \le B_4v^j(B_1\sigma)^l\|J\|_{i+|j|+l}, \qquad i+|j|+l \le N-1.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j'|}(\Psi_{t1}(x)\Phi(x))}{\partial x^i\partial t^{j'}}\right\| \le B_0B_4v^{j'}\|J\|_{p+1+|j|}\|\Phi\|_{p+1+|j|}, \qquad i+|j'| \le p+1+|j|,$$

и

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j'|}}{\partial x^i\partial t^{j'}}(\Psi_{t1}(x)\Phi(x) - \Psi_{t0}(x)\Phi(x))\right\| = \left\|\int_0^1 \frac{\partial^{i+|j'|+1}(\Psi_{t\tau}(x)\Phi(x))}{\partial x^i\partial t^{j'}\partial\tau}\,d\tau\right\| \le$$

$$\le B_0B_4v^{j'}B_1\sigma\|J\|_{p+1+|j|}\|\Phi\|_{p+|j|}$$

при $i+|j'| \le p+|j|$. Эти неравенства представляют собой условия (31) леммы 4.6 для функций $\Psi_{t1}\Phi$ и $\Psi_{t1}\Phi - \Psi_{t0}\Phi$. По этой лемме

$$\left|\frac{\partial^{|j|}g(\Gamma_{t1},\Psi_{t1}\Phi)}{\partial t^j} - \frac{\partial^{|j|}g(\overline{\Gamma}_{t1},\Psi_{t1}\Phi)}{\partial t^j}\right| \le B_6\|g\|_{pq}B_0B_4\|J\|_{p+1+|j|}\|\Phi\|_{p+1+|j|}\sigma v^j,$$

$$\left|\frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j}g(\Gamma_{t0},\Psi_{t1}\Phi - \Psi_{t0}\Phi)\right| \le B_6\|g\|_{pq}B_0B_1B_4\sigma\|J\|_{p+1+|j|}\|\Phi\|_{p+|j|}v^j.$$

Объединяя эти неравенства с (37), мы получаем оценки (26) для функции Jg с константой c порядка $\|g\|_{pq}\|J\|_{p+q-3}$.

Если весовая функция J бесконечно гладкая, то для Jg очевидным образом выполняется и последнее условие д) определения 3.3. Следовательно, $Jg \in \mathcal{F}^{pq}$, причем норма $\|Jg\|_{pq}$ оценивается величиной порядка $\|g\|_{pq}\|J\|_{p+q}$. По непрерывности эти результаты переносятся на весовые функции гладкости $p+q$. Тем самым теорема доказана для весовых функций J гладкости $p+q$ и для $J \in C^{p+q}(W \times M)$. В случае $J \in C^{p+q-3}(M)$ все условия определения 3.3 для Jg проверяются точно так же, за одним исключением: при проверке условия в) можно сразу написать

$$\left|\frac{\partial^{|j|+|k|}J(z)g(\Gamma_{tz},\Phi)}{\partial t^j\partial z^k}\right| = \left|\sum_{k'\le k} C_k^{k'}\frac{\partial^{|k-k'|}J(z)}{\partial z^{k-k'}}\frac{\partial^{|j|+|k'|}g(\Gamma_{tz},\Phi)}{\partial t^j\partial z^{k'}}\right| \le \sum_{k'\le k} C_k^{k'}\|J\|_{q-2}\|g\|_{pq}v^j\|\Phi\|_{p+|j|+|k|}.$$

Следовательно, константа c в оценке (25) для функции Jg может быть взята порядка $\|J\|_{q-2}\|g\|_{pq} \le \|J\|_{p+q-3}\|g\|_{pq}$. Теорема 3.1 доказана.

5. СВОЙСТВА ОБРАЗОВ СЛЕДОВ

Как и раньше, мы рассматриваем динамическую систему (1), для которой фиксирован равномерно гиперболический перемешивающий атлас $\mathfrak{A}$ и определены понятия весовой функции, плавного косого листа и мажорируемой деформации листов.

Предположим, что семейство весовых функций J_ε строго положительно и отделено снизу от нуля в области $\|dy/dx\| \le \theta$, $\|dz/dx\| \le \theta\eta$ при записи в координатах x, y, z, dy/dx, dz/dx, соответствующих любой гиперболической карте. Через $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ обозначим произвольный вектор с неотрицательными компонентами, а через β_{ik}, где $i,k \in \mathbb{Z}_+$, некоторый набор положительных констант.

Теорема 5.1. *Пусть семейство весов J_ε отделено снизу от нуля. Тогда существует такой набор констант $\beta_{ik} \ge 2$, что если деформации следов $(\Gamma'_{t\varepsilon},\Phi'_{t\varepsilon}) = \Sigma_\varepsilon J_\varepsilon(\Gamma_t,\Phi_t)$, где $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi)$ и $\Gamma'_{t\varepsilon} \sim (y'_{t\varepsilon}(x'), z'_{t\varepsilon}(x'), \chi')$, при некоторых x и t удовлетворяют условиям*

$$\Gamma_t \prec (v,\eta), \qquad \left\|\frac{\partial^{i+|j|}\Phi_t(x)}{\partial x^i\partial t^j}\right\| \le \beta_{i|j|}\nu^j|\Phi_t(x)|, \qquad i+|j|\le q, \quad q\le N-1, \tag{38}$$

то при соответствующих x', t выполняются неравенства

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|}\Phi'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i\partial t^j}\right\| \le (1-b)\beta_{i|j|}(\nu+v)^j|\Phi'_{t\varepsilon}(x')|, \qquad 1\le i\le q-|j|, \tag{39}$$

$$\left\|\frac{\partial^{|j|}\Phi'_{t\varepsilon}(x')}{\partial t^j}\right\| \le \beta_{0|j|}(\nu+v)^j|\Phi'_{t\varepsilon}(x')|, \qquad |j|\le q. \tag{40}$$

Теорема будет доказана ниже в этом разделе.

Определение 5.1. Плотность $\Phi = \Phi(x)$ гладкости $q \le N-1$ назовем *плавной*, если она неотрицательна и для нее при всех x выполняются неравенства $\|d^i\Phi(x)/dx^i\| \le \beta_{i0}\Phi(x)$, $i = 1,\dots,q$.

Следствие 5.1.1. *Если $(\Gamma'_\varepsilon,\Phi'_\varepsilon) = \Sigma_\varepsilon J_\varepsilon(\Gamma,\Phi)$, а плотность Φ гладкости q плавная, то плотность Φ'_ε тоже будет плавной.*

Доказательство. Рассмотрим след (Γ,Φ) как деформацию, не зависящую от параметра t. Тогда в (38) для нее можно положить $v = \nu = 0$. Следовательно, в силу (39) будет $\|d^i\Phi'_\varepsilon(x')/(dx')^i\| \le (1-b)\beta_{i0}\Phi'_\varepsilon(x')$, т.е. плотность Φ'_ε плавная.

Многократно применяя теорему 5.1 при $\varepsilon = 0$ и следствие 1.3.1, получаем

Следствие 5.1.2. *Положим* $C_n = ne^{c\eta}$. *Пусть* $(\Gamma'_t, \Phi'_t) \subset (\Sigma_0 J_0)^n(\Gamma_t, \Phi_t)$, *где* $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi)$ *и* $\Gamma'_t \sim (y'_t(x'), z'_t(x'), \chi')$. *Тогда из условий*

$$\Gamma_t \prec (v, \eta), \qquad \left\| \frac{\partial^{i+|j|}\Phi_t(x)}{\partial x^i \partial t^j} \right\| \le \beta_{i|j|}\nu^j |\Phi_t(x)|, \qquad i + |j| \le q,$$

вытекают оценки

$$\left\| \frac{\partial^{i+|j|}\Phi'_t(x')}{(\partial x')^i \partial t^j} \right\| \le \beta_{i|j|}(\nu + C_n v)^j |\Phi'_t(x')|, \qquad i + |j| \le q.$$

Теорема 5.2. *Для любого семейства весов* J_ε *существуют такие большие константы* C_n, *что если некоторая деформация листов* $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi)$ *мажорируется парой* (v, η), *а семейство плотностей* $\Phi_t(x)$ *при некотором* $\beta \ge 0$ *удовлетворяет оценкам*

$$\left\| \frac{\partial^{i+|j|}\Phi_t(x)}{\partial x^i \partial t^j} \right\| \le \beta v^j, \qquad i + |j| \le q, \quad q \le N - 1,$$

то тогда для любого семейства следов $(\Gamma'_{t\varepsilon}, \Phi'_{t\varepsilon}) \subset (\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon)^n(\Gamma_t, \Phi_t)$ *выполняются оценки*

$$\left\| \frac{\partial^{i+|j|+l}\Phi'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i \partial t^j \partial \varepsilon^l} \right\| \le C_n \beta v^j, \qquad i + |j| + l \le q. \tag{41}$$

Чтобы доказать теоремы 5.1 и 5.2, нам потребуются две леммы.

Лемма 5.3. *Если* $(\Gamma'_{t\varepsilon}, \Phi'_{t\varepsilon}) = \Sigma_\varepsilon J_\varepsilon(\Gamma_t, \Phi_t)$, *то*

$$\frac{\partial^{i+|j|}\Phi'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i \partial t^j}(V')^i = J_\varepsilon\left(x, y, z, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial^{i+|j|}\Phi_t(x)}{\partial x^i \partial t^j} \left(\frac{\partial x}{\partial x'} V'\right)^i + P_{ij}.$$

Здесь функция P_{ij} *— это конечная сумма произведений вида* $p_1p_2p_3p_4$, *причем*

а) p_1 *— гладкая функция от переменных* x, y, z, $\partial y/\partial x$, $\partial z/\partial x$, ε, *у которой все частные производные ограничены*;

б) p_2 *— произведение некоторых координат вектора* V', *состоящее из* i *сомножителей*;

в) p_3 *— некоторая частная производная от* $\Phi_t(x)$, *младшая по отношению к индексной паре* (i, j);

г) p_4 *— произведение нескольких частных производных от* $y_t(x)$ *и* $z_t(x)$ *порядка не выше* $i + 1 + |j|$.

При этом сумма всех встречающихся в произведении p_3p_4 *мультииндексов, отвечающих дифференцированиям по* t, *равна* j.

Доказательство леммы проводится путем последовательного дифференцирования тождества $\Phi'_{t\varepsilon}(x') = J_\varepsilon(x, y, z, \partial y/\partial x, \partial z/\partial x)\Phi_t(x)$, в котором $x = x(x', t, \varepsilon)$, $y = y_t(x)$, $z = z_t(x)$. После каждого дифференцирования результат нужно представлять как функцию от x, y, z, $\partial y/\partial x$, $\partial z/\partial x$, ε, V' и частных производных от y, z и Φ_t, используя подстановки (16), (17).

Лемма 5.4. *Если* $(\Gamma'_{t\varepsilon}, \Phi'_{t\varepsilon}) \subset \Sigma_\varepsilon J_\varepsilon(\Gamma_{t\varepsilon}, \Phi_{t\varepsilon})$, *где* $\Gamma_{t\varepsilon} \sim (y_{t\varepsilon}(x), z_{t\varepsilon}(x), \chi)$ *и* $\Gamma'_{t\varepsilon} \sim (y'_{t\varepsilon}(x'), z'_{t\varepsilon}(x'), \chi')$, *то*

$$\frac{\partial^{i+|j|+l}\Phi'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i \partial t^j \partial \varepsilon^l}(V')^i = P_{ijl},$$

где P_{ijl} *— конечная сумма произведений вида* $p_1p_2p_3p_4$, *причем* а) p_1 — *гладкая функция от переменных* x, y, z, $\partial y/\partial x$, $\partial z/\partial x$, ε, *у которой все частные производные ограничены*;

б) p_2 — *произведение некоторых координат вектора* V', *состоящее из* i *сомножителей*;

в) p_3 — *некоторая частная производная от* $\Phi_{t\varepsilon}(x)$ *порядка не выше* $i+|j|+l$;

г) p_4 — *произведение нескольких частных производных от* $y_{t\varepsilon}(x)$ *и* $z_{t\varepsilon}(x)$ *порядка не выше* $i+|j|+l+1$.

При этом сумма всех встречающихся в произведении p_3p_4 *мультииндексов, отвечающих дифференцированиям по* t, *равна* j.

Доказательство леммы получается последовательным дифференцированием тождества $\Phi'_{t\varepsilon}(x') = J_\varepsilon(x, y, z, \partial y/\partial x, \partial z/\partial x)$, в котором $x = x(x', t, \varepsilon)$, $y = y_{t\varepsilon}(x)$, $z = z_{t\varepsilon}(x)$. После каждого дифференцирования результат нужно представлять как функцию от $x, y, z, \partial y/\partial x, \partial z/\partial x, \varepsilon, V'$ и частных производных от $y_{t\varepsilon}(x)$, $z_{t\varepsilon}(x)$ и $\Phi_{t\varepsilon}(x)$, используя подстановки (16)–(18).

Доказательство теоремы 5.1. Константы β_{ik} будем находить по индукции в порядке возрастания старшинства индексов. Предположим, что для пары индексов (I, J) уже определен некоторый набор чисел $\beta_{i|j|}$, не содержащий $\beta_{I|J|}$, но содержащий все числа, отвечающие парам индексов (i, j), младшим по отношению к (I, J). Покажем, как в этом случае найти $\beta_{I|J|}$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ множество пар (i, j), младших по отношению к (I, J), для которых $j \le J$. В силу леммы 5.3 и условий (38) существует такая большая константа C (не зависящая от $\beta_{i|j|}$), что

$$\left\| \frac{\partial^{I+|J|}\Phi'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^I \partial t^J} \right\| \le J_\varepsilon\left(x, y, z, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \left\| \frac{\partial^{I+|J|}\Phi_t(x)}{\partial x^I \partial t^J} \right\| (a+b)^I + C \sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}} \beta_{i|j|} \nu^j |\Phi_t(x)| v^{J-j}.$$

Из последнего неравенства и тождества $\Phi'_{t\varepsilon}(x') = J_\varepsilon \Phi_t(x)$ вытекает импликация

$$\left\| \frac{\partial^{I+|J|}\Phi_t(x)}{\partial x^I \partial t^J} \right\| \le \beta_{I|J|} \nu^J |\Phi_t(x)| \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| \frac{\partial^{I+|J|}\Phi'_{t\varepsilon}(x')}{(\partial x')^I \partial t^J} \right\| \le \Delta |\Phi'_{t\varepsilon}(x')|,$$

где

$$\Delta = \beta_{I|J|} \nu^J (a+b)^I + \frac{C}{J_\varepsilon} \sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}} \beta_{i|j|} \nu^j v^{J-j}.$$

Очевидно,

$$\sum_{(i,j)\in\mathfrak{D}} \nu^j v^{J-j} \le N \sum_{j\le J} \nu^j v^{J-j} \le N(\nu+v)^J.$$

Если $I > 0$, то, выбрав $\beta_{I|J|}$ достаточно большим по сравнению с C, N и $\beta_{i|j|}$, добьемся выполнения неравенства $\Delta \le (1-b)\beta_{I|J|}(\nu+v)^J$ при всех ν и v. Если же $I = 0$, то из определения старшинства индексов следует, что j не может совпадать с J. В этом случае, взяв $\beta_{0|J|} \ge \sup C J_\varepsilon^{-1} \beta_{i|j|} N$, получим неравенство $\Delta \le \beta_{0|J|}(\nu+v)^J$. В любом случае для $(i, j) = (I, J)$ мы добились выполнения оценки (39), если $I > 0$, и (40), если $I = 0$. А теорема 5.1 как раз и состоит в выполнении этих оценок для всех пар индексов (I, J). На этом шаг индукции завершен.

Доказательство теоремы 5.2 проводится индукцией по n при помощи леммы 5.4 и теоремы 1.4. Просто на каждом шаге индукции нужно подставлять в равенство леммы 5.4 оценки из теоремы 1.4 и оценки (41), полученные на предыдущем шаге.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2

Запишем вначале в подходящей форме, пригодной для вычислений, значение слоистой функции $A_{\varepsilon,n}g$ на произвольном стандартном следе (Γ,Φ). Напомним, что

$$(A_{\varepsilon,n}g)(\Gamma(\alpha),\Phi)=\int\limits_{\Gamma'_\varepsilon}\xi_\Gamma(\alpha,\beta)g(\Gamma'_\varepsilon(\beta'),\Phi'_\varepsilon)\,d\mu(\beta'). \tag{42}$$

Здесь $\Gamma\sim(y(x),z(x),\chi,x_0)$ — стандартный лист; точка $\alpha=(\chi(x_0,y(x_0)),z(x_0))$ является его центром; β — произвольная точка Γ; стандартный след $(\Gamma'_\varepsilon,\beta',\Phi'_\varepsilon)$ определяется тем, что его центром служит точка $\beta'=\Sigma^n_\varepsilon(\beta)$ и выполняется включение $(\Gamma'_\varepsilon,\Phi'_\varepsilon)\subset(\Sigma_\varepsilon J_\varepsilon)^n(\Gamma,\Phi)$; μ — риманов объем на листе $\Gamma'_\varepsilon=\Sigma^n_\varepsilon(\Gamma)$. Функция $\xi_\Gamma(\alpha,\beta)$ определяется равенством

$$\xi_\Gamma(\alpha,\beta)=\frac{\xi_0(d(\alpha,\beta))}{\int_\Gamma\xi_0(d(\alpha,\beta))\,d\mu(\alpha)}, \tag{43}$$

где d — расстояние в $W\times M$, а $\xi_0(t)$ — фиксированная гладкая неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|t|\le r_0$ и в нуль при $|t|\ge 2r_0$. Здесь r_0 — достаточно малое положительное число.

Сейчас мы видоизменим формулу (42) таким образом, чтобы ее можно было дифференцировать по параметру при поперечной деформации стандартного косого следа $\Gamma\sim(y(x),z(x),\chi,x_0)$. Очевидно, переменная $x\in B(x_0,1)$ является координатой на Γ. Функция $\xi_\Gamma(\alpha,\beta)$ зависит только от точки $\beta(x)=(\chi(x,y(x)),z(x))$, поскольку точка α (центр Γ) фиксирована. Положим $\xi_\Gamma(x)=\xi_\Gamma(\alpha,\beta(x))$. Риманов объем на Γ будем записывать в виде $d\mu=\rho(x)\,dx$.

Пусть $\Gamma^*=\{\beta\in\Gamma\mid d(\alpha,\beta)\le 2r_0\}$. Тогда $\operatorname{supp}\xi_\Gamma\subset\Gamma^*$. По определению гиперболического атласа для любой точки $\beta\in\Gamma^*$ найдется такая карта $\chi'\in\mathfrak{A}$, что $\Sigma^n_\varepsilon(\beta)\in\chi'(\mathbb{B}^u_1\times\mathbb{B}^s_1)\times M$. По утверждению 1.2 точка $\beta'=\Sigma^n_\varepsilon(\beta)$ принадлежит некоторому листу $\Gamma'_\varepsilon\subset\Sigma^n_\varepsilon(\Gamma)$ вида $\Gamma'_\varepsilon\sim(y'_\varepsilon(x'),z'_\varepsilon(x'),\chi')$, где $x'\in\mathbb{B}^u_5$, причем β' имеет координату $x'\in\mathbb{B}^u_1$. Построим такой лист для каждой точки $\beta\in\Gamma^*$. В силу ограниченности линейных размеров множества $\Sigma^n_\varepsilon(\Gamma^*)$ таких листов может быть только конечное число, ограниченное независимо от выбора стандартного листа Γ. Обозначим эти листы $\Gamma'_{l\varepsilon}\sim(y'_{l\varepsilon}(x'),z'_{l\varepsilon}(x'),\chi'_l)$, где $x'\in\mathbb{B}^u_5$ и $l=1,\dots,m$. Риманов объем на $\Gamma'_{l\varepsilon}$ обозначим как $\rho_{l\varepsilon}(x')\,dx'$. Для каждой точки $x'_0\in\mathbb{B}^u_4$ определим стандартный лист $\Gamma'_{l\varepsilon}(x'_0)\sim(y'_{l\varepsilon}(x'),z'_{l\varepsilon}(x'),\chi'_l,x'_0)$ с центром $(\chi'_l(x'_0,y'_{l\varepsilon}(x'_0)),\ z'_{l\varepsilon}(x'_0))$.

Фиксируем бесконечно гладкую неотрицательную функцию ζ на $\mathbb{R}^u$, обращающуюся в единицу на $\mathbb{B}^u_2$ и в нуль вне $\mathbb{B}^u_3$. На каждом листе $\Gamma'_{l\varepsilon}$ определим функцию $\zeta_l=\zeta_l(x')$, где x' — координата на $\Gamma'_{l\varepsilon}$. Поскольку $\Gamma'_{l\varepsilon}\subset\Sigma^n_\varepsilon(\Gamma)$, эту функцию можно продолжить нулем на $\Sigma^n_\varepsilon(\Gamma)\setminus\Gamma'_{l\varepsilon}$. Определим на $\Sigma^n_\varepsilon(\Gamma)$ функцию $\overline{\zeta}_\varepsilon=\sum_{l=1}^m\zeta_l$. Ее сужение на лист $\Gamma'_{l\varepsilon}$ обозначим $\overline{\zeta}_{l\varepsilon}=\overline{\zeta}_{l\varepsilon}(x')$. По построению $\Sigma^n_\varepsilon(\Gamma^*)\subset\bigcup_l\operatorname{supp}\zeta_l$. Поэтому функции $\zeta_l/\overline{\zeta}_{l\varepsilon}$ образуют гладкое разбиение единицы на множестве $\Sigma^n_\varepsilon(\Gamma^*)$.

Определим на $\Gamma'_{l\varepsilon}$ функцию $\xi_{l\varepsilon}=\xi_{l\varepsilon}(x')$ таким образом, что $(\Gamma'_{l\varepsilon},\xi_{l\varepsilon})\subset\Sigma^n_\varepsilon(\Gamma,\xi_\Gamma)$. Тогда формулу (42) можно преобразовать к следующему виду:

$$(A_{\varepsilon,n}g)(\Gamma,\Phi)=\sum_{l=1}^m\int\limits_{\mathbb{B}^u_5}\xi_{l\varepsilon}(x')\frac{\zeta_l(x')}{\overline{\zeta}_{l\varepsilon}(x')}g(\Gamma'_{l\varepsilon}(x'),\Phi'_\varepsilon)\rho_{l\varepsilon}(x')\,dx'. \tag{44}$$

Пусть теперь вместо фиксированного листа Γ задана стандартная деформация $\Gamma_t\sim$ $\sim(y_t(x),z_t(x),\chi,x_0)$. Если область изменения параметра t мала, то для Γ_t можно точно так же построить стандартные деформации $\Gamma'_{lt\varepsilon}\sim(y'_{lt\varepsilon}(x'),z'_{lt\varepsilon}(x'),\chi'_l)$ вместо листов $\Gamma'_{l\varepsilon}$ и деформации функций ξ_{Γ_t}, ρ_t, $\xi_{lt\varepsilon}$, $\overline{\zeta}_{lt\varepsilon}$, $\rho_{lt\varepsilon}$, $\Phi'_{t\varepsilon}$ вместо ξ_Γ, ρ, $\xi_{l\varepsilon}$, $\overline{\zeta}_{l\varepsilon}$, $\rho_{l\varepsilon}$, Φ'_ε (но ζ_l остается не зависящей от t, ε). Соответственно формула (44) превращается в

$$(A_{\varepsilon,n}g)(\Gamma_t,\Phi)=\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{B}_5^u}\xi_{lt\varepsilon}(x')\frac{\zeta_l(x')}{\overline{\zeta}_{lt\varepsilon}(x')}g(\Gamma'_{lt\varepsilon}(x'),\Phi'_{t\varepsilon})\rho_{lt\varepsilon}(x')\,dx'. \tag{45}$$

Чтобы продифференцировать (45) по t, ε, нам потребуются три леммы.

Лемма 6.1. *Существует такое большое B_7, что если стандартная деформация листов Γ_t мажорируется парой (v,η) и имеет вид $\Gamma_t\sim(y_t(x),z_t(x),\chi,x_0)$, то*

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|}\rho_t(x)}{\partial x^i\partial t^j}\right\|\le B_7v^j,\qquad\left\|\frac{\partial^{i+|j|}\xi_{\Gamma_t}(x)}{\partial x^i\partial t^j}\right\|\le B_7v^j,\qquad i+|j|\le N-1.$$

Доказательство. Напомним, что $\rho_t(x)\,dx$ — риманов объем на Γ_t, а $\xi_{\Gamma_t}(x)=\xi_{\Gamma_t}(\alpha_t,\beta_t(x))$, где $\alpha_t=(\chi(x_0,y_t(x_0)),z_t(x_0))$ и $\beta_t(x)=(\chi(x,y_t(x)),z_t(x))$. Плотность $\rho_t(x)$ является на самом деле гладкой функцией от переменных x, $y_t(x)$, $z_t(x)$, $dy_t(x)/dx$ и $dz_t(x)/dx$. Отсюда легко выводятся оценки для ее производных. Оценки для производных от $\xi_{\Gamma_t}(x)$ получаются при помощи дифференцирования равенства (43) после подстановки в него выражений для α_t, $\beta_t(x)$ и меры $\rho_t(x)\,dx$.

Лемма 6.2. *Существует такое большое B_8, не зависящее от выбора деформаций Γ_t и $\Gamma'_{lt\varepsilon}$, что из мажорируемости $\Gamma_t\prec(v,\eta)$ вытекают оценки*

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|+k}}{(\partial x')^i\partial t^j\partial\varepsilon^k}\left(\xi_{lt\varepsilon}(x')\frac{\zeta_l(x')}{\overline{\zeta}_{lt\varepsilon}(x')}\rho_{lt\varepsilon}(x')\right)\right\|\le B_8v^j,\qquad i+|j|+k\le N-1.$$

Доказательство. В силу леммы 6.1 и теоремы 5.2

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|+k}\xi_{lt\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i\partial t^j\partial\varepsilon^k}\right\|\le C_nB_7v^j,\qquad i+|j|+k\le N-1. \tag{46}$$

По теореме 1.4 деформация $\Gamma'_{lt\varepsilon}\sim(y'_{lt\varepsilon}(x'),z'_{lt\varepsilon}(x'),\chi'_l)$ удовлетворяет оценкам

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|+k}y'_{lt\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i\partial t^j\partial\varepsilon^k}\right\|\le C_nv^j,\qquad\left\|\frac{\partial^{i+|j|+k}z'_{lt\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i\partial t^j\partial\varepsilon^k}\right\|\le C_nv^j,\qquad 1\le i+|j|+k\le N.$$

Поэтому для функции

$$\rho_{lt\varepsilon}(x')=\rho_l\left(x',y'_{lt\varepsilon}(x'),z'_{lt\varepsilon}(x'),\frac{dy'_{lt\varepsilon}(x')}{dx'},\frac{dz'_{lt\varepsilon}(x')}{dx'}\right)$$

выполняются оценки вида

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|+k}\rho_{lt\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i\partial t^j\partial\varepsilon^k}\right\|\le Cv^j,\qquad i+|j|+k\le N-1. \tag{47}$$

Функция $\overline{\zeta}_{lt\varepsilon}$ имеет вид $\overline{\zeta}_{lt\varepsilon}(x')=\sum_{k=1}^m\zeta\circ(\chi'_k)^{-1}\circ\chi'_l(x',y'_{lt\varepsilon}(x'))$. По построению все производные от функций $(\chi'_k)^{-1}\circ\chi'_l$ ограничены. Поэтому для производных от $\overline{\zeta}_{lt\varepsilon}$ выполняются оценки вида

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|+k}}{(\partial x')^i\partial t^j\partial\varepsilon^k}\left(\frac{\zeta_l(x')}{\overline{\zeta}_{lt\varepsilon}(x')}\right)\right\|\le Cv^j,\qquad i+|j|+k\le N-1. \tag{48}$$

Из (46)–(48) вытекает утверждение леммы.

Предположим, что стандартная деформация косых листов $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi, x_0)$ мажорируется парой (v, σ), где $\sigma \in [0, \sigma_0]$. Построим по ней стандартную деформацию прямых листов $\overline{\Gamma}_t \sim (y_t(x), z_t(x_0), \chi, x_0)$ и гомотопию $\Gamma_{t\tau} \sim (y_t(x),\, \tau z_t(x) + (1-\tau) z_t(x_0),\, \chi, x_0)$. Если число σ_0 достаточно мало, то в формуле (45) индекс t всюду можно заменить на пару (t, τ):

$$(A_{\varepsilon,n} g)(\Gamma_{t\tau}, \Phi) = \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{B}_5^u} \xi_{lt\tau\varepsilon}(x') \frac{\zeta_l(x')}{\overline{\zeta}_{lt\tau\varepsilon}(x')}\, g(\Gamma'_{lt\tau\varepsilon}(x'), \Phi'_{t\tau\varepsilon}) \rho_{lt\tau\varepsilon}(x')\, dx'. \tag{49}$$

Для краткости положим

$$\Psi_{lt\tau\varepsilon}(x') = \xi_{lt\tau\varepsilon}(x') \frac{\zeta_l(x')}{\overline{\zeta}_{lt\tau\varepsilon}(x')} \rho_{lt\tau\varepsilon}(x'). \tag{50}$$

Лемма 6.3. *Существует такое большое B_9, не зависящее от деформаций Γ_t и $\Gamma'_{lt\tau\varepsilon}$, что из мажорируемости $\Gamma_t \prec (v, \sigma)$ вытекают оценки*

$$\left\| \frac{\partial^{i+|j|+k+m} \Psi_{lt\tau\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i \partial t^j \partial \tau^k \partial \varepsilon^m} \right\| \le B_9 v^j \sigma^k, \qquad i + |j| + k + m \le N - 1. \tag{51}$$

Доказательство. По лемме 4.1 из $\Gamma_t \prec (v, \sigma)$ вытекает мажорируемость $\Gamma_{t\tau} \prec ((v, B_1\sigma), \eta)$. Поэтому оценки (51) вытекают из леммы 6.2.

Теперь можно заняться непосредственно доказательством теоремы 3.2. Нам нужно убедиться, что для любой слоистой функции $g \in \mathcal{F}^{pq}$ функция $d^m A_{\varepsilon,n} g / d\varepsilon^m$ принадлежит $\mathcal{F}^{p+1+m, q-4-m}$. Проверим для последней функции все условия определения 3.3 пространства $\mathcal{F}^{p+1+m, q-4-m}$.

А. Непосредственно из определения оператора $A_{\varepsilon,n}$ видно, что $A_{\varepsilon,n} g(\Gamma, \Phi)$ линейно зависит от Φ, а значения $A_{\varepsilon,n} g$ на эквивалентных следах совпадают. То же самое будет верно и для производных $d^m A_{\varepsilon,n} g(\Gamma, \Phi)/d\varepsilon^m$ (если, конечно, они существуют). Тем самым выполняются условия а) и б) определения 3.3.

Б. Проверим условие в). Пусть $\Gamma_{tz} \sim (y_t(x), z, \chi, x_0)$ и $y_t \prec v$. Будем вычислять $A_{\varepsilon,n} g(\Gamma_{tz}, \Phi)$ по формуле (45), заменяя в ней всюду индекс t на пару (t, z). По ней

$$(A_{\varepsilon,n} g)(\Gamma_{tz}, \Phi) = \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{B}_5^u} \xi_{ltz\varepsilon}(x') \frac{\zeta_l(x')}{\overline{\zeta}_{ltz\varepsilon}(x')}\, g(\Gamma'_{ltz\varepsilon}(x'), \Phi'_{tz\varepsilon}) \rho_{ltz\varepsilon}(x')\, dx'. \tag{52}$$

Будем считать, что Γ_{tz} зависит от составного параметра (t, z). Из определения мажорируемости 1.4 следует, что $\Gamma_{tz} \prec ((v, (\theta\eta)^{-1} e), 0)$, где вектор $e = (1, \dots, 1)$ имеет ту же размерность, что и z. Из теоремы 1.4 вытекает мажорируемость вида $\Gamma'_{ltz\varepsilon}(x') \prec ((Cv, Ce, C), \eta)$ по отношению к составному параметру (t, z, ε), в которой константа C не зависит от выбора деформаций Γ_{tz} и $\Gamma'_{ltz\varepsilon}(x')$. По теореме 5.2 (в которой следует взять $\beta = \|\Phi\|_q$) выполняются оценки

$$\left\| \frac{\partial^{i+|j|+|k|+m} \Phi'_{tz\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i \partial t^j \partial z^k \partial \varepsilon^m} \right\| \le C_n \|\Phi\|_q v^j (\theta\eta)^{-|k|}, \qquad i + |j| + |k| + m \le q.$$

В силу леммы 4.6 при всех $|j| + |k| + m \le q - 4$

$$\left| \frac{\partial^{|j|+|k|+m}}{\partial t^j \partial z^k \partial \varepsilon^m}\, g(\Gamma'_{ltz\varepsilon}(x'), \Phi'_{tz\varepsilon}) \right| \le B_6 (1+\eta) \|g\|_{pq} C_n \|\Phi\|_{p+1+|j|+|k|+m} (Cv)^j C^{|k|+m}. \tag{53}$$

Из леммы 6.2 (в которой t нужно заменить на (t,z)) вытекают оценки

$$\left|\frac{\partial^{i+|j|+|k|+m}}{(\partial x')^i\partial t^j\partial z^k\partial\varepsilon^m}\left(\xi_{ltz\varepsilon}(x')\frac{\zeta_l(x')}{\overline{\zeta}_{ltz\varepsilon}(x')}\rho_{ltz\varepsilon}(x')\right)\right|\le B_8 v^j(\theta\eta)^{-|k|} \tag{54}$$

при всех $i+|j|+|k|+m\le N-1$. Наконец, дифференцирование (52) с учетом (53), (54) дает оценку вида

$$\left|\frac{\partial^{|j|+|k|+m}}{\partial t^j\partial z^k\partial\varepsilon^m}A_{\varepsilon,n}g(\Gamma_{tz},\Phi)\right|\le C\|g\|_{pq}v^j\|\Phi\|_{p+1+|j|+|k|+m},\qquad |j|+|k|+m\le q-4.$$

Она является аналогом оценки (25) для функции $d^mA_{\varepsilon,n}g/d\varepsilon^m$ как элемента пространства $\mathcal{F}^{p+1+m,q-4-m}$.

В. Проверим условие г) определения 3.3 для функции $d^mA_{\varepsilon,n}g/d\varepsilon^m$. Рассмотрим стандартную деформацию косых листов $\Gamma_t\sim(y_t(x),z_t(x),\chi,x_0)$, соответствующую ей деформацию прямых листов $\overline{\Gamma}_t\sim(y_t(x),z_t(x_0),\chi,x_0)$ и гомотопию $\Gamma_{t\tau}\sim(y_t(x),\ \tau z_t(x)+(1-\tau)z_t(x_0),\ \chi,x_0)$. Пусть $\Gamma_t\prec(v,\sigma)$. Тогда из леммы 4.1 следует, что $\Gamma_{t\tau}\prec((v,B_1\sigma),\eta)$. Из теоремы 1.4 вытекает мажорируемость вида $\Gamma'_{lt\tau\varepsilon}(x')\prec((Cv,C\sigma,C),\eta)$ по отношению к составному параметру (t,τ,ε), в которой константа C не зависит от выбора деформаций Γ_t и $\Gamma'_{lt\tau\varepsilon}(x')$. По теореме 5.2 выполняются оценки

$$\left\|\frac{\partial^{i+|j|+k+m}\Phi'_{t\tau\varepsilon}(x')}{(\partial x')^i\partial t^j\partial\tau^k\partial\varepsilon^m}\right\|\le C_n\|\Phi\|_q v^j(B_1\sigma)^k,\qquad i+|j|+k+m\le q.$$

В силу леммы 4.6 при всех $|j|+k+m\le q-4$

$$\left|\frac{\partial^{|j|+k+m}}{\partial t^j\partial\tau^k\partial\varepsilon^m}g(\Gamma'_{lt\tau\varepsilon}(x'),\Phi'_{t\tau\varepsilon})\right|\le B_6(1+\eta)\|g\|_{pq}C_n\|\Phi\|_{p+1+|j|+k+m}(Cv)^j(C\sigma)^kC^m. \tag{55}$$

Дифференцирование (49) с учетом (51), (55) дает оценку вида

$$\left|\frac{\partial^{|j|+m}}{\partial t^j\partial\varepsilon^m}\big(A_{\varepsilon,n}g(\Gamma_t,\Phi)-A_{\varepsilon,n}g(\overline{\Gamma}_t,\Phi)\big)\right|=\left|\int_0^1\frac{\partial^{|j|+m+1}}{\partial t^j\partial\tau\partial\varepsilon^m}A_{\varepsilon,n}(\Gamma_{t\tau},\Phi)\right|\le C\|g\|_{pq}\sigma v^j\|\Phi\|_{p+2+|j|+m}$$

при $|j|+m\le -5$. Она является аналогом оценки (26) для функции $d^mA_{\varepsilon,n}g/d\varepsilon^m$ как элемента $\mathcal{F}^{p+1+m,q-4-m}$.

Г. Требуемая в условии д) определения 3.3 непрерывность производных для функции $d^mA_{\varepsilon,n}g/d\varepsilon^m\in\mathcal{F}^{p+1+m,q-4-m}$ вытекает из описанного выше способа их вычисления. Теорема 3.2 доказана.

7. СЛОИСТЫЕ ФУНКЦИИ НА ПРЯМЫХ СЛЕДАХ

Всякую слоистую функцию можно сузить а) на множество прямых стандартных следов и б) на множество прямых стандартных следов, лежащих в одном слое $z=\mathrm{const}$. Эти сужения мы тоже будем называть слоистыми функциями. При $\varepsilon=0$ на пространствах таких функций корректно определен оператор усредненного взвешенного сдвига $A_{0,n}$. Дадим соответствующие формальные определения.

Определение 7.1. Слоистой функцией типа (p,q) (где $p\ge1$, $q\ge1$, $p+q\le N-1$) на слое $z=\mathrm{const}$ называется любая вещественнозначная функция $g_z(\Gamma,\Phi)$ на множестве прямых стандартных следов, лежащих в слое $z=\mathrm{const}$, обладающая следующими свойствами:

а) она линейно зависит от плотности Φ;

б) ее значения на эквивалентных следах совпадают;

в) найдется такое положительное число c, что если прямая стандартная деформация $\Gamma_{tz} \sim (y_t(x), z, \chi, x_0)$ удовлетворяет оценке $y_t \prec v$, то для любой плотности $\Phi = \Phi(x)$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial^{|j|} g_z(\Gamma_{tz}, \Phi)}{\partial t^j}\right| \le c v^j \|\Phi\|_{p+|j|}, \qquad |j| \le q; \tag{56}$$

г) все указанные в (56) частные производные непрерывны по t и непрерывно меняются при скользящей деформации следа (Γ_{tz}, Φ).

Минимально возможное c, при котором выполняются оценки (56), обозначается $\|g_z\|_{pq}$, а пространство всех функций, удовлетворяющих этому определению, обозначается $\mathcal{F}_z^{pq}$. Сужение оператора $A_{0,n}$ на $\mathcal{F}_z^{pq}$ обозначим $A_{z,n}$. Свойства оператора $A_{z,n}$ детально изучались в [2], причем в более общей ситуации, когда отображение S_z меняется с течением времени. В нашем случае S_z не зависит от времени и все результаты [2] существенно упрощаются. В частности, из теоремы 6.3 и утверждений 2.4, 3.1 этой работы тривиальным образом вытекает следующая

Теорема 7.1. *Оператор $A_{z,n}$ непрерывно отображает каждое пространство $\mathcal{F}_z^{pq}$ в себя. Если весовая функция J отделена снизу от нуля, а натуральное число n достаточно велико, то для любого $z \in M$ существуют положительная функция $h_z \in \mathcal{F}_z^{1,N-2}$, положительный линейный функционал $\nu_z\colon \mathcal{F}_z^{N-2,1} \to \mathbb{R}$ и число λ_z, для которых*

а) $A_{z,n} h_z = e^{\lambda_z} h_z,\ \nu_z \circ A_{z,n} = e^{\lambda_z} \nu_z,\ \nu_z(h_z) = 1$;

б) *последовательность операторов $[e^{-\lambda_z} A_{z,n}]^m$ на пространстве $\mathcal{F}_z^{pq}$ сходится при $m \to \infty$ к проектору $\overline{A}_{z,n} g = \nu_z(g) h_z$ в равномерной операторной норме*;

в) *существует такое большое C_0, не зависящее от z, что для любых двух листов Γ_{z1} и Γ_{z2} истинно неравенство $h_z(\Gamma_{z1}, 1) \le C_0 h_z(\Gamma_{z2}, 1)$.*

Определение 7.2. Пространство $\mathcal{F}_M^{pq}$, где $p \ge 1$, $q \ge 2$, $p + q \le N - 1$, состоит из всевозможных параметрических семейств $\{g_z \in \mathcal{F}_z^{pq} \mid z \in M\}$, для каждого из которых существует такое число $c \ge 0$, что для любой стандартной деформации прямых листов $\Gamma_{tz} \sim (y_t(x), z, \chi, x_0)$ и плотности $\Phi = \Phi(x)$ из оценки $y_t \prec v$ вытекают неравенства

$$\left|\frac{\partial^{|j|+|k|} g_z(\Gamma_{tz}, \Phi)}{\partial t^j \partial z^k}\right| \le c v^j \|\Phi\|_{p+|j|+|k|}, \qquad |j| + |k| \le q, \quad |k| \le q - 2, \tag{57}$$

причем все указанные производные существуют и непрерывны по t, z.

Если $g = \{g_z\} \in \mathcal{F}_M^{pq}$, то минимальное c, при котором выполняются неравенства (57), обозначим $\|g\|_{pq}$. Очевидно, пространство $\mathcal{F}_M^{pq}$ с этой нормой банахово. Оно является модулем над $C^{q-2}(M)$ и над $C^{p+q}(W \times M)$.

Пространства $\mathcal{F}_z^{pq}$ при разных $z \in M$ естественно отождествляются между собой. Поэтому можно считать, что все они совпадают с некоторым фиксированным пространством $\mathcal{F}_0^{pq}$. Тогда всякая функция $g \in \mathcal{F}_M^{pq}$ отождествляется с параметрическим семейством $\{g_z \in \mathcal{F}_0^{pq} \mid z \in M\}$. Из определений 7.1, 7.2 видно, что семейство $g = \{g_z\}$ принадлежит $\mathcal{F}_M^{pq}$ в том и только том случае, когда при всех $|k| \le q - 2$ выполняется условие $\partial^{|k|} g_z / \partial z^k \in \mathcal{F}_0^{p+|k|, q-|k|}$, причем

$$\|g\|_{pq} = \sup_{z \in M} \sup_{|k| \le q-2} \left\| \frac{\partial^{|k|} g_z}{\partial z^k} \right\|_{p+|k|, q-|k|}. \tag{58}$$

В [2] такие параметрические семейства назывались *квазидифференцируемыми*. Там же было доказано, что параметрическое семейство операторов $A_{z,n}\colon \mathcal{F}_0^{pq} \to \mathcal{F}_0^{p+l,q-l}$ непрерывно дифференцируемо $l-1$ раз по z, причем операторы $\partial^{|k|}A_{z,n}/\partial z^k$ непрерывно отображают $\mathcal{F}_0^{pq}$ в $\mathcal{F}_0^{p+|k|,q-|k|}$. Очевидно, оператор $A_{0,n}$ на $\mathcal{F}_M^{pq}$ действует послойно: если $g=\{g_z\}$ и $h=\{h_z\}$, то $h=A_{0,n}g$ в том и только том случае, когда $h_z=A_{z,n}g_z$ при всех $z\in M$. Из утверждения 4.2 в [2] вытекает, что $A_{0,n}$ непрерывно отображает $\mathcal{F}_M^{pq}$ в себя. Определим оператор $L_{z,n}\colon \mathcal{F}^{pq}\to\mathcal{F}^{pq}$ формулой $L_{z,n}=A_{z,n}-e^{\lambda_z}\overline{A}_{z,n}$, где $\overline{A}_{z,n}g=\nu_z(g)h_z$ — проектор из теоремы 7.1. Тогда лемма 4.6 из [2] в рассматриваемой ситуации принимает следующую форму.

Теорема 7.2. *В условиях теоремы 7.1 семейства $h=\{h_z\}$ и $\nu=\{\nu_z\}$ можно выбрать таким образом, что $h\in\mathcal{F}_M^{1,N-2}$, а ν определяет $C(M)$-линейный функционал $\nu\colon\mathcal{F}_M^{N-3,2}\to$ $\to C(M)$, непрерывно отображающий каждое пространство $\mathcal{F}_M^{pq}$ в $C^{q-2}(M)$. Существуют такие числа C и $\Lambda\in(0,1)$, что при всех $|k|\le q-1$ и натуральных m норма оператора $\partial^{|k|}[L_{z,n}]^m/\partial z^k\colon\mathcal{F}_0^{pq}\to\mathcal{F}_0^{p+|k|,q-|k|}$ не превосходит $C\Lambda^m e^{m\lambda_z}$.*

Следствие 7.2.1. *Семейство $\lambda=\{\lambda_z\}$, где $\lambda_z=\ln\nu_z(A_{z,n}h_z)$ взято из теоремы 7.1, принадлежит пространству $C^{N-4}(M)$.*

Действительно, семейства $h=\{h_z\}$ и $A_{0,n}h=\{A_{z,n}h_z\}$ принадлежат $\mathcal{F}_M^{1,N-2}$. Поэтому $e^\lambda=\nu(A_{0,n}h)\in C^{N-4}(M)$.

Следствие 7.2.2. *При $p\ge1$, $q\ge2$, $p+q\le N-1$ оператор $e^{-\lambda}A_{0,n}$ непрерывно отображает пространство $\mathcal{F}_M^{pq}$ в себя. Последовательность $[e^{-\lambda}A_{0,n}]^m$ сходится к проектору $\overline{A}_{0,n}$, который определяется формулой $\overline{A}_{0,n}g=\nu(g)h$.*

Доказательство. Как уже говорилось, $\mathcal{F}_M^{pq}$ является модулем на $C^{q-2}(M)$, а $A_{0,n}$ непрерывно отображает этот модуль в себя. Очевидно, $q\le N-1-p\le N-2$. Поскольку $e^{-\lambda}\in C^{N-4}(M)$, а функционал $\nu\colon\mathcal{F}_M^{pq}\to C^{q-2}(M)$ непрерывен, операторы $e^{-\lambda}A_{0,n}$ и $\overline{A}_{0,n}$ непрерывны на $\mathcal{F}_M^{pq}$. По построению эти операторы оставляют неподвижной функцию h. Поэтому нам достаточно убедиться, что норма оператора $[e^{-\lambda}A_{0,n}-\overline{A}_{0,n}]^m$ стремится к нулю при $m\to\infty$. Обозначим через L_n оператор, переводящий всякую слоистую функцию $g=\{g_z\}\in\mathcal{F}_M^{pq}$ в $f=\{f_z\}$, где $f_z=L_{z,n}g_z$. Тогда $e^{-\lambda}A_{0,n}-\overline{A}_{0,n}=e^{-\lambda}L_n$. Пусть теперь $f=[e^{-\lambda}L_n]^m g$, где $f=\{f_z\}$ и $g=\{g_z\}$. Дифференцируя по формуле Лейбница, получаем

$$\frac{\partial^{|k|}f_z}{\partial z^k}=\sum_{k_1+k_2+k_3=k}\frac{k!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\,\frac{\partial^{|k_1|}e^{-m\lambda_z}}{\partial z^{k_1}}\,\frac{\partial^{|k_2|}[L_{z,n}]^m}{\partial z^{k_2}}\,\frac{\partial^{|k_3|}g_z}{\partial z^{k_3}}.$$

Из этого равенства, тождества (58) и оценки теоремы 7.2 следует, что $\|f\|_{pq}$ оценивается величиной порядка $m^q\Lambda^m\|g\|_{pq}$. Тем самым следствие доказано.

8. ПОЛУНОРМЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ $\mathcal{F}^{pq}$

Рассмотрим слоистую функцию $h\in\mathcal{F}_M^{1,N-2}$, $C(M)$-линейный функционал $\nu\colon\mathcal{F}_M^{N-3,2}\to$ $\to C(M)$ из теоремы 7.2 и функцию $\lambda\in C^{N-4}(M)$ из следствия 7.2.1. Выберем какое-нибудь семейство прямых стандартных листов $\Gamma_z\sim(y(x),z,\chi,x_0)$. Отнормируем функцию h условием $h(\Gamma_z,1)\equiv1$, а функционал ν условием $\nu(h)\equiv1$. Вместо линейного оператора $A_{0,n}$ рассмотрим оператор $e^{-\lambda}A_{0,n}$. Очевидно, это равносильно замене весовой функции J_0 на $J_0e^{-\lambda/n}$. Для этого оператора выполняются равенства $e^{-\lambda}A_{0,n}h=h$ и $\nu\circ(e^{-\lambda}A_{0,n})=\nu$.

Существует естественный оператор сужения $\pi\colon\mathcal{F}^{pq}\to\mathcal{F}_M^{pq}$, ставящий в соответствие всякой слоистой функции $g\in\mathcal{F}^{pq}$ ее сужение πg на множество прямых стандартных следов. Из определений пространств $\mathcal{F}^{pq}$ и $\mathcal{F}_M^{pq}$ видно, что $\|\pi g\|_{pq}\le\|g\|_{pq}$. Поэтому функционал ν индуцирует непрерывный функционал $\nu\circ\pi$ на $\mathcal{F}^{pq}$.

Напомним, что плотность $\Phi=\Phi(x)$ гладкости $q\le N-1$ называется плавной, если для нее при всех x выполняются неравенства $\|d^i\Phi(x)/dx^i\|\le\beta_{i0}\Phi(x)$, $i=1,\dots,q$. Следовательно, существует такое C, что все плавные плотности удовлетворяют неравенству $\|\Phi\|_q \le C\inf\Phi$. Напомним еще, что в теореме 5.1 константы β_{ik} были выбраны таким образом, что $\beta_{ik} \ge 2$.

Лемма 8.1. *Существует такое большое B_{10}, что для любого стандартного прямого следа (Γ,Φ) с плавной плотностью $\Phi=\Phi(x)$ гладкости $q\in[1,N-1]$ выполняются неравенства*

$$B_{10}^{-1}\|\Phi\|_q \le h(\Gamma,\Phi) \le B_{10}\inf\Phi. \tag{59}$$

Доказательство. Из условия нормировки $h(\Gamma_z,1)\equiv 1$ и утверждения в) теоремы 7.1 вытекает, что $C_0^{-1}\le h(\Gamma,1)\le C_0$. Поэтому в силу положительности h будет $C_0^{-1}\inf\Phi\le$ $\le h(\Gamma,\Phi)\le C_0\sup\Phi$. Из этих неравенств и неравенств $\sup\Phi\le\|\Phi\|_q\le C\inf\Phi$ вытекает (59).

Определение 8.1. Для всякой слоистой функции $g\in\mathcal{F}^{pq}$ определим полунорму $|g|^h_{pq}$ как минимальное число, при котором выполняется следующее условие: если стандартная деформация косых листов $\Gamma_t\sim(y_t(x),z_t(x),\chi,x_0)$ мажорируется парой (v,σ), где $\sigma\in[0,\sigma_0]$, а деформация прямых листов $\overline{\Gamma}_t$ имеет вид $\overline{\Gamma}_t\sim(y_t(x),z_t(x_0),\chi,x_0)$, то для любой плавной плотности $\Phi=\Phi(x)$ гладкости $p+1+|j|$

$$\left|\frac{\partial^{|j|}g(\Gamma_t,\Phi)}{\partial t^j}-\frac{\partial^{|j|}g(\overline{\Gamma}_t,\Phi)}{\partial t^j}\right|\le |g|^h_{pq}\sigma v^j h(\overline{\Gamma}_t,\Phi),\qquad |j|\le q-4. \tag{60}$$

Очевидно, если $p'\ge p$ и $q'\le q$, то $|g|^h_{p'q'}\le|g|^h_{pq}$.

Лемма 8.2. *Для любой слоистой функции $g\in\mathcal{F}^{pq}$ выполняются оценки*

$$B_{10}^{-1}|g|^h_{pq}\le\|g\|_{pq}\le 5B_{10}|g|^h_{pq}+\|\pi g\|_{pq}.$$

Доказательство. Из определения нормы $\|g\|_{pq}$ (точнее, из оценки (26)) и леммы 8.1 следует, что $|g|^h_{pq}\le B_{10}\|g\|_{pq}$. С другой стороны, всякую плотность $\Phi(x)$ гладкости $p+1+|j|$ можно представить как разность двух плавных $\Phi=\Phi_1-\Phi_2$, где $\Phi_1(x)=\Phi(x)+2\|\Phi\|_{p+1+|j|}$ и $\Phi_2=2\|\Phi\|_{p+1+|j|}$. Поэтому из (59) и (60) следует, что

$$\left|\frac{\partial^{|j|}g(\Gamma_t,\Phi)}{\partial t^j}-\frac{\partial^{|j|}g(\overline{\Gamma}_t,\Phi)}{\partial t^j}\right|\le |g|^h_{pq}\sigma v^j\bigl(h(\overline{\Gamma}_t,\Phi_1)+h(\overline{\Gamma}_t,\Phi_2)\bigr)\le|g|^h_{pq}\sigma v^j\cdot 5B_{10}\|\Phi\|_{p+1+|j|}. \tag{61}$$

Сравнивая эту оценку с (26), а определение (57) нормы $\|\pi g\|_{pq}$ с (25), получаем, что $\|g\|_{pq}\le$ $\le 5B_1|g|^h_{pq}+\|\pi g\|_{pq}$.

Лемма 8.3. *Существует такое большое B_{11}, что для любой деформации стандартных прямых листов $\overline{\Gamma}_t\sim(y_t(x),z_t,\chi,x_0)$ и семейства плотностей $\Phi_t(x)$ из мажорируемости $\overline{\Gamma}_t\prec(v,0)$ и оценок*

$$\left\|\frac{\partial^{i+|k|}\Phi_t(x)}{\partial x^i\partial t^k}\right\|\le\beta_{i|k|}v^k\Phi_t(x),\qquad i+|k|\le p+|j|,$$

выполняющихся для некоторого фиксированного мультииндекса j, вытекают неравенства

$$\left|\frac{\partial^{|j|}g(\overline{\Gamma}_t,\Phi_t)}{\partial t^j}\right|\le B_{11}\|\pi g\|_{pq}v^j h(\overline{\Gamma}_t,\Phi_t),\qquad |j|\le q-2.$$

Доказательство. Очевидно, в условиях леммы плотность Φ_t плавная. В силу леммы 8.1 будет $\|\Phi_t\|_{p+|j|}\le B_{10}h(\overline{\Gamma}_t,\Phi_t)$. В оценках (37) леммы 4.6 можно безболезненно заменить $\|g\|_{pq}$ на $\|\pi g\|_{pq}$. Беря в этих оценках $\beta=\sup\beta_{i|k|}\|\Phi_t\|_{p+|j|}$ и заменяя $\|\Phi_t\|_{p+|j|}$ на $B_{10}h(\overline{\Gamma}_t,\Phi_t)$, получаем утверждение леммы 8.3.

Пусть, как и раньше, весовая функция J_0 отделена снизу от нуля. Тогда справедлива следующая

Теорема 8.4. *Существуют такое большое $n \in \mathbb{N}$, такое малое число $\sigma_0 \in (0,\eta]$ и такое большое C, что для любых стандартных деформаций листов $\Gamma_t \sim (y_t(x), z_t(x), \chi, x_0)$ и $\overline{\Gamma}_t \sim (y_t(x), z_t(x_0), \chi, x_0)$ выполняется следующее утверждение. Если стандартные деформации следов $(\Gamma_t', \Phi_t') \subset (\Sigma_0 J_0 e^{-\lambda/n})^n(\Gamma_t, \Phi)$ и $(\overline{\Gamma}_t', \overline{\Phi}_t') \subset (\Sigma_0 J_0 e^{-\lambda/n})^n(\overline{\Gamma}_t, \Phi)$ имеют вид $\Gamma_t' \sim (y_t'(x'), z_t'(x'), \chi', x_0')$ и $\overline{\Gamma}_t' \sim (\overline{y}_t'(x'), z_t(x_0), \chi', x_0')$, а плотность $\Phi = \Phi(x)$ гладкости $p+1+|j|$ является плавной, то для любой слоистой функции $g \in \mathcal{F}^{pq}$ из мажорируемости $\Gamma_t \prec (v,\sigma)$, где $\sigma \in [0,\sigma_0]$, вытекают оценки*

$$\left|\frac{\partial^{|j|} g(\Gamma_t', \Phi_t')}{\partial t^j} - \frac{\partial^{|j|} g(\overline{\Gamma}_t', \overline{\Phi}_t')}{\partial t^j}\right| \le \left(\frac{1}{4}|g|_{pq}^h + C|g|_{p,q-1}^h + C\|\pi g\|_{pq}\right)\sigma v^j h(\overline{\Gamma}_t', \overline{\Phi}_t')$$

при всех $|j| \le q-4$. Если $q=4$, то считается, что в этом неравенстве $|g|_{p,q-1}^h = 0$.

Доказательство. В качестве n можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$(1-b)^n e^{cN\eta} < 1/16, \tag{62}$$

где c — константа из следствия 1.3.1. Рассмотрим гомотопию $\Gamma_{t\tau} \sim (y_t(x), \tau z_t(x) + (1-\tau) z_t(x_0), \chi, x_0)$, где $\tau \in [0,1]$, как деформацию, зависящую от составного параметра (t,τ). По лемме 4.1 из мажорируемости $\Gamma_t \prec (v,\sigma)$ вытекает, что

$$\Gamma_{t\tau} \prec \bigl((v, B_1\sigma), \eta\bigr). \tag{63}$$

Пусть деформация стандартных листов $\Gamma_{t\tau}' \sim (y_{t\tau}'(x'), z_{t\tau}'(x'), \chi', x_0')$ такова, что $\Gamma_{t\tau}' \subset \Sigma_0^n(\Gamma_{t\tau})$. Определим для нее стандартную деформацию прямых листов $\overline{\Gamma}_{t\tau}' \sim (y_{t\tau}'(x'), z_{t\tau}'(x_0'), \chi', x_0')$ и деформацию следов $(\Gamma_{t\tau}', \Phi_{t\tau}') \subset (\Sigma_0 J_0 e^{-\lambda/n})^n(\Gamma_{t\tau}, \Phi)$. В силу следствия 1.3.1

$$\Gamma_{t1}' \prec \bigl(e^{c\sigma} v, (1-b)^n \sigma\bigr), \tag{64}$$

$$\Gamma_{t\tau}' \prec \bigl((e^{c\eta} v, e^{c\eta} B_1 \sigma), (1-b)^n \eta\bigr), \tag{65}$$

откуда

$$\overline{\Gamma}_{t\tau}' \prec \bigl((e^{c\eta} v, e^{c\eta} B_1 \sigma), 0\bigr). \tag{66}$$

А по следствию 5.1.2 (при $\nu = 0$) выполняются оценки

$$\left\|\frac{\partial^{i+|k|+l} \Phi_{t\tau}'(x')}{(\partial x')^i \partial t^k \partial \tau^l}\right\| \le \beta_{i,|k|+l}(C_n v)^k (C_n B_1 \sigma)^l \Phi_{t\tau}'(x'), \qquad i + |k| + l \le p + 1 + |j|. \tag{67}$$

Беря в них $i=0$, $k=0$ и $l=1$, получаем, что $\Phi_{t\tau}' \le e^{\beta_{01} C_n B_1 \sigma} \Phi_{t0}'$ при всех $\tau \in [0,1]$. Выберем σ_0 настолько малым, чтобы при всех $\sigma \in [0,\sigma_0]$ было $e^{\beta_{01} C_n B_1 \sigma} \le 2$. Тогда $\Phi_{t\tau}' \le 2\Phi_{t0}'$ и в силу положительности слоистой функции h справедливо неравенство $h(\overline{\Gamma}_{t\tau}', \Phi_{t\tau}') \le 2h(\overline{\Gamma}_{t\tau}', \Phi_{t0}')$. Из (66), леммы 4.2 и леммы 8.1 вытекает, что

$$\left|\frac{\partial h(\overline{\Gamma}_{t\tau}', \Phi_{t0}')}{\partial \tau}\right| \le B_2 \|h\|_{1,N-2} e^{c\eta} B_1 \sigma \|\Phi_{t0}'\|_2 \le \|h\|_{1,N-2} e^{c\eta} B_1 B_2 \sigma B_{10} h(\overline{\Gamma}_{t\tau}', \Phi_{t0}'),$$

откуда

$$h(\overline{\Gamma}_{t\tau}', \Phi_{t\tau}') \le 2h(\overline{\Gamma}_{t\tau}', \Phi_{t0}') \le 2\exp\bigl(\|h\|_{1,N-2} e^{c\eta} B_1 B_2 B_{10} \sigma\bigr) h(\overline{\Gamma}_{t0}', \Phi_{t0}').$$

Выбирая σ_0 достаточно малым, добьемся, чтобы при всех $\sigma \in [0,\sigma_0]$ из этого неравенства вытекало

$$h(\overline{\Gamma}'_{t\tau}, \Phi'_{t\tau}) \le 4h(\overline{\Gamma}'_{t0}, \Phi'_{t0}). \tag{68}$$

Рассмотрим разность $g(\Gamma'_t,\Phi'_t)-g(\overline{\Gamma}'_t,\overline{\Phi}'_t) = D_1(t)+D_2(t)$, где $D_1(t) = g(\Gamma'_{t1},\Phi'_{t1})-g(\overline{\Gamma}'_{t1},\Phi'_{t1})$ и $D_2(t) = g(\overline{\Gamma}'_{t1},\Phi'_{t1})-g(\overline{\Gamma}'_{t0},\Phi'_{t0})$. Вычислим по отдельности производные от $D_i(t)$. Дифференцируя по формуле Лейбница, получаем

$$\frac{\partial^{|j|} D_1(t)}{\partial t^j} = \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j}\bigl(g(\Gamma'_{t1},\Phi'_{T1})-g(\overline{\Gamma}'_{t1},\Phi'_{T1})\bigr)\bigg|_{T=t} + \sum_{0\ne k\le j} C_j^k \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^{j-k}\partial T^k}\bigl(g(\Gamma'_{t1},\Phi'_{T1})-g(\overline{\Gamma}'_{t1},\Phi'_{T1})\bigr)\bigg|_{T=t}.$$

Применяя к этому равенству оценки (64), (60), (61), получаем неравенство

$$\left|\frac{\partial^{|j|} D_1(t)}{\partial t^j}\right| \le |g|^h_{pq}(1-b)^n\sigma(e^{c\sigma}v)^j h(\overline{\Gamma}'_{t1},\Phi'_{t1}) + \\ + \sum_{0\ne k\le j} C_j^k |g|^h_{p,q-|k|}(1-b)^n\sigma(e^{c\sigma}v)^{j-k}\cdot 5B_{10}\left\|\frac{\partial^{|k|}\Phi'_{t1}}{\partial t^k}\right\|_{p+1+|j-k|}.$$

Подставляя в него оценки (62), (67) и (59), получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^{|j|} D_1(t)}{\partial t^j}\right| \le \left(\frac{1}{16}|g|^h_{pq} + C'|g|^h_{p,q-1}\right)\sigma v^j h(\overline{\Gamma}'_{t1},\Phi'_{t1}) \tag{69}$$

с некоторой константой C', не зависящей от рассматриваемых следов и слоистой функции g. Аналогично, применяя лемму 8.3 и оценки (66), (67), получаем оценку вида

$$\left|\frac{\partial^{|j|} D_2(t)}{\partial t^j}\right| \le \int_0^1 \left|\frac{\partial^{|j|+1} g(\overline{\Gamma}'_{t\tau},\Phi'_{t\tau})}{\partial t^j\partial\tau}\right| d\tau \le C'\|\pi g\|_{pq}\sigma v^j h(\overline{\Gamma}'_{t\tau},\Phi'_{t\tau}). \tag{70}$$

Подставляя (68) в (69), (70), получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j}(D_1(t)+D_2(t))\right| \le \left(\frac14|g|^h_{pq} + 4C'|g|^h_{p,q-1} + 4C'\|\pi g\|_{pq}\right)\sigma v^j h(\overline{\Gamma}'_{t0},\Phi'_{t0}),$$

что и требовалось доказать.

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3

Теорема 9.1. *В условиях теоремы 7.2 существуют такое большое $n\in\mathbb{N}$, такое малое $\sigma_0 \in (0,\eta]$ и такое большое C, что для любой слоистой функции $g\in\mathcal{F}^{pq}$ выполняется неравенство*

$$|e^{-\lambda}A_{0,n}g|^h_{pq} \le \frac12|g|^h_{pq} + C|g|^h_{p,q-1} + C\|\pi g\|_{pq}.$$

Если $q=4$, то считается, что в этом неравенстве $|g|^h_{p,q-1}=0$.

Вначале выведем из этой теоремы теорему 3.3.

А. Пусть π — естественный проектор $\mathcal{F}^{pq}$ на $\mathcal{F}^{pq}_M$, а $\nu\colon \mathcal{F}^{pq}_M \to C^{q-2}(M)$ — функционал из теоремы 7.2. Тогда композиция $\nu\circ\pi$ непрерывно отображает каждое пространство $\mathcal{F}^{pq}$ в $C^{q-2}(M)$. Тем самым доказано утверждение а) теоремы 3.3.

Б. *Существуют такие норма* $\|\cdot\|^{\delta}_{pq}$ *на* $\mathcal{F}^{pq}$, *соизмеримая с* $\|\cdot\|_{pq}$, *и число* $\Lambda\in(0,1)$, *что* $\|e^{-\lambda}A_{0,n}g\|^{\delta}_{pq}\le\Lambda\|g\|^{\delta}_{pq}$ *для всех слоистых функций* $g\in\mathcal{F}^{pq}\cap\ker\nu\circ\pi$.

В силу следствия 7.2.2 последовательность сужений операторов $(e^{-\lambda}A_{0,n})^m$ на $\mathcal{F}^{pq}_M\cap\ker\nu$ сходится к нулевому оператору в равномерной норме. Поэтому существуют такая норма $\|\cdot\|'_{pq}$ на $\mathcal{F}^{pq}_M$, соизмеримая с $\|\cdot\|_{pq}$, и такое число $\Lambda'\in(0,1)$, что $\|e^{-\lambda}A_{0,n}g\|'_{pq}\le\Lambda'\|g\|'_{pq}$ для всех $g\in\mathcal{F}^{pq}_M\cap\ker\nu$.

Определим следующую норму на $\mathcal{F}^{pq}$:

$$\|g\|^{\delta}_{pq}=\sum_{k=4}^{q}\delta^k|g|^h_{pk}+\|\pi g\|'_{pq}.$$

Из леммы 8.2 следует, что она соизмерима с $\|\cdot\|_{pq}$. Из теоремы 9.1 вытекает, что для всех $g\in\mathcal{F}^{pq}\cap\ker\nu\circ\pi$

$$\|e^{-\lambda}A_{0,n}g\|^{\delta}_{pq}\le\sum_{k=4}^{q}\delta^k\left(\frac{1}{2}|g|^h_{pk}+C|g|^h_{p,k-1}+C\|\pi g\|_{pk}\right)+\Lambda'\|\pi g\|'_{pq}\le$$
$$\le\sum_{k=4}^{q}\delta^k\left(\frac{1}{2}+C\delta\right)|g|^h_{pk}+Cq\delta^4\|\pi g\|_{pq}+\Lambda'\|\pi g\|'_{pq}.$$

Теперь достаточно выбрать любое $\Lambda\in(\Lambda',1)$ и такое малое δ, что $\frac{1}{2}+C\delta\le\Lambda$ и одновременно $Cq\delta^4\|\cdot\|_{pq}\le(\Lambda-\Lambda')\|\cdot\|'_{pq}$.

В. *Существует такая слоистая функция* $h\in\mathcal{F}^{1,N-2}$, *что* $e^{-\lambda}A_{0,n}h=h$ *и* $\nu\circ\pi(h)\equiv1$.

Возьмем произвольную слоистую функцию $g\in\mathcal{F}^{1,N-2}$, для которой функция $\nu\circ\pi(g)\in$ $\in C^{N-4}(M)$ отделена снизу от нуля. Тогда слоистая функция $h_0=(\nu\circ\pi(g))^{-1}g$ принадлежит $\mathcal{F}^{1,N-2}$ и $\nu\circ\pi(h_0)\equiv1$. Рассмотрим последовательность $h_m=(e^{-\lambda}A_{0,n})^m h_0$. По построению $\nu\circ\pi\circ e^{-\lambda}A_{0,n}=\nu\circ\pi$. Поэтому $\nu\circ\pi(h_m)\equiv1$ и, следовательно, $h_{m+1}-h_m\in\ker\nu\circ\pi$. В силу утверждения Б последовательность h_m сходится с экспоненциальной скоростью к некоторой слоистой функции $h\in\mathcal{F}^{1,N-2}$. Она и будет искомой.

Г. *Последовательность операторов* $(e^{-\lambda}A_{0,n})^m$ *на* $\mathcal{F}^{pq}$ *сходится к проектору* $(\nu\circ\pi)\otimes h$ *в равномерной операторной норме.*

Это вытекает из того, что всякая слоистая функция $g\in\mathcal{F}^{pq}$ раскладывается в сумму $g=\nu\circ\pi(g)h+(g-\nu\circ\pi(g)h)$, где второе слагаемое принадлежит $\mathcal{F}^{pq}\cap\ker\nu\circ\pi$. Теорема 3.3 доказана.

Займемся доказательством теоремы 9.1. Предположим, что стандартная деформация косых листов $\Gamma_t\sim(y_t(x),z_t(x),\chi,x_0)$ мажорируется парой (v,σ), где $\sigma\in[0,\sigma_0]$, и пусть задана плавная плотность $\Phi=\Phi(x)$ гладкости $p+1+|j|$. Построим стандартную деформацию прямых листов $\overline{\Gamma}_t\sim(y_t(x),z_t(x_0),\chi,x_0)$ и гомотопию $\Gamma_{t\tau}\sim(y_t(x),\,\tau z_t(x)+(1-\tau)z_t(x_0),\,\chi,x_0)$. Будем вычислять значение $(e^{-\lambda}A_{0,n}g)(\Gamma_{t\tau},\Phi)$ тем же способом, что и в разд. 6. В силу формулы (49)

$$(e^{-\lambda}A_{0,n}g)(\Gamma_{t\tau},\Phi)=\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{B}^u_5}\Psi_{lt\tau}(x')g(\Gamma'_{lt\tau}(x'),\Phi'_{t\tau})\,dx',\tag{71}$$

где

$$\Psi_{lt\tau}(x')=\xi_{lt\tau}(x')\frac{\zeta_l(x')}{\overline{\zeta}_{lt\tau}(x')}\rho_{lt\tau}(x'),\qquad(\Gamma'_{lt\tau}(x'),\Phi'_{t\tau})\subset(\Sigma_0J_0e^{-\lambda/n})^n(\Gamma_{t\tau},\Phi).$$

Лемма 9.2. *Существует такое большое B_{12}, не зависящее от Γ_t и $\Gamma'_{lt\tau}(x')$, что для любой слоистой функции $g \in \mathcal{F}^{pq}$ и плавной плотности Φ гладкости $p+1+|j|$ из мажорируемости $\Gamma_t \prec (v,\sigma)$ вытекает оценка*

$$\left|\frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j} g(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0})\right| \le B_{12}\|\pi g\|_{pq} v^j h(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0}), \qquad |j| \le q-2.$$

Доказательство. Очевидно, $\overline{\Gamma}_t \prec (v,0)$. Тогда $\Gamma'_{lt0}(x') \prec (v,0)$ в силу следствия 1.3.1. В силу следствия 5.1.2 выполняются оценки

$$\left\|\frac{\partial^{i+|k|}\Phi'_{t0}(x')}{(\partial x')^i \partial t^k}\right\| \le \beta_{i|k|}(C_n v)^k \Phi'_t(x'), \qquad i+|k| \le p+1+|j|.$$

Поэтому лемма 9.2 вытекает из леммы 8.3.

Представим разность

$$d_l(t,x') = \Psi_{lt1}(x') g(\Gamma'_{lt1}(x'), \Phi'_{t1}) - \Psi_{lt0}(x') g(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0}) \tag{72}$$

в виде суммы трех слагаемых $d_l(t,x') = d_{l1}(t,x') + d_{l2}(t,x') + d_{l3}(t,x')$, где

$$d_{l1}(t,x') = \Psi_{lt0}(x')\big(g(\Gamma'_{lt1}(x'), \Phi'_{t1}) - g(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0})\big),$$

$$d_{l2}(t,x') = \big(\Psi_{lt1}(x') - \Psi_{lt0}(x')\big)\big(g(\Gamma'_{lt1}(x'), \Phi'_{t1}) - g(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0})\big),$$

$$d_{l3}(t,x') = \big(\Psi_{lt1}(x') - \Psi_{lt0}(x')\big) g(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0}).$$

По построению $d_i(t,x') = 0$ при $x' \notin \mathbb{B}_3^u$. Продифференцируем эти слагаемые по отдельности:

$$\frac{\partial^{|j|} d_{l1}(t,x')}{\partial t^j} = \Psi_{lt0}(x') \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j}\big(g(\Gamma'_{lt1}(x'), \Phi'_{t1}) - g(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0})\big) +$$

$$+ \sum_{0 \ne k \le j} C_j^k \frac{\partial^{|k|}\Psi_{lt0}(x')}{\partial t^k} \frac{\partial^{|j-k|}}{\partial t^{j-k}}\big(g(\Gamma'_{lt1}(x'), \Phi'_{t1}) - g(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0})\big),$$

$$\frac{\partial^{|j|} d_{l2}(t,x')}{\partial t^j} = \sum_{k \le j} C_j^k \frac{\partial^{|k|}}{\partial t^k}\big(\Psi_{lt1}(x') - \Psi_{lt0}(x')\big) \frac{\partial^{|j-k|}}{\partial t^{j-k}}\big(g(\Gamma'_{lt1}(x'), \Phi'_{t1}) - g(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0})\big),$$

$$\frac{\partial^{|j|} d_{l3}(x')}{\partial t^j} = \sum_{k \le j} C_j^k \frac{\partial^{|k|}}{\partial t^k}\big(\Psi_{lt1}(x') - \Psi_{lt0}(x')\big) \frac{\partial^{|j-k|}}{\partial t^{j-k}} g(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0})\big).$$

Напомним, что $|g|^h_{pq} \ge |g|^h_{pq'}$ при $q \ge q'$. Применяя к последним трем равенствам теорему 8.4, лемму 6.3 (при $m=0$) и лемму 9.2, получаем оценки вида

$$\left|\frac{\partial^{|j|} d_{l1}(t,x')}{\partial t^j}\right| \le \Psi_{lt0}(x') \left(\frac{1}{4}|g|^h_{pq} + C|g|^h_{p,q-1} + C\|\pi g\|_{pq}\right) \sigma v^j h(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0}) +$$

$$+ \sum_{0 \ne k \le j} C_j^k B_9 v^k (C+1) \left(|g|^h_{p,q-|k|} + \|\pi g\|_{p,q-|k|}\right) \sigma v^{j-k} h(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0}),$$

$$\left|\frac{\partial^{|j|} d_{l2}(t,x')}{\partial t^j}\right| \le \sum_{k \le j} C_j^k B_9 v^j \sigma (C+1) \left(|g|^h_{p,q-|k|} + \|\pi g\|_{p,q-|k|}\right) \sigma v^{j-k} h(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0}),$$

$$\left|\frac{\partial^{|j|} d_{l3}(x')}{\partial t^j}\right| \le \sum_{k \le j} C_j^k B_9 v^k \sigma B_{12} \|\pi g\|_{p,q-|k|} v^{j-k} h(\Gamma'_{lt0}(x'), \Phi'_{t0}).$$

Суммируя их, получаем, что при некотором достаточно большом C'

$$\left|\frac{\partial^{|j|}d_l(t,x')}{\partial t^j}\right| \le \Psi_{lt0}(x')\left(\frac{1}{4}|g|^h_{pq} + C\|\pi g\|_{pq}\right)\sigma v^j h(\Gamma'_{lt0}(x'),\Phi'_{t0}) + \\ + C'\left(|g|^h_{p,q-1} + \sigma|g|^h_{pq} + \|\pi g\|_{pq}\right)\sigma v^j h(\Gamma'_{lt0}(x'),\Phi'_{t0}). \tag{73}$$

Из формулы (71) следует, что

$$\sum_{l=1}^m \int\limits_{\mathbb{B}^u_5} \Psi_{lt0}(x')h(\Gamma'_{lt0}(x'),\Phi'_{t0})\,dx' = (e^{-\lambda}A_{0,n}h)(\overline{\Gamma}_t,\Phi) = h(\overline{\Gamma}_t,\Phi).$$

Функции $\Psi_{lt0}(x')$ неотрицательны, а при некоторых l и x' положительны и отделены от нуля. Поэтому существует такая константа C'', не зависящая от выбора листов Γ_t, $\Gamma'_{lt\tau}(x')$ и плавной плотности Φ, что

$$\sum_{l=1}^m \int\limits_{\mathbb{B}^u_3} h(\Gamma'_{lt0}(x'),\Phi'_{t0})\,dx' \le C''\sum_{l=1}^m \int\limits_{\mathbb{B}^u_5} \Psi_{lt0}(x')h(\Gamma'_{lt0}(x'),\Phi'_{t0})\,dx' = C''h(\overline{\Gamma}_t,\Phi).$$

Наконец, из (71)–(73) следует оценка

$$\left|\frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j}(e^{-\lambda}A_{0,n}g)(\Gamma_t,\Phi) - \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j}(e^{-\lambda}A_{0,n}g)(\overline{\Gamma}_t,\Phi)\right| \le \sum_{l=1}^m \int\limits_{\mathbb{B}^u_5}\left|\frac{\partial^{|j|}d_l(t,x')}{\partial t^j}\right|dx' \le \\ \le \left(\frac{1}{4}|g|^h_{pq} + C\|\pi g\|_{pq}\right)\sigma v^j h(\overline{\Gamma}_t,\Phi) + C'C''(|g|^h_{p,q-1} + \sigma|g|^h_{pq} + \|\pi g\|_{pq})\sigma v^j h(\overline{\Gamma}_t,\Phi).$$

Если $\sigma \in [0,\sigma_0]$ и σ_0 мало, то отсюда вытекает утверждение теоремы 9.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахтин В.И.* Прямой метод построения инвариантной меры на гиперболическом аттракторе // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 5. С. 934–957.
2. *Бахтин В.И.* Случайные процессы, порожденные гиперболической последовательностью отображений. I // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 2. С. 40–72.
3. *Бахтин В.И.* Случайные процессы, порожденные гиперболической последовательностью отображений. II // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 3. С. 184–195.
4. *Боуэн Р.* Методы символической динамики: Сб. статей. М.: Мир, 1979. 245 с.
5. *Песин Я.Б.* Общая теория гладких гиперболических динамических систем // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 2. С. 123–173. (Итоги науки и техники).