МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ПРИЛОЖЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СКМ MATHCAD

Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В.

Гродненский государственный университет, г. Гродно

При изучении темы «Приложение кратных интегралов» в разделе «Дифференциальное исчисление функций многих переменных» у студентов возникают проблемы с визуализацией области на плоскости, которая ограничена кривой, заданной неявно уравнением $f(x, y) = 0$, трехмерных тел и поверхностей. Авторами разработана методика построения таких объектов в системе компьютерной математики Mathcad 14 [1]. При решении задач на плоскости исходную кривую (кривые) записывают в полярных координатах или в параметрическом виде. С помощью инструментария Mathcad строят график функций, находят, если требуется, координаты точек пересечения кривых, затем вычисляют площадь фигуры. В трехмерном случае исходные поверхности записывают в обобщенных полярных координатах. В системе Mathcad строят графики поверхностей и проекцию линии их пересечения. По известным формулам вычисляют объем тела или площадь поверхности.

Пример 1 (№ 3987 [2]). Вычислить площадь области D, ограниченной кривыми $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geq 1$.

Math–Документ

1. Представим исходные кривыев полярных координатах:

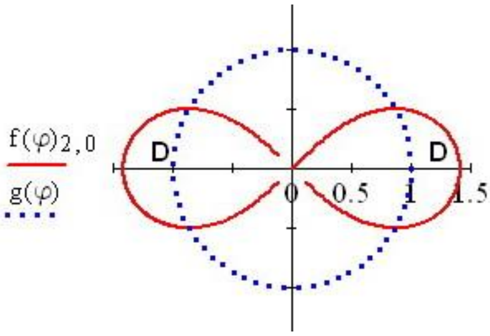
$$f(\varphi) := \left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right) \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = \rho\cdot\cos(\varphi) \\ \text{substitute}, y = \rho\cdot\sin(\varphi) \\ \text{solve}, \rho \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos(2\cdot\varphi)} \\ -\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos(2\cdot\varphi)} \end{pmatrix}$$

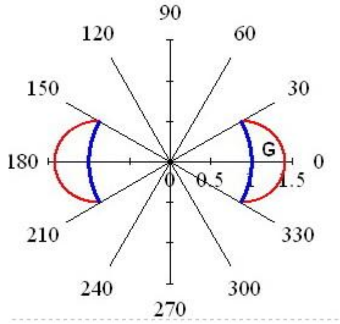
$$g(\varphi) := \left(x^2 + y^2\right) = 1 \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = \rho\cdot\cos(\varphi) \\ \text{substitute}, y = \rho\cdot\sin(\varphi) \\ \text{solve}, \rho \\ \text{assume}, \rho > 0 \end{array} \right. \rightarrow 1$$

2. Находим координаты (ρ_0, φ_0) пересечения кривых в первой четверти:

$$y_0 := \left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right) \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x^2 = 1 - y^2 \\ \text{solve}, y \\ \text{assume}, y > 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} \qquad x_0 := \sqrt{1 - y_0^{\,2}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \varphi_0 := \operatorname{atan}\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

3. Изобразим область D:





4. Вычислим площадь области D, учитывая, что она состоит из четырех одинаковых площадей G, а якобиан преобразования координат равен r:

$$4\cdot\int_{0}^{\varphi_0}\int_{g(\varphi)}^{f(\varphi)_{2,0}} r\,dr\,d\varphi \to \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}=0.685$$

Пример 2 (№ 4023 [2]). Найти объем тела, ограниченного цилиндром $x^2/a^2+y^2/b^2=x/a+y/b$, параболоидом $z=x^2/a^2+y^2/b^2$ и плоскостью $z=0$.

Math–Документ

1. Представим исходные поверхности в обобщенных полярных координатах [2]:

$$a:=2 \qquad b:=3 \qquad x(r,\varphi):=a\cdot r\cdot\cos(\varphi) \qquad y(r,\varphi):=b\cdot r\cdot\sin(\varphi)$$

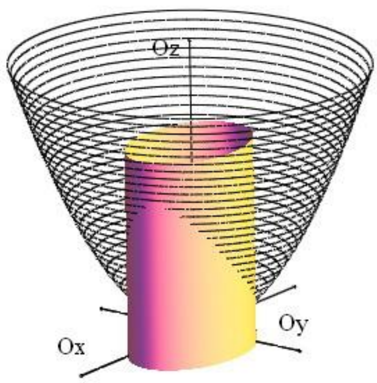
$$z(r,\varphi):=\frac{x(r,\varphi)^2}{a^2}+\frac{y(r,\varphi)^2}{b^2}\ \text{simplify}\ \to r^2$$

$$g1:=\mathrm{CreateMesh}(x,y,z,0,0.8,0,2\cdot\pi,100)$$

$$\rho(\varphi):=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, x=a\cdot\rho\cdot\cos(\varphi)\\ \text{substitute}, y=b\cdot\rho\cdot\sin(\varphi)\\ \text{solve}, \rho\\ \text{simplify}\\ \text{assume}, \rho>0\end{array}\right. \to \cos(\varphi)+\sin(\varphi)$$

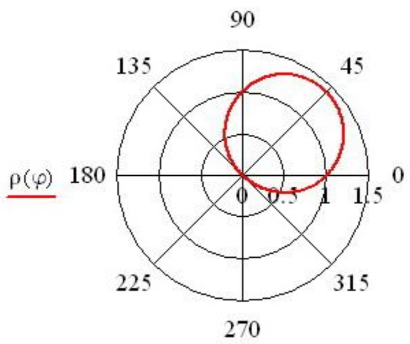
$$f2(\alpha,z):=\begin{pmatrix}\rho(\alpha)\\ \alpha\\ z\end{pmatrix} \qquad g2:=\mathrm{CreateMesh}(f2,0,2\cdot\pi,0,0.5,150,\mathrm{cyl2xyz})$$

2. Построим геометрическую интерпретацию задачи:



3. Построим на плоскости *Oxy* проекцию кривой пересечения исходных поверхностей:

$$\varphi 1 := \frac{-\pi}{4} \qquad \varphi 2 := \frac{3\pi}{4} \qquad \varphi := \varphi 1, \varphi 1 + 0.01 .. \varphi 2$$



4. Вычислим якобиан преобразования координат и объем тела, заключенного между указанными поверхностями:

$$Jc(r,\varphi) := \left| Jacob\left[\begin{pmatrix} x(u_0,u_1) \\ y(u_0,u_1) \end{pmatrix}, u\right] \right| \begin{array}{l} substitute, u_0 = r \\ substitute, u_1 = \varphi \end{array} \rightarrow 6\cdot r$$

$$V := \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \int_0^{\rho(\varphi)} |Jc(r,\varphi)| \cdot z(r,\varphi)\, dr\, d\varphi \rightarrow 7.0685834705770345$$

Литература

1. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14 / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – Ч. 1. – 287 с.

2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович.– М.: Наука, 1969. – 544 с.