УДК 517.937 + 517.956.32

Граничные задачи для полных квазигиперболических дифференциальных уравнений чётных порядков с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов

Ломовцев Ф.Е.

Полные квазигиперболические дифференциально-операторные уравнения чётных порядков с постоянными областями определения изучались в [1, 2]. Квазигиперболические дифференциально-операторные уравнения чётных порядков с переменными областями определения в случае двухчленной главной части рассматривались в [3]. Полные гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с переменными областями определения исследованы в [4, 5]. В настоящей работе изучаются полные квазигиперболические дифференциально-операторные уравнения чётных порядков с переменными областями определения. В ней обобщаются и улучшаются результаты всех предыдущих работ автора по корректной разрешимости в сильном смысле гиперболических (второго порядка) и квазигиперболических (высших четных порядков) дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения. В приложениях к краевым задачам такими уравнениями являются гиперболические уравнения в частных производных с гладко зависящими от времени коэффициентами в уравнениях и в граничных условиях [3], сингулярные гиперболические уравнения в частных производных [4] и "гиперболические" уравнения в частных производных переменных высших порядков по пространственным переменным, приведенные в конце настоящей работы.

1. Постановка задач. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$ рассматриваются граничные задачи:

$$L_m(\lambda_m)u \equiv (-1)^{m-1}\frac{d^{2m}u}{dt^{2m}} + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{d^k}{dt^k}A_{2k+1}(t)\frac{d^{k+1}u}{dt^{k+1}} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{d^k}{dt^k}A_{2k}(t)\frac{d^k u}{dt^k} + \lambda_m A_0(t)u = f,\ t\in]0,T[, \tag{1}$$

$$\left(d^i u/dt^i\right)\big|_{t=0} = \left(d^j u/dt^j\right)\big|_{t=T} = 0,\ 0\leqslant i\leqslant m,\ 0\leqslant j\leqslant m-2,\ m=1,2,\dots, \tag{2}$$

где u и f — функции переменной t со значениями в H, $A_s(t),\ t\in[0,T]$, — линейные неограниченные замкнутые операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_s(t)),\ s=\overline{0,2m-1}$, и $\lambda_m\geqslant 1$ — числовой параметр.

На эти операторы $A_s(t), s\geq 0$, налагаются следующие условия.

I. При всех $t\in[0,T]$ операторы $A_0(t)$ самосопряжены в H, удовлетворяют неравенству $(A_0(t)u,u)\geqslant c_0(t)|u|^2\ \forall u\in D(A_0(t)),\ c_0(t)>0$, и их обратные $A_0^{-1}(t)\in\mathcal{B}([0,T],\ \mathcal{L}(H))$— множество всех ограниченных по $t\in[0,T]$ и по норме линейных непрерывных операторов в $\mathcal{L}(H)$, имеют в H сильную производную по t [6, С. 22] $dA_0^{-1}(t)/dt\in\mathcal{B}([0,T],\ \mathcal{L}(H))$, для которой выполняется неравенство

$$-\left((dA_0^{-1}(t)/dt)g,g\right)\leqslant c_0^{(1)}(A_0^{-1}(t)g,g)\ \forall g\in H. \tag{3}$$

Для формулировки ограничений на $A_s(t), s>0$, введём необходимые пространства. Известно [6], что при каждом $t\in[0,T]$ для $A_0(t)$ определены дробные степени $A_0^{\gamma}(t),\ |\gamma|\leqslant 1$, с областями определения $D(A_0^{\gamma}(t))$. Наделяя $D(A_0^{\alpha/2m}(t))$ эрмитовыми нормами $|v|_{\alpha,t}=|A_0^{\alpha/2m}(t)v|$, получим гильбертовы пространства $W^{\alpha}(t),\ |\alpha|\leqslant 2m,\ W^0(t)=H$.

II. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $dA_0^{-1}(t)/dt$ имеют в H сильные производные по t $d^jA_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, $2 \leqslant j \leqslant m+1$, удовлетворяющие неравенствам

$$|((d^jA_0^{-1}(t)/dt^j)g,\upsilon)| \leqslant c_0^{(j)}|g|_{-(m+1-j),t}|\upsilon|_{-m,t}\ \forall g,\upsilon \in H. \tag{4}$$

III. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $A_s(t) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(W^{2m-s}(t),H))$, $s > 0$, удовлетворяют

$$|(A_s(t)u,\upsilon)| \leqslant c_s|u|_{m-[(s+1)/2],t}|\upsilon|_{m-[s/2],t}\ \forall u,\upsilon \in D(A_0(t)), \tag{5}$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа, и имеют сильные производные по t [7] $d^iA_s(t)/dt^i \in \mathcal{B}([0,T],$ $\mathcal{L}(W^{2m-s+\tau}(t),H))$, $\tau > 0$, $1 \leqslant i \leqslant [s/2]$, $s > 0$. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $A_{2k}(t)$, $k = \overline{1,m-1}$, симметричны на $D(A_0(t))$ в H и для $A_s(t), s > 0$,

$$(-1)^{[(s+1)/2]}Re((d^iA_s(t)/dt^i)u,u) \leqslant c_s^{(i)}|u|^2_{m-[(s+1)/2],t}\ \forall u \in D(A_0(t)), \tag{6}$$

где $i = 1$ для $s = 2k$, $k = \overline{1,m-1}$, и $i = 0$ для $s = 2k+1$, $k = \overline{0,m-1}$.

В [7] предложено следующее понятие сильной производной по параметру t от переменных неограниченных операторов $A(t)$ с переменными областями определения $D(A(t))$ в H.

Определение 1. Операторы $A(t)$ назовем *сильно дифференцируемыми по t в $t_0 \in [0,T]$ на* $u(t_0) \in D(A(t_0))$, если $\exists u(t) \in D(A(t)), t \neq t_0$, такие, что существуют производные $u'(t_0) = \lim\limits_{\triangle t \to 0}\{(u(t_0+\triangle t)-u(t_0))/\triangle t\} \in D(A(t_0))$, $h'(t_0) = \lim\limits_{\triangle t \to 0}\{(A(t_0+\triangle t)u(t_0+\triangle t)-A(t_0)u(t_0))/\triangle t\}$ $\in H$ в сильном смысле в H и пределы $u'(t_0)$ и $h'(t_0)$ не зависят от выбора $u(t)$. *Значением сильной производной $A'(t_0)$ операторов $A(t)$ в t_0 на $u(t_0)$* назовем $A'(t_0)u(t_0) = h'(t_0) - A(t_0)u'(t_0)$. Совокупность всех таких $u(t_0)$ образует область определения $D(A'(t_0)) \subset D(A(t_0))$ оператора производной $A'(t_0)$). Операторы $A(t)$ назовем *сильно дифференцируемыми по t в $[0,T]$ на* $D(A'(t))$, если они сильно дифференцируемы по t в $\forall t_0 \in [0,T]$ и на $\forall u(t_0) \in D(A'(t_0))$.

IV. При каждом $t \in [0,T]$ все операторы $A_s(t), s > 0$, удовлетворяют неравенствам

$$|(A_s(t)A_0^{-1}(t)g,\upsilon)| \leqslant \tilde{c}_s^{(0)}|g|_{-[(s+1)/2],t}|\upsilon|_{-[s/2],t}\ \forall g,\upsilon \in H, \tag{7}$$

включению $A_s(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, $1 \leqslant j \leqslant [(s+1)/2]$, и неравенствам

$$|(A_s(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j)g,\upsilon)| \leqslant \tilde{c}_s^{(j)}|g|_{-[(s+1)/2]+j,t}|\upsilon|_{-[s/2]-1,t}\ \forall g,\upsilon \in H, 1 \leqslant j \leqslant [(s+1)/2], \tag{8}$$

а каждый оператор $A_s(t)$, $s > 0$, удовлетворяет либо неравенству (8) при $j = 1$, либо неравенству

$$|(A_s(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g,\upsilon)| \leqslant \tilde{c}_s^{(1)}|g|_{-[(s-1)/2],t}|\upsilon|_{-[s/2],t}\ \forall g,\upsilon \in H, \tag{9}$$

неравенству (8) при $j = 2$ с правой частью $\tilde{c}_s^{(j)}|g|_{-[(s+1)/2]+1,t}|\upsilon|_{-[s/2],t}$, включению $(dA_s(t)/dt)(dA_0^{-1}(t)/dt) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, неравенству

$$|((dA_s(t)/dt)(dA_0^{-1}(t)/dt)g,\upsilon)| \leqslant \bar{c}_s^{(1)}|g|_{-[(s-1)/2],t}|\upsilon|_{-[s/2],t}\ \forall g,\upsilon \in H, \tag{10}$$

в случае $s = 2k > 0$ еще неравенству

$$(-1)^kRe(A_{2k}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g,g) \leqslant \bar{c}_{2k}^{(0)}|g|^2_{-k,t}\ \forall g \in H \tag{11}$$

и в случае $s = 2k+1 > 0$ операторы $A_{2k+1}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)$ симметричны на $D(A_{2k+1}(t))$ в H. При каждом $t \in [0,T]$ для операторов $A_{2k}(t), k = \overline{1,m-1}$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned}(-1)^kRe[(A_{2k}(t)u,A_0(t)\upsilon) - (A_0(t)u,A_{2k}(t)\upsilon)] \leqslant \\ \tilde{c}_{2k}|u|_{2m-k-1,t}|\upsilon|_{2m-k,t}\ \forall u,\upsilon \in D(A_0(t)).\end{aligned} \tag{12}$$

и для операторов $A_{2k+1}(t), k = \overline{0,m-1}$, выполняются неравенства

$$(-1)^{k+1}Re(A_{2k+1}(t)u,A_0(t)u) \leqslant \tilde{c}_{2k+1}|u|^2_{2m-k-1,t}\ \forall u \in D(A_0(t)). \tag{13}$$

В неравенствах (3)-(13) все постоянные $c_0^{(j)}, c_s, c_s^{(i)}, \tilde{c}_s^{(j)}, \bar{c}_s^{(i)}, \tilde{c}_s \geq 0$ не зависят от g, u, v и t.

Граничная задача (1),(2) при $m = 1$ является задачей Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка, корректная разрешимость которой при $\lambda_1 = 1$ доказана в [4, 5]. В настоящей работе докажем корректную разрешимость в сильном смысле граничных задач (1),(2) при $\lambda_m \geq \tilde{\lambda}_m$ в случае полных уравнений высших порядков. Доказательства проводятся модификацией и обобщением известного метода энергетических неравенств работы [8], в отличие от которой сначала выводятся априорные оценки сильных решений задач (1),(2) с помощью сглаживающих операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$ и затем устанавливается плотность множеств значений операторов задач (1),(2) в пространствах правых частей с помощью леммы 8. Обращаем внимание на то, что в (1) входят только главные члены уравнений и корректность граничных задач для уравнений с дополнительными младшими членами обсуждается в замечании 2.

2. Прелюдия задач. В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения. О непрерывности производной $dA^{-1}(t)/dt$ в соответствующей паре гильбертовых шкал пространств $\{W^q(t)\},\ |q| \leqslant 2m$, говорит следующая

Л е м м а 1. *Пусть $A(t)$ — линейные самосопряжённые положительные операторы в гильбертовом пространстве H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$. Если их обратные $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H))$ при $\forall t$ имеют в H сильную производную $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H, W^{2m(1-\beta)}(t))) \bigcap \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(W^{-2m}(t), W^{-2m\beta}(t))),\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1$, то*

$$|A^{1-\beta-\alpha}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{\alpha}(t)x| \leqslant \mathcal{M}|x| \ \forall x \in D(A^{\alpha}(t)),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{14}$$

где $\mathcal{M} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\{||A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)||_{\mathcal{L}(H)}, ||\overline{A^{-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)}||_{\mathcal{L}(H)}\}$ *и черта сверху означает замыкание операторов по непрерывности в H.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операторы $\mathcal{A} = \mathcal{B} = A^{\beta-1}(t)$ и $\mathcal{T} = A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)$ в $H_1 = H$ при всех t удовлетворяют замечанию 7.1 из [6, С. 177-179] и, в частности, неравенству $|\mathcal{B}\ \mathcal{T}x| \leq \mathcal{M}|\mathcal{A}\ x|\ \forall x \in H$. Применяя к ним неравенство Гайнца (7.6) из [6, С. 178] получим оценки (14) при всех t и всех $0 \leq \alpha \leq 1-\beta$. Операторы $\mathcal{A} = \mathcal{B} = A^{\beta}(t)$ и $\mathcal{T} = A^{-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)$ также удовлетворяют этому замечанию 7.1 и, аналогично применяя к ним неравенство Гайнца (7.6) из [6, С. 178], получим оценки (14) при всех t и всех $1-\beta \leq \alpha \leq 1$. Лемма 1 доказана.

Имеет место следующее обобщение теоремы Далецкого [6, С. 231] на самосопряжённые операторы с переменными областями определения.

Л е м м а 2. *В предположениях леммы 1 операторы $A^{-\gamma}(t),\ \beta \leqslant \gamma < 1$, при каждом $t \in [0,T]$ имеют в H сильную производную*

$$\frac{dA^{-\gamma}(t)}{dt} = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi}\int_0^{+\infty} s^{-\gamma}A(t)R(-s)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)R(-s)ds,\ \beta \leqslant \gamma < 1,\ R(-s) = (A(t)+s)^{-1},$$

$$|A^{\gamma-\beta}(t)(dA^{-\gamma}(t)/dt)x| \leqslant \mathcal{M}_\gamma|x| \ \forall x \in H,\ \beta \leqslant \gamma < 1, \tag{15}$$

$$|A^{-\beta}(t)(dA^{-\gamma}(t)/dt)A^{\gamma}(t)x| \leqslant \mathcal{M}_\gamma|x| \ \forall x \in D(A^{\gamma}(t)), \beta \leqslant \gamma < 1. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегральное представление производной $dA^{-\gamma}(t)/dt$ получается дифференцированием интегрального представления отрицательных дробных степеней $A^{-\gamma}(t)$ [6, С. 137] для $\gamma > \beta$ в силу $dR(-s)/dt = A(t)R(-s)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)R(-s)$, оценок $||A^{\beta}(t)R(-s)||_{\mathcal{L}(H)} \leq N_\beta/(1+s)^{1-\beta}$, $s > 0$, $0 \leq \beta < 1$, и ограниченности операторов $A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)$ и для $\gamma = \beta$ в силу ниже доказанных оценок (15).

Если $Q = A^{\gamma}(t)R(-s)A^{1-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A(t)R(-s)$ и $x, y \in D(A(t))$, то при всех t

$$|(Qx, y)| = |(A^{1-\beta-\frac{1-\gamma}{2}}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)R(-s)x,\ A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)R(-s)y)| \leqslant$$

$$||\overline{A^{1-\beta-\frac{1-\gamma}{2}}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)}||_{\mathcal{L}(H)}|A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)R(-s)x||A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)R(-s)y|,$$

где черта сверху означает замыкание операторов по непрерывности в H. Здесь воспользуемся неравенствами (14) для $\alpha \leq 1-\beta$, спектральным разложением операторов $A(t)$ и по аналогии с [6, С. 230] придём к оценкам (15) с постоянными $\mathcal{M}_\gamma = \mathcal{M}c_\gamma$, где $c_\gamma = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{-\gamma}}{(1+\sigma)^2}d\sigma$.

Если $Q = A(t)R(-s)A^{-\beta}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{1+\gamma}(t)R(-s)$ и $x, y \in D(A(t))$, то при всех t

$$|(Qx, y)| = |(A^{-\beta+\frac{1-\gamma}{2}}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)R(-s)x,\ A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)R(-s)y)| \leqslant$$

$$||\overline{A^{-\beta+\frac{1-\gamma}{2}}(t)(dA^{-1}(t)/dt)A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)}||_{\mathcal{L}(H)}|A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)R(-s)x||A^{\frac{1+\gamma}{2}}(t)R(-s)y|,$$

где черта сверху означает замыкание операторов по непрерывности в H. Здесь воспользуемся неравенствами (14) для $0 \leq \alpha \leq 1$, спектральным разложением операторов $A(t)$ и по аналогии с [6, С. 230] придём к оценкам (16). Лемма 2 доказана.

Производная $dA^{-\gamma}(t)/dt$ так же непрерывна в подходящей паре гильбертовых шкал пространств $\{W^q(t)\},\ |q| \leqslant 2m$.

Л е м м а 3. *В предположениях леммы 1 при каждом* $t \in [0, T]$

$$|A^{\gamma-\beta-\alpha}(t)(dA^{-\gamma}(t)/dt)A^{\alpha}(t)x| \leqslant \mathcal{M}_\gamma|x|\ \forall x \in D(A^{\alpha}(t)),\ \beta \leqslant \gamma < 1,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании оценок (15) и (16) достаточно применить лемму 1 к операторам $A^{\gamma}(t)$ вместо операторов $A(t)$. Лемма 3 доказана.

При доказательстве разрешимости граничных задач (1),(2) нам понадобятся интерполяционные неравенства в отрицательной гильбертовой шкале пространств $\{\mathcal{H}^q\},\ -m \leqslant q \leqslant 0$, где $\mathcal{H}^q = L_2(]0, T[, W^q(t))$, с эрмитовыми нормами $||\cdot||_q$. Пространство $\mathcal{H}^q$ — множество всех функций $u : [0, T] \ni t \to u(t) \in H$, для которых $u(t) \in D(A^{q/2m}(t)), t \in [0, T]$, и функции $h(t) = A^{q/2m}(t)u(t) \in \mathcal{H}^0 = \mathcal{H} = L_2(]0, T[, H)$.

Л е м м а 4. *В предположениях леммы 1 при* $\beta = 1/2m$ *для* $\forall w \in \mathcal{W}^m$ *(множества* $\mathcal{W}^m$ *указаны в начале доказательства теоремы 2 четвёртого пункта) справедливы неравенства*

$$\left|\left|\frac{d^i w}{dt^i}\right|\right|^2_{-i} \leqslant \tau \left|\left|\frac{d^m w}{dt^m}\right|\right|^2_{-m} + c^{(i)}_{2m}(\tau)||w||^2_0,\ \tau > 0,\ 0 < i < m, \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\int_0^T (T-t)\left|\frac{d^i w}{dt^i}\right|^2_{-i,t} dt \leqslant \tau \int_0^T (T-t)\left|\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2_{-m,t} dt + \tilde{c}^{(i)}_{2m}(\tau)\int_0^T (T-t)|w|^2 dt,\\ \tau > 0,\ 0 < i < m,\end{gathered} \tag{19}$$

где постоянные $c^{(i)}_{2m}(\tau),\ \tilde{c}^{(i)}_{2m}(\tau) > 0$ *не зависят от* w *и* t.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценки (18) и (19) устанавливаются индукцией по i с помощью интегрирования по частям, оценок (17) и δ-неравенства: $2ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1}b^2, \forall \delta > 0$.

При выводе априорных оценок решений граничных задач (1),(2) нам понадобятся интерполяционные неравенства в положительной гильбертовой шкале пространств $\{\mathcal{H}^q\},\ 0 \leqslant q \leqslant m$, порождённой самосопряженными операторами с переменными областями определения.

Л е м м а 5. *В предположениях леммы 1 при* $\beta = 1/2m$ *для* $\forall u \in E^m$ *(пространства* E^m *определены в самом начале третьего пункта) справедливы неравенства*

$$\left|\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|\right|_{m-i}^2 \leqslant \tau \left|\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|\right|_0^2 + c_{2m+1}^{(i)}(\tau)||u||_m^2,\ \tau > 0,\ 0 < i < m, \tag{20}$$

$$\int_0^T (T-t)\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{m-i,t}^2 dt \leqslant \tau \int_0^T (T-t)\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|^2 dt + \tilde{c}_{2m+1}^{(i)}(\tau)\int_0^T (T-t)|u|_{m,t}^2 dt, \tag{21}$$
$$\tau > 0,\ 0 < i < m,$$

где постоянные $c_{2m+1}^{(i)}(\tau),\ \tilde{c}_{2m+1}^{(i)}(\tau) > 0$ *не зависят от* u *и* t.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\forall\varepsilon > 0$ операторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t) = A(t)(I+\varepsilon A(t))^{-1}$ с областями определения $D(\mathcal{A}_\varepsilon(t)) = H$ ограничены, самосопряжены и положительны в H. Непосредственно проверяется, что при всех t

$$||\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)||_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \mathcal{M},\ ||\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)||_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \mathcal{M}. \tag{22}$$

Применяя неравенство Гайнца (7.6) из [6, С. 178] к операторам $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{A}_\varepsilon^{\beta-1}(t)$ и $\mathcal{T} = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)$, при всех t получаем

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\alpha}(t)x| \leqslant \mathcal{M}|x|\ \forall x \in H, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1-\beta. \tag{23}$$

Дифференцируя интегральное представление положительных дробных степеней $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$ [6, С. 140], при всех t имеем

$$\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)}{dt}x = \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int_0^{+\infty} s^\gamma R_\varepsilon(-s)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)R_\varepsilon(-s)x ds\ \forall x \in D(A(t)), 0 < \gamma < 1-\beta,$$

где $R_\varepsilon(-s) = (\mathcal{A}_\varepsilon(t)+s)^{-1}$. Если $Q = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)R_\varepsilon(-s)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)R_\varepsilon(-s)$ и $x, y \in D(A(t))$, то при всех t

$$|(Qx,y)| = |(\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\frac{1-\gamma}{2}}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\frac{1-\gamma}{2}}(t)\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)x, \mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)y)| \leqslant$$

$$\left|\left|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\frac{1-\gamma}{2}}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\frac{1-\gamma}{2}}(t)\right|\right|_{\mathcal{L}(H)} |\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)x||\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)y|.$$

Отсюда, применяя оценки (23) для $\gamma \geqslant 2\beta - 1$ и спектральные разложения операторов $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, при всех t получаем неравенства

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)x| \leqslant \mathcal{M}_{-\gamma}|x|\ \forall x \in H,\ \beta \leqslant \gamma \leqslant 1-\beta. \tag{24}$$

Если $Q = \mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)R_\varepsilon(-s)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)R_\varepsilon(-s)$ и $x, y \in D(A(t))$, то при всех t

$$|(Qx,y)| = |(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\frac{1-\gamma}{2}}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\frac{1-\gamma}{2}}(t)\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)x,\ \mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)y)| \leqslant$$

$$||\mathcal{A}_\varepsilon^{-1+\frac{1-\gamma}{2}}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\frac{1-\gamma}{2}}(t)||_{\mathcal{L}(H)}|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)x||\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}(t)R_\varepsilon(-s)y|.$$

Отсюда, применяя оценки (23) для $\gamma \geqslant 2\beta - 1$ и спектральные разложения операторов $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, при всех t получаем неравенства

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta}(t)x| \leqslant \mathcal{M}_{-\gamma}|x|\ \forall x \in H,\ \beta \leqslant \gamma \leqslant 1-\beta. \tag{25}$$

В силу оценок (24) и (25),операторы $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$ удовлетворяют неравенствам (22) с постоянными $\mathcal{M}_{-\gamma}$ вместо $\mathcal{M}_\gamma$ и, следовательно, $\forall t$ выполняются неравенства (23) с $\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)$ вместо $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$:

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^\gamma(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma+\alpha}(t)x| \leqslant \mathcal{M}_{-\gamma}|x| \ \forall x\in H,\ \beta\leqslant\gamma\leqslant 1-\beta,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\gamma-\beta. \qquad (26)$$

Операторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ удовлетворяют половине предположений лемм 2 и 3, т.е. при всех t $||\mathcal{A}_\varepsilon^{1-\beta}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^{-1}(t)/dt)||_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \mathcal{M}$ и, следовательно,

$$\frac{d\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)}{dt} = \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int_0^{+\infty} s^{-\gamma}\mathcal{A}_\varepsilon(t)R_\varepsilon(-s)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\mathcal{A}_\varepsilon(t)R_\varepsilon(-s)ds,\ \beta\leqslant\gamma<1,$$

для $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ выполняются неравенства (15) и соответствующая им половина неравенств (17):

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^{\gamma-\beta-\alpha}(t)(d\mathcal{A}_\varepsilon^{-\gamma}(t)/dt)\mathcal{A}_\varepsilon^{\alpha}(t)x| \leqslant \mathcal{M}_\gamma|x| \ \forall x\in H,\ \beta\leqslant\gamma<1,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\gamma-\beta. \qquad (27)$$

С помощью интегрирования по частям, оценок (26) и (27), неравенства Шварца и δ-неравенства индукцией по i для $\forall u\in D(L_m)$ устанавливаются неравенства

$$\left|\left|\mathcal{A}_\varepsilon^{\frac{m-i}{2m}}(t)\frac{d^iu}{dt^i}\right|\right|_0^2 \leqslant \tau\left|\left|\frac{d^mu}{dt^m}\right|\right|_0^2 + c_{2m+1}^{(i)}(\tau)||\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(t)u||_0^2,\ \tau>0,\ 0<i<m,$$

где постоянные $c_{2m+1}^{(i)}(\tau)>0$ не зависят от u,ε и t. Устремив здесь $\varepsilon\to0$, согласно известному из [9] свойству (29), получим неравенства (17), которые затем распространяются предельным переходом с множеств $D(L_m)$, указанных в самом начале третьего пункта, на E^m.

Неравенства (21) доказываются аналогично. Лемма 5 доказана.

3. Однозначность задач. Сначала введём пространства и дадим определение сильных решений. В качестве пространств сильных решений граничных задач (1),(2) возьмём гильбертовы пространства E^m — пополнения множеств

$$D(L_m) = \{u\in\mathcal{H}: u(t)\in D(A_0(t)), t\in]0,T[; \frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, \frac{d^su}{dt^s}, \frac{d^{[s/2]}}{dt^{[s/2]}}A_s(t)\frac{d^{[(s+1)/2]}u}{dt^{[(s+1)/2]}}\in\mathcal{H}, 0\leqslant s\leqslant 2m-1;$$
$$\frac{d^ku}{dt^k}\in\mathcal{H}^{m-k}, 1\leqslant k\leqslant m-1; (d^iu/dt^i)|_{t=0} = (d^ju/dt^j)|_{t=T} = 0, 0\leqslant i\leqslant m, 0\leqslant j\leqslant m-2\}$$

по эрмитовым нормам $|||u|||_m = (||d^mu/dt^m||_0^2 + ||u||_m^2)^{1/2}$. В качестве пространств правых частей уравнений (1) возьмём банаховы пространства $\hat{F}^{-(m-1)}$ — пополнения множества $\mathcal{H}$ по нормам

$$\langle||f||\rangle_{-(m-1)} = \sup_{v\in\hat{E}^{m-1}}\left\{\left|\int_0^T(f,v)dt\right|/\langle||v||\rangle_{m-1}\right\},$$

где гильбертовы пространства $\hat{E}^{m-1}$ — пополнения множеств $\hat{\mathcal{D}}^m = \{v\in\mathcal{H}: d^kv/dt^k\in\mathcal{H}^{m-k}, 0\leqslant k\leqslant m, (d^iv/dt^i)|_{t=0} = (d^iv/dt^i)|_{t=T} = 0, 0\leqslant i\leqslant m-1\}$ по эрмитовым нормам $\langle||v||\rangle_{m-1} = \left(\sum_{k=0}^{m-1}||(T-t)^{-1}d^kv/dt^k||_{m-1-k}^2\right)^{1/2}$. Пространства $\hat{F}^{-(m-1)}$ являются так называемыми негативными пространствами к позитивным пространствам $\hat{E}^{m-1}$ [10]. Граничным задачам (1),(2) соответствуют линейные неограниченные операторы $L_m(\lambda_m): E^m\supset D(L_m)\longrightarrow \hat{F}^{-(m-1)}$ с плотными областями определения $D(L_m)$. В дальнейшем будем предполагать, что множества $\hat{\mathcal{D}}^m$ плотны в $\mathcal{H}$, а здесь ограничимся одним из достаточных условий этой плотности.

Л е м м а 6. *Если обратные операторы $A_0^{-1}(t)\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$ положительных самосопряжённых операторов $A_0(t)$ при всех t имеют в H сильные производные $d^jA_0^{-1}(t)/dt^j\in\mathcal{B}([0,T],$ $\mathcal{L}(H,W^{m-j}(t)))$, $1\leqslant j\leqslant m$, то множества $\hat{\mathcal{D}}^m$ плотны в $\mathcal{H}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о осуществляется стандартным образом и аналогично доказательству леммы 1 в [9].

З а м е ч а н и е 1. Плотность $\hat{\mathcal{D}}^m$ в $\mathcal{H}$ нужна для построения полноценной дуальной пары $\hat{E}^{m-1} \subset \mathcal{H} \subset \hat{F}^{-(m-1)}$ в смысле представления значений функционалов из $\hat{F}^{-(m-1)}$ через скалярное произведение в $\mathcal{H}$. В приложениях к краевым задачам плотность $\hat{\mathcal{D}}^m$ в $\mathcal{H}$ почти всегда имеет место без дополнительных требований гладкости на $A_0^{-1}(t)$, так как множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, как правило, всегда содержится в $\hat{\mathcal{D}}^m$ и, очевидно, плотно в $\mathcal{H}$.

Пусть операторы $L_m(\lambda_m)$ удовлетворяют критерию замыкаемости линейных операторов в банаховых пространствах, т.е. из того, что для $u_n \in D(L_m)$, $u_n \to 0$ в E^m и $L_m(\lambda_m)u_n \to f$ в $\hat{F}^{-(m-1)}$ при $n \to \infty$, следует, что $f = 0$. В дальнейшем будем предполагать замыкаемость операторов $L_m(\lambda_m)$, а здесь ограничимся одним из достаточных условий их замыкаемости.

Л е м м а 7. *Пусть выполняются предположения леммы 5 при $m > 1$ и леммы 6, операторы $A_s(t)$ удовлетворяют неравенствам (5) и производные $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H, W^{2m-j}(t)))$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$. Тогда каждый оператор $L_m(\lambda_m)$ допускает замыкание.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. После интегрирования по частям значение антилинейного непрерывного функционала $f \in (\hat{E}^{m-1})'$ на $\forall v \in \mathcal{D}^m = \{\hat{v} \in \hat{\mathcal{D}}^m : \hat{v}(t) \in D(A_0(t)), t \in [0,T];\ A_0(t)\hat{v} \in \mathcal{H}\}$ равно

$$f(v) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T (L_m(\lambda)u_n, v)dt = \lim_{n\to\infty} \Bigg\{ -\int_0^T \left(\frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^m v}{dt^m} \right) dt +$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T \left(A_{2k+1}(t) \frac{d^{k+1}u_n}{dt^{k+1}}, \frac{d^k v}{dt^k} \right) dt + \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^T \left(A_{2k}(t) \frac{d^k u_n}{dt^k}, \frac{d^k v}{dt^k} \right) dt +$$

$$\lambda_m \int_0^T (u_n, A_0(t)v)dt \Bigg\} = 0, \quad u_n \in D(L_m),$$

в силу неравенств (5) и (20).

Докажем плотность $\mathcal{D}^m$ в $\hat{E}^{m-1}$. Пусть для некоторой $w \in \hat{E}^{m-1}$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T (T-t)^{-2} \left(A_0^{\frac{m-1-k}{2m}}(t) \frac{d^k v}{dt^k}, A_0^{\frac{m-1-k}{2m}}(t) \frac{d^k w}{dt^k} \right) dt = 0 \ \forall v \in \mathcal{D}^m.$$

Здесь полагаем $v = A_\varepsilon^{-1}(t)h = (I + \varepsilon A_0(t))^{-1}h \in \mathcal{D}^m, \varepsilon > 0$, где $d^k h/dt^k \in \mathcal{H}, 0 \leqslant k \leqslant m$, и $(d^i h/dt^i)|_{t=0} = (d^i h/dt^i)|_{t=T} = 0, 0 \leqslant i \leqslant m-1$, распространяем полученные равенства предельным переходом на все $h \in \mathcal{H}$ такие, что $(T-t)^{-1} d^k h/dt^k \in \mathcal{H}, 0 \leqslant k \leqslant m-1$, и $(d^i h/dt^i)|_{t=0} = (d^i h/dt^i)|_{t=T} = 0, 0 \leqslant i \leqslant m-2$, берём $h = w$ и получаем равенства

$$\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T (T-t)^{-2} \left(A_\varepsilon^{-1}(t) A_0^{\frac{m-1-k}{2m}}(t) \frac{d^k w}{dt^k}, A_0^{\frac{m-1-k}{2m}}(t) \frac{d^k w}{dt^k} \right) dt =$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{k} C_k^j \int_0^T (T-t)^{-2} \left(A_0^{\frac{m-1-k}{2m}}(t) \frac{d^j A_\varepsilon^{-1}(t)}{dt^j} \frac{d^{k-j} w}{dt^{k-j}}, A_0^{\frac{m-1-k}{2m}}(t) \frac{d^k w}{dt^k} \right) dt.$$

Здесь и далее символом C_p^j обозначено число сочетаний из p элементов по j. В этих равенствах предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в силу (29) даёт $\langle ||w|| \rangle_{m-1}^2 = 0$, т.е. $w = 0$. Ввиду плотности $\mathcal{D}^m$ в $\hat{E}^{m-1}$, имеем $f = 0$. Лемма 7 доказана.

Затем строим замыкания $\overline{L_m}(\lambda_m) : E^m \supset D(\overline{L_m}) \to \hat{F}^{-(m-1)}$ операторов $L_m(\lambda_m)$. К областям определения $D(\overline{L_m})$ операторов $\overline{L_m}(\lambda_m)$ относим все те функции $u \in E^m$, для каждой из которых существуют такая последовательность $u_n \in D(L_m)$ и такой функционал $f \in \hat{F}^{-(m-1)}$, что $|||u_n - u|||_m \to 0$ и $\langle ||L_m(\lambda_m)u_n - f|| \rangle_{-(m-1)} \to 0$ при $n \to \infty$. При этом полагаем $\overline{L_m}(\lambda_m)u = \lim\limits_{n\to\infty} L_m(\lambda_m)u_n = f$.

Определение 2. Решения операторных уравнений $\overline{L_m}(\lambda_m)u = f, f \in \hat{F}^{-(m-1)}, m = 1, 2, \dots,$ называются *сильными решениями граничных задач (1),(2).*

Теперь выведем априорные оценки этих сильных решений.

Т е о р е м а 1. *Если выполняются условия I и III, производная* $dA_0^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T],$ $\mathcal{L}(H, W^{2m-1}(t))) \bigcap \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(W^{-2m}(t), W^{-1}(t)))$ *при* $m > 1$, $\hat{\mathcal{D}}^m$ *плотны в* $\mathcal{H}$ *и операторы* $L_m(\lambda_m)$ *допускают замыкания* $\overline{L_m}(\lambda_m)$, *то существуют не зависящие от* u *постоянные* $c_0(m) > 0$ *и множества* $\hat{\Lambda}_1 = [1, +\infty[$ *при* $m = 1$ *и* $\hat{\Lambda}_m = [\hat{\lambda}_m, +\infty[$ *при* $m > 1$, *что*

$$|||u|||_m \leqslant c_0(m)\langle||\overline{L_m}(\lambda_m)u||\rangle_{-(m-1)} \ \forall u \in D(\overline{L_m}), \ \forall \lambda_m \in \hat{\Lambda}_m, \ m = 1, 2, \dots. \tag{28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В H рассмотрим операторы сглаживания $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A_0(t))^{-1}, \varepsilon > 0$, со значениями в $D(A_0(t))$. Они обладают следующими свойствами [9]:

1) ограничены равномерно по ε и t нормы $||A_\varepsilon^{-\alpha}(t)||_{\mathcal{L}(H)} \leqslant 1, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и при $\varepsilon \to 0$

$$||A_\varepsilon^{-\alpha}(t)v - v||_0 \to 0 \ \ \forall v \in \mathcal{H}, \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1; \tag{29}$$

2) операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)$ имеют в H сильную производную $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H))$.

Интегрируя один раз по частям в $L_m(\lambda_m)$ только слагаемое, содержащее $A_0(t)$, получаем тождества

$$\begin{gathered}
2Re\int_0^T e^{c(T-t)}(-1)^{m-1}\left(\frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u\right)dt + \\
2Re\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^T e^{c(T-t)}\left(\left[\frac{d^k}{dt^k}A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + \frac{d^k}{dt^k}A_{2k}(t)\right]\frac{d^k u}{dt^k}, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u\right)dt + \\
2Re\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{du}{dt}, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u\right)dt + (2m-1)\lambda_m\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_0(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u\right)dt = \\
2Re\int_0^T e^{c(T-t)}\left(L_m(\lambda)u, A_\varepsilon^{-1}(t)J(t)u\right)dt + \lambda_m\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\Phi_\varepsilon(u,u)dt \ \forall u \in D(L_m), \\
m = 1, \ 2, \dots,
\end{gathered} \tag{30}$$

где $J(t) = (T-t)(d/dt) + (m-1)$ и $\Phi_\varepsilon(u,u) = (d(A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dtu, u) - c(A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u)$. В форме $\Phi_\varepsilon(u,u)$ воспользуемся формулой

$$d(A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/dt = -A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)A_0(t)A_\varepsilon^{-1}(t)$$

из [9], неравенствами (3), первым свойством операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$ и найдём, что

$$\Phi_\varepsilon(u,u) \leqslant (c_0^{(1)} - c)|A_0^{1/2}(t)A_\varepsilon^{-1/2}(t)u|^2. \tag{31}$$

Если в (30) воспользоваться оценкой (31) и в полученном неравенстве, используя свойство (29), устремить ε к нулю, то при $\forall c \geqslant c_0^{(1)}$ придём к неравенствам

$$\begin{gathered}
2Re\int_0^T e^{c(T-t)}(-1)^{m-1}\left(\frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, J(t)u\right)dt + 2Re\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{du}{dt}, J(t)u\right)dt + \\
2Re\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^T e^{c(T-t)}\left(\left[\frac{d^k}{dt^k}A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + \frac{d^k}{dt^k}A_{2k}(t)\right]\frac{d^k u}{dt^k}, J(t)u\right)dt + \\
(2m-1)\lambda_m\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_0(t)u, u\right)dt \leqslant 2Re\int_0^T e^{c(T-t)}\left(L_m(\lambda_m)u, J(t)u\right)dt.
\end{gathered}$$

Здесь интегрируем по частям m раз в первом интеграле и k раз в третьем интеграле, используя симметричность операторов $A_{2k}(t),\ k=\overline{1,m-1}$, и получаем неравенства

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left[\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|^2+(A_0(t)u,u)\right]dt\leqslant 2Re\int_0^T e^{c(T-t)}(L_m(\lambda)u,J(t)u)dt+$$
$$2Re\sum_{i=0}^{m-3}C_{m-1}^i\int_0^T\left(\frac{d^m u}{dt^m},\frac{d}{dt}\left[\frac{d^{m-1-i}e^{c(T-t)}}{dt^{m-1-i}}\frac{d^iJ(t)u}{dt^i}\right]\right)dt+$$
$$(2m-2)Re\int_0^T\frac{d^2e^{c(T-t)}}{dt^2}\left(\frac{d^m u}{dt^m},\frac{d^{m-2}J(t)u}{dt^{m-2}}\right)dt-$$
$$\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\Bigg\{2Re\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\int_0^T\frac{d^{k-i}e^{c(T-t)}}{dt^{k-i}}\left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt}+A_{2k}(t)\right]\frac{d^k u}{dt^k},\frac{d^iJ(t)u}{dt^i}\right)dt+$$
$$(2m-2-2k)Re\int_0^T e^{c(T-t)}\left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt}+A_{2k}(t)\right]\frac{d^k u}{dt^k},\frac{d^k u}{dt^k}\right)dt-$$
$$\int_0^T\frac{de^{c(T-t)}(T-t)}{dt}\left(A_{2k}(t)\frac{d^k u}{dt^k},\frac{d^k u}{dt^k}\right)dt-\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{dA_{2k}(t)}{dt}\frac{d^k u}{dt^k},\frac{d^k u}{dt^k}\right)dt\Bigg\}-$$
$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k2Re\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k+1}(t)\frac{d^{k+1}u}{dt^{k+1}},\frac{d^{k+1}u}{dt^{k+1}}\right)dt$$
$$-(2m-2)Re\int_0^T e^{c(T-t)}(A_1(t)\frac{du}{dt},u)dt-$$
$$(2m-1)c\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|^2dt+[1-(2m-1)\lambda_m]\int_0^T e^{c(T-t)}(A_0(t)u,u)dt.\quad(32)$$

При $m=1$ правая часть неравенства (32) без первого интеграла оценивается сверху, в силу неравенств (6) при $s=1$ и $i=0$, применённых в восьмом интеграле правой части, величиной

$$(2c_1-c)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{du}{dt}\right|^2dt+(1-\lambda_1)\int_0^T e^{c(T-t)}(A_0(t)u,u)dt,$$

которая неположительна при $\forall c\geqslant c_2=\max\{c_0^{(1)},2c_1\}$ и $\forall\lambda_1\geqslant 1$.

При $m>1$ правые части неравенств (32) без первого интеграла оцениваются сверху в силу неравенств (5), применённых в четвертом, пятом, шестом и девятом интегралах, и (6)— в седьмом и восьмом интегралах правых частей, величинами

$$\sum_{i=0}^{m-1}c_{2m+2}^{(i)}\int_0^T(T-t)\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|dt+\sum_{i=0}^{m-2}c_{2m+3}^{(i)}\int_0^T\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|dt+$$
$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}c_{2m+4}^{(k,i)}\int_0^T(T-t)\left|\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{m-k,t}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{m-i,t}dt+$$
$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}c_{2m+5}^{(k,i)}\int_0^T\left|\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{m-k,t}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{m-i,t}dt+$$
$$\sum_{k=1}^{m-1}c_{2m+6}^{(k)}\int_0^T(T-t)\left|\frac{d^k u}{dt^k}\right|^2_{m-k,t}dt+\sum_{k=1}^{m-1}c_{2m+7}^{(k)}\int_0^T\left|\frac{d^k u}{dt^k}\right|^2_{m-k,t}dt+$$
$$[2c_{2m-1}-(2m-1)c]\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|^2dt+[1-(2m-1)\lambda_m]\int_0^T e^{c(T-t)}|u|^2_{m,t}dt,\quad(33)$$

где постоянные $c^{(i)}_{2m+p}$, $c^{(k,i)}_{2m+p} \geqslant 0$ зависят лишь от $c, T, m, c^{(i)}_s$ и c_s. В первых двух суммах этих величин воспользуемся δ-неравенством, интерполяционными неравенствами

$$\left|\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|\right|_0^2 \leqslant \tau^{1-i/m}\frac{i}{m}\left|\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|\right|_0^2 + \tau^{-i/m}(1-\frac{i}{m})||u||_0^2, \tau > 0,\ 0 < i < m, \tag{34}$$

$$\int_0^T (T-t)\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|^2 dt \leqslant \tau^{1-i/m}\frac{i}{m}\int_0^T (T-t)\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|^2 dt + \tau^{-i/m}(1-\frac{i}{m})\int_0^T (T-t)|u|^2 dt,$$
$$\tau > 0,\ 0 < i < m,$$

из [3], а в остальных суммах — δ-неравенством, неравенствами (20) и (21), неравенствами

$$|u| \leqslant ||A_0^{-1}(t)||^{\alpha}_{\mathcal{L}(H)}|A_0^{\alpha}(t)u| \ \forall u \in D(A_0^{\alpha}(t)),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{35}$$

при $\alpha = 1/2$ и найдём сначала постоянные $c_{2m+8} \geqslant \max\{c_0^{(1)}, 2c_{2m-1}/(2m-1)\}$ и потом $\hat{\lambda}_m \geqslant 1$ такие, что при $c = c_{2m+8}$ и $\forall \lambda_m \geqslant \hat{\lambda}_m$ выражения (33) оцениваются сверху величинами $(1-c_{2m+9})|||u|||_m^2$, $c_{2m+9} > 0$.

Итак, оценивая левые части неравенств (32), взятых при $c = c_2$ и $\forall \lambda_1 \geqslant 1$ для $m = 1$ и при $c = c_{2m+8}$ и $\forall \lambda_m \geqslant \hat{\lambda}_m$ для $m > 1$, снизу через $|||u|||_m^2$ и приводя подобные члены, в результате элементарных оценок имеем неравенства

$$c_{2m+9}|||u|||_m \leqslant 2\sup_{v \in E^m}\left\{\left|\int_0^T (L_m(\lambda_m)u, e^{c_{2m+8}(T-t)}J(t)v)dt\right| / |||v|||_m\right\}.$$

Так как, согласно неравенствам

$$\left|\left|(T-t)^{-1}\frac{d^k v}{dt^k}\right|\right|_{m-1-k}^2 \leqslant 8\left|\left|\frac{d^{k+1} v}{dt^{k+1}}\right|\right|_{m-k-1}^2 + 8(\mathcal{M}_{1/2m} + \mathcal{M}_{-(m-k)/2m})^2\left|\left|\frac{d^k v}{dt^k}\right|\right|_{m-k}^2, 0 \leqslant k \leqslant m-1,$$

доказательство которых аналогично доказательству леммы 5, и неравенствам (20), (34) и (35), нормы $\langle||e^{c_{2m+8}(T-t)}J(t)v||\rangle_{m-1} \leqslant c_{2m+10}|||v|||_m$, то отсюда получаем неравенства (28) с постоянными $c_0(m) = 2c_{2m+10}/c_{2m+9}$, которые распространяются предельным переходом с $D(L_m)$ на сильные решения граничных задач (1),(2). Теорема 1 доказана.

4. Разрешимость задач. Из теоремы 1 следует, что если сильные решения граничных задач (1),(2) существуют, то они единственны и непрерывно зависят от f. Разрешимость граничных задач (1),(2) в сильном смысле для $\forall f \in \hat{F}^{-(m-1)}$ даёт

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются условия I-IV, производная* $dA_0^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(H, W^{2m-1}(t))) \bigcap \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(W^{-2m}(t), W^{-1}(t)))$ *при* $m > 1$, $d^j A_0^{-1}(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(\underline{H, W}^{m-j}(t)))$, $2 \leqslant j \leqslant m-1$, $\hat{\mathcal{D}}^m$ *плотны в* $\mathcal{H}$ *и операторы* $L_m(\lambda_m)$ *допускают замыкания* $\overline{L_m}(\lambda_m)$. *Тогда для каждых* $\lambda_m \in \tilde{\Lambda}_m$, *где* $\tilde{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_1$ *при* $m = 1$ *и* $\tilde{\Lambda}_m = [\tilde{\lambda}_m, +\infty[, \tilde{\lambda}_m \geqslant \hat{\lambda}_m$, *при* $m > 1$, *и* $f \in \hat{F}^{-(m-1)}$ *сильное решение* $u \in E^m$ *граничных задач (1),(2) существует, единственно и*

$$|||u|||_m \leqslant c_0(m)\langle||f||\rangle_{-(m-1)},\ m = 1, 2, \ldots. \tag{36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку из априорных оценок (28) следует замкнутость множеств значений $R(\overline{L_m}(\lambda_m))$ операторов $\overline{L_m}(\lambda_m)$ в $\widehat{F}^{-(m-1)}$, то для разрешимости граничных задач (1),(2) в сильном смысле при $\forall f \in \hat{F}^{-(m-1)}$ достаточно доказать плотность множеств значений $R(L_m(\lambda_m))$ операторов $L_m(\lambda_m)$ в $\hat{F}^{-(m-1)}$. В свою очередь, в связи с рефлексивностью простр- анств $\hat{F}^{-(m-1)}$, для этого по следствию из теоремы Хана-Банаха достаточно показать, что если для некоторой функции $v \in \hat{E}^{m-1}$

$$\int_0^T (L_m(\lambda_m)u, v)dt = 0 \;\forall u \in D(L_m),\; m = 1, 2, \ldots, \tag{37}$$

то $v = 0$.

Тождества (37) допускают $m-1$ кратное интегрирование по частям

$$\int_0^T \left(\frac{d^{m+1}u}{dt^{m+1}}, \frac{d^{m-1}v}{dt^{m-1}}\right) dt + \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k \int_0^T \left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + A_{2k}(t)\right] \frac{d^k u}{dt^k}, \frac{d^k v}{dt^k}\right) dt +$$
$$\int_0^T \left(\left[A_1(t)\frac{d}{dt} + \lambda_m A_0(t)\right] u, v\right) dt = 0.$$

Распространяем последние тождества предельным переходом на все $u \in \mathcal{H}$ такие, что $d^{m+1}u/dt^{m+1}, A_s(t)d^{[(s+1)/2]}u/dt^{[(s+1)/2]} \in \mathcal{H}, 0 \leqslant s \leqslant 2m-1, d^k u/dt^k \in \mathcal{H}^{m-k}, 1 \leqslant k \leqslant m$, и u удовлетворяют граничным условиям (2), полагаем $u = A_0^{-1}(t)\; h$ для $\forall h \in \mathcal{H}$ таких, что $d^k h/dt^k \in \mathcal{H}, 1 \leqslant k \leqslant m+1$, и h удовлетворяют граничным условиям (2), и получаем

$$\int_0^T \left(\frac{d^{m+1}h}{dt^{m+1}}, A_0^{-1}(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right]\right) dt =$$
$$-\sum_{i=1}^{m+1} C_{m+1}^i \int_0^T \left(\frac{d^i A_0^{-1}(t)}{dt^i}\frac{d^{m+1-i}h}{dt^{m+1-i}}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right]\right) dt -$$
$$\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k \int_0^T \left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + A_{2k}(t)\right] \frac{d^k A_0^{-1}(t)h}{dt^k}, \frac{d^k}{dt^k}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right]\right) dt -$$
$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{dA_0^{-1}(t)h}{dt} + \lambda_m h, J(t)w\right) dt, \tag{38}$$

где w-решение в $\mathcal{H}$ задачи Коши: $J(t)w = e^{c(t-T)}v,\; w(0) = 0$. Из равенств $d^{i+1}w/dt^{i+1} = (T-t)^{-1}d^i(e^{c(t-T)}v)/dt^i - (m-1-i)(T-t)^{-1}d^i w/dt^i, 0 \leqslant i \leqslant m-1$, вытекает, что, по крайней мере, $w \in \mathcal{W}^m = \{w \in \mathcal{H} : d^k w/dt^k \in \mathcal{H},\; 1 \leqslant k \leqslant m;\; (d^i w/dt^i)|_{t=0} = (d^j w/dt^j)|_{t=T} = 0, 0 \leqslant i \leqslant m-1, 0 \leqslant j \leqslant m-2\}$.

Из (38) заключаем, что функции $A_0^{-1}(t)(T-t)d^m w/dt^m$ имеют производную из $\mathcal{H}$ и обращаются в нуль при $t = T$. В (38) проинтегрируем ещё один раз по частям, распространим полученные равенства предельным переходом на все $h \in \mathcal{W}^m$, положим $h = w$, возьмём удвоенную вещественную часть и найдём равенства

$$-2Re\int_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m}\right]\right) dt =$$
$$2Re\sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^i \int_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)\frac{d^i e^{c(T-t)}}{dt^i}\frac{d^{m-1-i}J(t)w}{dt^{m-1-i}}\right]\right) dt -$$
$$-2Re\sum_{i=1}^{m+1} C_{m+1}^i \int_0^T \left(\frac{d^i A_0^{-1}(t)}{dt^i}\frac{d^{m+1-i}w}{dt^{m+1-i}}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right]\right) dt -$$
$$-2Re\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k \int_0^T \left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + A_{2k}(t)\right] \frac{d^k A_0^{-1}(t)w}{dt^k}, \frac{d^k}{dt^k}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right]\right) dt -$$
$$2Re\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{dA_0^{-1}(t)w}{dt} + \lambda_m w, J(t)w\right) dt. \tag{39}$$

Здесь для интегрирования по частям воспользуемся следующей леммой [9].

Л е м м а 8. *Пусть $E_1, F_1,$ и G_1 - банаховы пространства, $T_1 : E_1 \to F_1$ - линейный ограниченный оператор и $S_1 : F_1 \to G_1$ - линейный замкнутый оператор с плотной областью определения. Если область определения произведения $S_1 \cdot T_1$ операторов T_1 и S_1 плотна в E_1, то его сопряжённый оператор $(S_1 \cdot T_1)^*$ равен слабому замыканию произведения $T_1^* \cdot S_1^*$ их сопряжённых операторов T_1^* и S_1^* соответственно.*

Применив лемму 8 в $E_1 = F_1 = \mathcal{H}$ и $G_1 = \mathcal{H} \times H$ к операторам $T_1 u = A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}$ $(T-t)u$ и $S_1 g = \{dg/dt, g(0)\}$ с областью определения $D(S_1) = \{g \in \mathcal{H} : dg/dt \in \mathcal{H}, g(T) = 0\}$ в первых двух членах выражений

$$-\int_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m} \right] \right) dt-$$
$$Te^{cT}\left(\frac{d^m w}{dt^m}, A_0^{-1}(t)\frac{d^m w}{dt^m} \right)\Big|_{t=0} + Te^{cT}\left| A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m} \right|^2 \Big|_{t=0}, \quad (40)$$

убеждаемся, что (40) равны

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m} \right], \frac{d^m w}{dt^m} \right) dt-$$
$$\int_0^T \left(\left(\frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t) \right] \right) \frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d^m w}{dt^m} \right) dt + Te^{cT}\left| A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m} \right|^2 \Bigg|_{t=0}, \quad (41)$$

так как $T_1^* = T_1,\ S_1^*(\{p, p(0)\}) = -dp/dt,\ D(S_1^*) = \{\{p, p(0)\} \in G_1 : dp/dt \in \mathcal{H}\}$ и

$$\overline{T_1^* \cdot S_1^*}\frac{d^m w}{dt^m} = -\frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m} \right] + \left(\frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t) \right] \right)\frac{d^m w}{dt^m},$$

где $\overline{T_1^* \cdot S_1^*}$ - замыкание произведения $T_1^* \cdot S_1^*$. Тот факт, что $d^m w/dt^m \in D((S_1 \cdot T_1)^*)$ - область определения оператора $(S_1 \cdot T_1)^*$, следует из равенств (38), которые можно записать в виде

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m h}{dt^m} \right], \frac{d^m w}{dt^m} \right) dt =$$
$$\int_0^T \left(\left(\frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t) \right] \right)\frac{d^m h}{dt^m}, \frac{d^m w}{dt^m} \right) dt+$$
$$\sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^i \int_0^T \left(\frac{d^m h}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)\frac{d^i e^{c(T-t)}}{dt^i}\frac{d^{m-1-i}J(t)w}{dt^{m-1-i}} \right] \right) dt-$$
$$\sum_{i=1}^{m+1} C_{m+1}^i \int_0^T \left(\frac{d^i A_0^{-1}(t)}{dt^i}\frac{d^{m+1-i}h}{dt^{m+1-i}}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left[e^{c(T-t)}J(t)w \right]\right)dt-$$
$$\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k \int_0^T \left(\left[A_{2k+1}(t)\frac{d}{dt} + A_{2k}(t) \right]\frac{d^k A_0^{-1}(t)h}{dt^k}, \frac{d^k}{dt^k}\left[e^{c(T-t)}J(t)w \right] \right) dt-$$
$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_1(t)\frac{dA_0^{-1}(t)h}{dt} + \lambda_m h, J(t)w \right) dt.$$

Таким образом, в силу (39),(40) и (41) имеем равенства

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left|A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2 dt + Te^{cT}\left|A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2\Bigg|_{t=0} =$$

$$2Re\sum_{i=2}^{m-1} C_{m-1}^i \int_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)\frac{d^i e^{c(T-t)}}{dt^i}\frac{d^{m-1-i}J(t)w}{dt^{m-1-i}}\right]\right)dt-$$

$$(2m-2)cRe\int_0^T \left(\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}\frac{d^{m-2}J(t)w}{dt^{m-2}}\right] - A_0^{-1}(t)e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m}\right)dt-$$

$$2Re\sum_{i=2}^{m+1} C_{m+1}^i \int_0^T \left(\frac{d^i A_0^{-1}(t)}{dt^i}\frac{d^{m+1-i}w}{dt^{m+1-i}}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right]\right)dt-$$

$$(2m+2)Re\int_0^T \left(\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right] - e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^m w}{dt^m}\right)dt-$$

$$(2m+1)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d^m w}{dt^m}\right)dt-$$

$$2Re\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\Bigg\{k\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k}(t)\frac{A_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{k-1}w}{dt^{k-1}}, \frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}\right)dt+$$

$$k\int_0^T \left(A_{2k}(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{k-1}w}{dt^{k-1}}, \left(\frac{d^k}{dt^k}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right] - e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}\right)\right)dt+$$

$$\sum_{j=2}^{k} C_k^j \int_0^T \left(A_{2k}(t)\frac{d^j A_0^{-1}(t)}{dt^j}\frac{d^{k-j}w}{dt^{k-j}}, \frac{d^k}{dt^k}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right]\right)dt+$$

$$\sum_{i=1}^{k} C_k^i \int_0^T \left(A_{2k}(t)A_0^{-1}(t)\frac{d^k w}{dt^k}, \frac{d^i e^{c(T-t)}}{dt^i}\frac{d^{k-i}J(t)w}{dt^{k-i}}\right)dt+$$

$$(m-1-k)\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_{2k}(t)A_0^{-1}(t)\frac{d^k w}{dt^k}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt+$$

$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k}(t)A_0^{-1}(t)\frac{d^k w}{dt^k}, \frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}\right)dt\Bigg\}-$$

$$2Re\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\Bigg\{(k+1)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k+1}(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^k w}{dt^k}, \frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}\right)dt+$$

$$(k+1)\int_0^T \left(A_{2k+1}(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^k w}{dt^k}, \left(\frac{d^k}{dt^k}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right] - e^{c(T-t)}(T-t)\frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}\right)\right)dt+$$

$$\sum_{j=2}^{k+1} C_{k+1}^j \int_0^T \left(A_{2k+1}(t)\frac{d^j A_0^{-1}(t)}{dt^j}\frac{d^{k+1-j}w}{dt^{k+1-j}}, \frac{d^k}{dt^k}\left[e^{c(T-t)}J(t)w\right]\right)dt+$$

$$\sum_{i=1}^{k} C_k^i \int_0^T \left(A_{2k+1}(t)A_0^{-1}(t)\frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}, \frac{d^i e^{c(T-t)}}{dt^i}\frac{d^{k-i}J(t)w}{dt^{k-i}}\right)dt+$$

$$(m-1-k)\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A_{2k+1}(t)A_0^{-1}(t)\frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt+$$

$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k+1}(t)A_0^{-1}(t)\frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}, \frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}\right)dt\Bigg\}-$$

$$(2m-1)c\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|A_0^{-1/2}(t)\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2 dt - \lambda_m\int_0^T \left[c(T-t)+2m-1\right]e^{c(T-t)}|w|^2 dt. \quad (42)$$

Для тех $A_{2k}(t), k > 0$, и $A_{2k+1}(t), k \geq 0$, которые не удовлетворяют неравенству (8) при $j = 1$, в первых интегралах фигурных скобок равенств (42) интегрируем один раз по частям

$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k}(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{k-1}w}{dt^{k-1}}, \frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}\right)dt = -$$
$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k}(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^k w}{dt^k}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt-$$
$$\int_0^T \frac{de^{c(T-t)}(T-t)}{dt}\left(A_{2k}(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{k-1}w}{dt^{k-1}}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt-$$
$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{A_{2k}(t)}{dt}\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{k-1}w}{dt^{k-1}}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt-$$
$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k}(t)\frac{d^2A_0^{-1}(t)}{dt^2}\frac{d^{k-1}w}{dt^{k-1}}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt, \quad (43)$$

$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k+1}(t)\frac{A_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^k w}{dt^k}, \frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}\right)dt = -$$
$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k+1}(t)\frac{A_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^{k+1}w}{dt^{k+1}}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt-$$
$$\int_0^T \frac{de^{c(T-t)}(T-t)}{dt}\left(A_{2k+1}(t)\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^k w}{dt^k}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt-$$
$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{dA_{2k+1}(t)}{dt}\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}\frac{d^k w}{dt^k}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt-$$
$$\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k+1}(t)\frac{d^2A_0^{-1}(t)}{dt^2}\frac{d^k w}{dt^k}, \frac{d^k w}{dt^k}\right)dt \quad (44)$$

и в равенствах (44) пользуемся симметричностью операторов $A_{2k+1}(t)(dA_0^{-1}/dt)$ в H.

При $m = 1$ правая часть равенства (42) оценивается сверху выражением

$$(c_0^{(2)} + 3c_0^{(1)} + \tilde{c}_1^{(1)} + 2\tilde{c}_1 - c)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|A_0^{-1/2}(t)\frac{dw}{dt}\right|^2 dt+$$
$$[(c_0^{(2)} + \tilde{c}_1^{(1)} - c\lambda_1)(T-t) - \lambda_1]\int_0^T e^{c(T-t)}|w|^2 dt, \quad (45)$$

благодаря неравенствам (4), применённым в третьем, (3) — в пятом, (9) — в тринадцатом, (7) — в пятнадцатом и шестнадцатом, (13) — в семнадцатом и либо неравенству (8) при $j = 1$, примененному в двенадцатом интегралах правой части равенства (42), либо неравенствам (8) при $j = 2$ и (9),(10), примененным в равенстве (44). Видим, что выражение (45) неположительно при $\forall c \geqslant c_4 = c_0^{(2)} + 3c_0^{(1)} + \tilde{c}_1^{(1)} + 2\tilde{c}_1$ и $\forall \lambda_1 \geqslant 1$.

При $m > 1$ правые части равенств (42) оцениваются сверху выражениями

$$\int_0^T (T-t)\left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=0}^{m-1} c_{i,j}\left|\frac{d^i w}{dt^i}\right|_{-i,t}\left|\frac{d^j w}{dt^j}\right|_{-j,t} - c\lambda_m|w|^2\right)dt+$$
$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{c}_{i,j}\left|\left|\frac{d^i w}{dt^i}\right|\right|_{-i}\left|\left|\frac{d^j w}{dt^j}\right|\right|_{-j} - (2m-1)\lambda_m||w||_0^2+$$
$$[(2m+1)c_0^{(1)} - (2m-1)c]\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{d^m w}{dt^w}\right|^2_{-m,t} dt, \quad (46)$$

благодаря неравенствам (14) при $\alpha = 1/2$ и $\beta = 1/2m$, применённым в первом, втором и четвертом, (4)— в третьем, (3) — в пятом, (9) — в седьмом и тринадцатом, (8) — в восьмом и четырнадцатом, (7) — в девятом, десятом, пятнадцатом и шестнадцатом, (12) — в одиннадцатом, (13) — в семнадцатом и либо неравенству (8) при $j = 1$, примененному в двенадцатом интегралах правых частей равенств (42), либо неравенствам (8) при $j = 2$ и (9)-(11), примененным в равенствах (43) и (44). Здесь постоянные $c_{i,j},\ \tilde{c}_{i,j} \geqslant 0$ зависят лишь от c, m, T и постоянных из условий I-IV. Если в (46) применим δ-неравенство и неравенства (18) и (19), то найдём сначала $c_{2m+11} \geqslant (2m+1)c_0^{(1)}/(2m-1)$, а потом $\tilde{\lambda}_m \geqslant \hat{\lambda}_m$ такие, что при $c = c_{2m+11}$ и $\forall \lambda_m \geqslant \tilde{\lambda}_m$ выражения (46) будут не больше $(1 - c_{2m+12})||d^m w/dt^m||^2_{-m},\ c_{2m+12} > 0$.

Для завершения доказательства остаётся левые части равенств (42), взятых при $c = c_4$ и $\forall \lambda_1 \geqslant 1$ для $m = 1$ и при $c = c_{2m+11}$ и $\forall \lambda_m \geqslant \tilde{\lambda}_m$ для $m > 1$, оценить снизу через $||d^m w/dt^m||^2_{-m}$, их правые части - сверху через $(1 - c_{2m+12})||d^m w/dt^m||^2_{-m}$, привести подобные члены и получить, что $w = 0$ и, значит, $v = 0$. Неравенства (36) следуют из неравенств (28).

З а м е ч а н и е 2. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно, с большими $c_0(m)$ и $\hat{\lambda}_m$) и методом продолжения по параметру утверждение теоремы 2 (возможно, с большими $\tilde{\lambda}_m$) распространяются на уравнения с младшими членами

$$L_m(\lambda_m)u + \sum_{k=0}^{2m-1} B_k(t) d^k u/dt^k = f,\ t \in]0, T[,\ m = 1, 2, \ldots,$$

где линейные неограниченные операторы $B_k(t) \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(W^{2m-k-1}(t), H)), 0 \le k \le 2m-1$, с зависящими от t областями определения $D(B_k(t)) \supset D(A_0(t))$ при всех $t \in [0,T]$ имеют в H сильные производные [7] $d^j B_k(t)/dt^j \in \mathcal{B}([0,T], \mathcal{L}(W^{2m-k+j-1}(t), H)),\ 1 \le j \leqslant k - m,\ 0 \le k \le 2m-1$, такие, что для $\forall u, v \in D(A_0(t))$

$$\left| \left(\frac{d^j B_k(t)}{dt^j} u, v \right) \right| \leqslant \begin{cases} c^{(0)}_{2m+13} |u|_{m-k,t} |v|_{m-1,t}, & 0 \le k \leqslant m, \\ c^{(j)}_{2m+13} |u||v|_{2m-k+j-1,t}, & 1 \le j \le k - m,\ m < k \le 2m-1, \end{cases}$$

где постоянные $c^{(j)}_{2m+13} \geqslant 0$ не зависят от u, v и t.

5. Примеры задач. Для каждого $m = 1,\ 2,\ ...,$ построим новые корректные краевые задачи для полных "гиперболических" дифференциальных уравнений с частными производными гладких по времени t переменных порядков по $x \in \mathbb{R}^n$, которые иллюстрируют достаточные условия существования и единственности сильных решений граничных задач (1), (2) в теоремах 1 и 2 настоящей работы. Сначала укажем операторные коэффициенты дифференциальных уравнений (1).

Пусть в гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbb{R}^n),\ n \ge 1$, при каждом $t \in [0,T]$ действуют дифференциальные операторы

$$A_0(t) = (I - \Delta_x)^{p(t)},\ p(t) > n/2,\ p(t) \in C\,[0,T]\,, \tag{47}$$

где Δ_x— оператор Лапласа по $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ с зависящими от t областями определения

$$D(A_0(t)) = \left\{ u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) : (I - \Delta_x)^{p(t)} u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) \right\}, \quad t \in [0,T]\,. \tag{48}$$

При каждом $t \in [0,T]$ в $H = L_2(\mathbb{R}^n)$ еще действуют дифференциальные операторы

$$A_s(t) = (-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]} (I - \Delta_x)^{p(t)\left(1 - \frac{s}{2m} - \varepsilon_s\right)}, 0 < \varepsilon_{2k} < \frac{1}{2m}, k = \overline{1, m-1}; \varepsilon_{2k+1} = 0,\ k = \overline{0, m-1}, \tag{49}$$

с зависящими от t областями определения

$$D(A_s(t)) = \left\{u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) : (I-\Delta_x)^{p(t)(1-\frac{s}{2m}-\varepsilon_s)} u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)\right\}, t \in [0,T], s = \overline{1, 2m-1}. \quad (50)$$

Здесь частные производные дробных порядков определяются с помощью прямого и обратного преобразований Фурье-Планшереля в $L_2(\mathbb{R}^n)$ [11, С. 108]

$$F[g](\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} g(x) e^{i(\xi,x)} dx, \quad F^{-1}[g](x) = (2\pi)^{-n} \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} g(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi,$$

а именно: $A_s(t)u(x) = (-1)^{[s/2]} F^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{p(t)(1-s/2m-\varepsilon_s)} F[u](\xi)\right](x)$ и $D(A_s(t)) = \{u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{p(t)(1-s/2m-\varepsilon_s)} F[u](\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$, $s > 0$, [11, С. 135-136; 12, С. 38] и аналогично определяются операторы $A_0(t)$ с областями определения $D(A_0(t))$ (см. далее (57) при $\alpha = 2m$). Краевые задачи, получающиеся из задач (1), (2) с дифференциальными операторными коэффициентами (47) - (50), будем обозначать через $(1')$, $(2')$.

Теперь по операторам (47)-(50) также, как в пункте 3 настоящей работы, строим пространства сильных решений краевых задач $(1')$, $(2')$ — гильбертовы пространства $\mathcal{E}^m = \mathcal{E}^m([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, как пополнения соответствующих для (47)-(50) множеств $\mathcal{D}(L_m)$ по эрмитовым нормам $|||u|||_{\mathcal{E}^m} = \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\partial^m u(t,x)/\partial t^m|^2 + \left|(I-\Delta_x)^{p(t)/2} u(t,x)\right|^2\right) dxdt\right)^{1/2}$, и пространства правых частей уравнений $(1')$ — банаховы пространства $\hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)} = \hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}(]0,T[\times \mathbb{R}^n)$, как пополнения множества $L_2(]0,T[\times \mathbb{R}^n)$ по нормам

$$\langle\|f\|\rangle_{\hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}} = \sup_v \left\{ \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x) \overline{v(t,x)} dxdt \right| \Big/ \langle\|v\|\rangle_{m-1} \right\}, \quad v \in \hat{\mathcal{E}}^{m-1} = \hat{\mathcal{E}}^{m-1}([0,T] \times \mathbb{R}^n),$$

где $\hat{\mathcal{E}}^{m-1}$— пополнения множеств $\hat{\mathcal{D}}^m = \{v \in L_2(]0,T[\times \mathbb{R}^n) : \partial^k v/\partial t^k \in D(A_0^{(m-k)/2m}(t)),\ t \in [0,T]; A_0^{(m-k)/2m}(t) \partial^k v/\partial t^k \in L_2(]0,T[\times \mathbb{R}^n), k = \overline{0,m}; \partial^i v/\partial t^i \big|_{t=0} = \partial^i v/\partial t^i \big|_{t=T} = 0,\ i = \overline{0, m-1}\ \}$ по эрмитовым нормам $\langle\|v\|\rangle_{m-1} = \left(\sum\limits_{k=0}^{m-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (T-t)^{-2} \left| A_0^{(m-1-k)/2m}(t) (\partial^k v/\partial t^k)\right|^2 dxdt\right)^{1/2}$. Справедлива следующая

Т е о р е м а 3. *Если $n/2 < p(t) \in C^{(m+1)}[0,T]$ и производная $p'(t) \le 0$, $t \in [0,T]$, то существуют постоянные $\widetilde{c}_0(m) > 0$ и множества $\widetilde{\Lambda}_1 = [1, +\infty[$ при $m = 1$ и $\widetilde{\Lambda}_m = [\widetilde{\lambda}_m, +\infty[$ при $m > 1$ такие, что для каждых $\lambda_m \in \widetilde{\Lambda}_m$ и $f \in \hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}$ сильное решение $u \in \mathcal{E}^m$ краевых задач (1')-(2') существует, единственно и*

$$|||u|||_{\mathcal{E}^m} \le \widetilde{c}_0(m) \langle\|f\|\rangle_{\hat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}} \quad, \quad m = 1,\ 2,\ \ldots \quad . \quad (51)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем выполнимость всех предположений теоремы 2 в случае краевых задач $(1') - (2')$.

I$'$. Операторы $A_0(t)$ $\forall t$ самосопряжены в $L_2(\mathbb{R}^n)$, так как они симметричны на $D(A_0(t))$ и имеют на $L_2(\mathbb{R}^n)$ ограниченные обратные $A_0^{-1}(t) g = F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}] * g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ $\forall g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ [11, с. 182-185], если $p(t) > n/2$ $\forall t$ согласно оценке свертки $\|h * g\|_{L_2} \le \|h\|_{L_1} \|g\|_{L_2}$ [11, С. 62]. Симметричность операторов $A_0(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ означают равенства

$$\langle A_0(t)u, v\rangle = \left\langle F^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{p(t)} F[u]\right], v\right\rangle = (2\pi)^{-n} \left\langle (1+|\xi|^2)^{p(t)} F[u], F[v]\right\rangle =$$

$$(2\pi)^{-n} \left\langle F[u], (1+|\xi|^2)^{p(t)} F[v]\right\rangle = \left\langle u, F^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{p(t)} F[v]\right]\right\rangle = \langle u, A_0(t) v\rangle$$

для $\forall u,\ v \in D(A_0(t)) = \{u \in L_2(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{p(t)} F[u](\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$, $t \in [0,T]$, полученные благодаря известным равенству Парсеваля [11, С. 108]

$$\langle h, g\rangle = (2\pi)^{-n} \langle F[h], F[g]\rangle \ \ \forall h, g \in L_2(\mathbb{R}^n) \quad (52)$$

для скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|\cdot\|$ и формулам обращения [11, С. 102]

$$F^{-1}\cdot F[g]=F\cdot F^{-1}[g]=g\ \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n). \tag{53}$$

В частности, из выше полученных равенств при $v=u$ имеем

$$\langle A_0(t)u,u\rangle=(2\pi)^{-n}\left\|(1+|\xi|^2)^{p(t)/2}F[u]\right\|^2\geq(2\pi)^{-n}\left\|F[u]\right\|^2=\|u\|^2\ \ \forall u\in D(A_0(t))\ \forall t,$$

что означает положительную определенность операторов $A_0(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $c_0(t)=1$.

В силу непрерывности F^{-1} в $L_2(\mathbb{R}^n)$ дифференцированием по t устанавливаем существование сильной производной $(dA_0^{-1}(t)/dt)g=-p'(t)\left(F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)]*g\right)$, ограниченность которой в $L_2(\mathbb{R}^n)$ для $\forall t$, $\forall g\in L_2(\mathbb{R}^n)$ следует из неравенств

$$\left\|\frac{dA_0^{-1}(t)}{dt}g\right\|^2=(p'(t))^2\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)]*g\right\|^2=\frac{(p'(t))^2}{(2\pi)^n}\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)F[g]\right\|$$

$$\leq(2\pi)^{-n}(\rho e)^{-2}(p'(t))^2\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)+\rho}F[g]\right\|^2\leq(2\pi)^{-n}(\rho e)^{-2}(p'(t))^2\left\|F[g]\right\|^2=(\rho e)^{-2}(p'(t))^2\left\|g\right\|^2,$$

в которых кроме (52) и (53) использованы еще при $i=1$ и любом достаточно малом показателе $\rho>0$ оценки

$$\ln^i z\ \leq\ (i/\rho e)^i z^\rho\ \forall \mathrm{z}\geq1,\forall\rho>0,\ i=1,\ 2,\ldots\quad. \tag{54}$$

Аналогично выводятся неравенства $||A_0^{-1}(t)g||^2\leq||g||^2\quad\forall g\in L_2(\mathbb{R}^n),\ \forall t.$

В силу $p'(t)\leq0\ \forall t$, с помощью (52),(53) и формулы преобразования свертки [11, С. 105]

$$F[h*g]=F[h]\cdot F[g]\quad\forall h\in L_1(\mathbb{R}^n),\ \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n) \tag{55}$$

убеждаемся в том, что при $c_0^{(1)}=0$ для $\forall t$ справедливо неравенство (3):

$$-\left\langle(dA_0^{-1}(t)/dt)g,g\right\rangle=p'(t)\left\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)]*g,g\right\rangle=$$
$$(2\pi)^{-n}p'(t)\left\langle(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)F[g],F[g]\right\rangle\leq0\ \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n).$$

В дальнейшем при выводе равенств и неравенств мы часто будем использовать свойства (52), (53), (55) и условимся не оговаривать это каждый раз.

II$'$. На основании непрерывности F^{-1} в $L_2(\mathbb{R}^n)$ дифференцированием по t находим вторую сильную производную $\forall g\in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{d^2A_0^{-1}(t)}{dt^2}g=-p''(t)F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln(1+|\xi|^2)]*g+(p'(t))^2F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln^2(1+|\xi|^2)]*g$$

и т.д., последовательно вычисляются сильные производные $d^jA_0^{-1}(t)/dt^j,\ 3\leq j\leq m+1$, так как $p(t)\in C^{(m+1)}[0,T]$. Их ограниченность в $L_2(\mathbb{R}^n)$ устанавливается аналогично ограниченности $dA_0^{-1}(t)/dt$. Они при $0<\rho\leq\min\limits_{[0,T]}p(t)/2m\leq(j-1)\min\limits_{[0,T]}p(t)/2m,\ j=\overline{2,m+1}$, в (54) для $\forall t,\ \forall g,\ v\in L_2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют неравенствам (4):

$$\left|\left\langle(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j)g,v\right\rangle\right|\leq\sum_{i=1}^{j}c_i(t)\left|\left\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)}\ln^i(1+|\xi|^2)]*g,v\right\rangle\right|\leq$$

$$(2\pi)^{-n}\sum_{i=1}^{j}(i/\rho e)^i\,c_i(t)\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/2+\rho}F[g]\right\|\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/2}F[v]\right\|\leq$$

$$(2\pi)^{-n}\sum_{i=1}^{j}(i/\rho e)^i\, c_i(t)\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)(m+1-j)/2m}F[g]\right\|\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/2}F[v]\right\|=$$

$$\sum_{i=1}^{j}(i/\rho e)^i\, c_i(t)\left\|A_0^{-(m-j+1)/2m}(t)g\right\|\left\|A_0^{-1/2}(t)v\right\|=\sum_{i=1}^{j}(i/\rho e)^i\, c_i(t)\,|g|_{-(m+1-j),t}\,|v|_{-m,t},$$

где функции $c_i(t)$ выражаются через $p(t)$ и ее производные не выше порядка $j-i+1$. Здесь мы воспользовались представлением отрицательных дробных степеней операторов $A_0(t)$:

$$A_0^{-\alpha/2m}(t)g=F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)\alpha/2m}]*g,\ \alpha>0. \tag{56}$$

III$'$. Операторы $A_s(t),\ s>0$, удовлетворяют оценке (5), потому что $\forall t,\forall u,\ v\in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$|\langle A_s(t)u,v\rangle|=\left|\left\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)(1-s/2m-\varepsilon_s)}F[u]],v\right\rangle\right|=(2\pi)^{-n}\left|\left\langle(1+|\xi|^2)^{p(t)(1-s/2m-\varepsilon_s)}F[u],F[v]\right\rangle\right|$$

$$=(2\pi)^{-n}\left|\left\langle(1+|\xi|^2)^{p(t)(1/2-[(s+1)/2]/2m-\varepsilon_s)}F[u],(1+|\xi|^2)^{p(t)(1/2-[s/2]/2m)}F[v]\right\rangle\right|\le$$

$$\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)(1/2-[(s+1)/2]/2m)}F[u]]\right\|\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)(1/2-[s/2]/2m)}F[v]]\right\|=|u|_{m-[(s+1)/2],t}\,|v|_{m-[s/2],t}\,.$$

Здесь использованы представления положительных дробных степеней операторов $A_0(t)$:

$$A_0^{\alpha/2m}(t)u=F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)\alpha/2m}F[u]],\ \alpha>0. \tag{57}$$

Докажем, что $A_s(t)$ сильно дифференцируемы по t в $L_2(\mathbb{R}^n)$ на множествах $D(A_0^{1-s/2m-\varepsilon_s+\eta}(t))$ для любого малого $\eta>0$ и вычислим их сильную производную $dA_s(t)/dt$ с зависящими от t областями определения $D(A_s(t)),\ s>0$, по определению 1. Для $\forall t_0\in[0,T]$ и $\forall u(t_0)\in D(A_0^{1-s/2m-\varepsilon_s+\eta}(t_0))\subset D(A_s(t_0))\quad \exists g_0\in L_2(\mathbb{R}^n)$, что $u(t_0)=A_0^{-(1-s/2m-\varepsilon_s+\eta)}(t_0)g_0$. Тогда $\exists\ u(t)=A_0^{-(1-s/2m-\varepsilon_s)}(t)A_0^{-\eta}(t_0)g_0\in D(A_s(t)),\ t\neq t_0$. Причем $\lim\limits_{t\to t_0}u(t)=F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t_0)(1-s/2m-\varepsilon_s)}]*A_0^{-\eta}(t_0)g_0=A_0^{-(1-s/2m-\varepsilon_s+\eta)}(t_0)g_0=u(t_0)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ ввиду (56), непрерывности F^{-1} в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и $p(t)$ по t. Согласно непрерывности F^{-1} в $L_2(\mathbb{R}^n)$ также находим, что $\exists\ u'(t_0)=-(1-s/2m-\varepsilon_s)p'(t_0)\left(F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t_0)(1-s/2m-\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)]*A_0^{-\eta}(t_0)g_0\right)\in D(A_s(t_0))$, если в (54) показатель $0<\rho\le\eta\min\limits_{[0,T]}p(t)$, где $\eta>0$. При этом $\exists\ h'(t_0)=(A_su)'_t(t_0)=(-1)^{[s/2]}(A_0^{-\eta}(t_0)g_0)'_t(t_0)=0$. Поэтому с помощью (57) отсюда по определению 1 получаем, что

$$(dA_s(t_0)/dt)u(t_0)=h'(t_0)-A_s(t_0)u'(t_0)=-(-1)^{[s/2]}F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t_0)(1-s/2m-\varepsilon_s)}F[u'(t_0)]]=$$

$$(-1)^{[s/2]}(1-s/2m-\varepsilon_s)p'(t_0)F^{-1}[\ln(1+|\xi|^2)F[A_0^{-\eta}(t_0)g_0]]=(-1)^{[s/2]}(1-s/2m-\varepsilon_s)p'(t_0)\times$$

$$F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t_0)(1-s/2m-\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)F[u(t_0)]]\in L_2(\mathbb{R}^n),\quad s>0. \tag{58}$$

Поскольку $p(t)\in C^{(m+1)}[0,T]$, то аналогичным образом вычисляются сильные производные высших порядков $d^iA_s(t)/dt^i$, такие, что $(d^iA_s(t)/dt^i)A_0^{-(1-s/2m+\tau/2m)}(t)\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$, $\tau>0,\ 1\le i\le[s/2],\ s=\overline{1,2m-1}$.

Симметричность $A_s(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и справедливость неравенства (6) при $i=0$ и $s=2k+1,\ k=\overline{0,m-1}$, вытекают из самосопряженности $A_0(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Справедливость же неравенства (6) при $i=1$ и $s=2k,\ k=\overline{1,m-1}$, благодаря (58) и $p'(t)\le 0\ \forall t$, вытекает из

$$(-1)^k\langle(dA_{2k}(t)/dt)u,u\rangle=(1-k/m-\varepsilon_{2k})p'(t)\left\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{p(t)(1-k/m-\varepsilon_{2k})}\ln(1+|\xi|^2)F[u]],u\right\rangle=$$

$$(2\pi)^{-n}(1-k/m-\varepsilon_{2k})p'(t)\left\langle(1+|\xi|^2)^{p(t)(1-k/m-\varepsilon_{2k})}\ln(1+|\xi|^2)F[u],F[u]\right\rangle\le 0\ \forall u\in D(A_0(t)),\ \forall t.$$

IV$'$. Ввиду (56) и (57) все операторы $A_s(t),\ s>0$, $\forall t$ удовлетворяют неравенствам (7):

$$\left|\left\langle A_s(t)A_0^{-1}(t)g,v\right\rangle\right|=\left|\left\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/2m+\varepsilon_s)}F[g],v\right\rangle\right|=$$

$$(2\pi)^{-n}\left|\left\langle(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/2m+\varepsilon_s)}F[g],F[v]\right\rangle\right|\le(2\pi)^{-n}\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)[(s+1)/2]/2m}F[g]\right\|\times$$
$$\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)[s/2]/2m}F[v]\right\|=\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)[(s+1)/2]/2m}]*g\right\|\times$$
$$\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)[s/2]/2m}]*v\right\|=|g|_{-[(s+1)/2],t}\,|v|_{-[s/2],t}\quad\forall g,\ v\in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Ограниченность операторов $A_s(t)(dA_0^{-1}(t)/dt),\ s>0$, в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $\forall t$ следует из

$$\left\|A_s(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g\right\|^2=(p'(t))^2\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/2m+\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)F[g]]\right\|^2=$$
$$\frac{(p'(t))^2}{(2\pi)^n}\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/2m+\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)F[g]\right\|^2\le\frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2(2\pi)^n}\left\|(1+|\xi|^2)^{\rho-p(t)s/2m}F[g]\right\|^2\le$$
$$(2\pi)^{-n}(\rho e)^{-2}(p'(t))^2\left\|F[g]\right\|^2=(\rho e)^{-2}(p'(t))^2\left\|g\right\|^2\quad\forall g\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если $0<\rho\le\min\limits_{[0,T]}p(t)/2m$ в (54). Аналогично показывается, что $A_s(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j)\in\mathcal{B}([0,T]\,,$ $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n))),\ 2\le j\le[(s+1)/2],\ s=\overline{1,2m-1},\ s>0.$

Ввиду (56) устанавливается, что для $A_s(t),\ s>0$, при $0<\rho\le\min\limits_{[0,T]}p(t)/2m$ в (54) выполняется неравенство (8) при $j=2$, так как для $\forall t$ $\left|\left\langle A_s(t)(d^2A_0^{-1}(t)/dt^2)g,v\right\rangle\right|=$

$$(2\pi)^{-n}\left|\left\langle(1+|\xi|^2)^{-p(t)(\frac{s}{2m}+\varepsilon_s)}\ln(1+|\xi|^2)\{p''(t)-(p'(t))^2\ln(1+|\xi|^2)\}F[g],F[v]\right\rangle\right|\le$$
$$(2\pi)^{-n}\sum_{i=1}^{2}b_i(t)\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)([(s+1)/2]-1)/2m+\rho}F[g]\right\|\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)([s/2]+1)/2m}F[v]\right\|\le$$
$$(2\pi)^{-n}\sum_{i=1}^{2}b_i(t)\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)([(s+1)/2]-2)/2m}F[g]\right\|\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)([s/2]+1)/2m}F[v]\right\|=$$
$$\sum_{i=1}^{2}b_i(t)\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)([(s+1)/2]-2)/2m}]*g\right\|\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)([s/2]+1)/2m}]*v\right\|=$$
$$\sum_{i=1}^{2}b_i(t)\,|g|_{-\left[\frac{s+1}{2}\right]+2,t}\,|v|_{-\left[\frac{s}{2}\right]-1,t}\quad\forall g,\ v\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

где $b_i(t)=(i/\rho e)^i\,c_i(t),\ c_1(t)=|p''(t)|$ и $c_2(t)=(p'(t))^2$. Аналогично проверяются неравенства (8) при $3\le j\le[(s+1)/2], s>0$. Неравенство (8) для $s=2k+1>0$ не выполняется при $j=1$, хотя в силу $\varepsilon_{2k}>0$ можно доказать выполнимость (8) для $s=2k>0$ при $j=1$, но (8) для $\forall s>0$ выполняется при $j=2$ с другой правой частью из IV. Согласно (58) для всех $A_s(t),\ s>0$, и $\forall t$ имеет место неравенство (10):

$$\left|\left\langle(dA_s(t)/dt)(dA_0^{-1}(t)/dt)g,v\right\rangle\right|=$$
$$(1-s/2m-\varepsilon_s)\,(p'(t))^2\left|\left\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/2m\ +\varepsilon_s)}\ln^2(1+|\xi|^2)F[g]],v\right\rangle\right|=$$
$$(2\pi)^{-n}\,(1-s/2m-\varepsilon_s)\,(p'(t))^2\left|\left\langle(1+|\xi|^2)^{-p(t)(s/2m\ +\varepsilon_s)}\ln^2(1+|\xi|^2)F[g],F[v]\right\rangle\right|=$$
$$(2\pi)^{-n}\left(1-\frac{s}{2m}-\varepsilon_s\right)(p'(t))^2\left|\left\langle(1+|\xi|^2)^{-\frac{p(t)}{2m}\left(\left[\frac{s-1}{2}\right]+1+2m\varepsilon_s\right)}\ln^2(1+|\xi|^2)F[g],(1+|\xi|^2)^{-\frac{p(t)}{2m}\left[\frac{s}{2}\right]}F[v]\right\rangle\right|\le$$
$$(2\pi)^{-n}\,(1-s/2m-\varepsilon_s)\,(2p'(t))^2(\rho e)^{-2}\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)[(s-1)/2]/2m}F[g]\right\|\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)[s/2]/2m}F[v]\right\|=$$
$$(1-s/2m-\varepsilon_s)\,(2p'(t))^2(\rho e)^{-2}\,|g|_{-[(s-1)/2],t}\,|v|_{-[s/2],t}\,,\quad\forall g,\ v\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если $0<\rho\le\min\limits_{[0,T]}p(t)/2m$ в (54). Аналогично проверяется неравенство (9).

С помощью (57) осуществляется проверка для $\forall t$ неравенств (11):

$$(-1)^k Re\left\langle A_{2k}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)g,g\right\rangle = -p'(t)\left\langle F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)(k/m+\varepsilon_{2k})}\ln(1+|\xi|^2)F[g]],g\right\rangle =$$

$$-\frac{p'(t)}{(2\pi)^n}\left\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{p(t)}{2}(\frac{k}{m}\ +\varepsilon_{2k})}\sqrt{\ln(1+|\xi|^2)}\ F[g]\right\|^2 \le \frac{|p'(t)\,|}{\rho e(2\pi)^n}\left\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{p(t)}{2}(\frac{k}{m}+\varepsilon_{2k})+\frac{\rho}{2}}F[g]\right\|^2 \le$$

$$\frac{|p'(t)\,|}{\rho e(2\pi)^n}\left\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{p(t)k}{2m}}F[g]\right\|^2 = \frac{|p'(t)|}{\rho e}\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-\frac{p(t)k}{2m}}F[g]]\right\|^2 = \frac{|p'(t)|}{\rho e}\,|g|^2_{-k,t}\,,\ \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если в (54) показатель $0<\rho\le\varepsilon_{2k}\min\limits_{[0,T]}p(t)$, где $\varepsilon_{2k}>0$, $k>0$. Нетрудно убедиться в симметричности произведения $A_{2k+1}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)$ симметричных и, как оказывается, комму- тирующих $A_{2k+1}(t)$ и $dA_0^{-1}(t)/dt$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Выполнимость неравенств (12) следует из коммути- руемости $A_{2k}(t),\ k>0$, с $A_0(t)$, а выполнимость неравенств (13) — из коммутируемости $A_{2k+1}(t)$ с $A_0(t)$ и неравенств (6) при $s=2k+1,\ k\ge 0$.

Проверим остальные предположения теоремы 2. Производная $A_0^{1-1/2m}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$ при $m>1$, так как для $\forall t$

$$\left\|A_0^{1-1/2m}(t)\left(dA_0^{-1}(t)/dt\right)g\right\|^2 = (p'(t))^2\left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-p(t)/2m}\ln(1+|\xi|^2)F[g]]\right\|^2 \le$$

$$\frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2(2\pi)^n}\left\|(1+|\xi|^2)^{-p(t)/2m+\rho}F[g]\,\right\|^2 \le \frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2(2\pi)^n}\left\|F[g]\,\right\|^2 = \frac{(p'(t))^2}{(\rho e)^2}\left\|g\,\right\|^2 \quad \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если $0<\rho\le\min\limits_{[0,T]}p(t)/2m$ в (54). Аналогично проверяется, что $A_0^{-1/2m}(t)(dA_0^{-1}(t)/dt)A_0(t)\in\mathcal{B}([0,T],\,\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$ при $m>1$. В теореме 2 условие $A_0^{(m-j)/2m}(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j)\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$, $2\le j\le m-1$, очевидным образом вытекает из выше доказанных включений $A_s(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j)\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$, $2\le j\le[(s+1)/2]$, $s>0$, в подпункте IV′.

Множество $C_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$— всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $]0,T[\times\mathbb{R}^n$ содержится в $\hat{\mathcal{D}}^m$ [12, С. 18] и плотно в $L_2(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$ и, значит, $\hat{\mathcal{D}}^m$ плотны в $L_2(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$. Замыкаемость операторов $L_m(\lambda_m)$, соответствующих краевым задачам $(1'),(2')$, будет следовать из леммы 7, если еще показать, что $A_0^{1-j/2m}(t)(d^jA_0^{-1}(t)/dt^j)\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n)))$, $2\le j\le m-1$. При $j=1$ это выше уже доказано. Требуемое включение при $j=2$ для $\forall t$ следует из

$$\left\|A_0^{1-\frac{1}{m}}(t)\frac{d^2A_0^{-1}(t)}{dt^2}g\right\|^2 = \left\|F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{-p(t)}{m}}\ln(1+|\xi|^2)\left\{p''(t)-(p'(t))^2\ln(1+|\xi|^2)\right\}F[g]]\right\|^2 \le$$

$$\frac{2}{(2\pi)^n}\sum_{i=1}^2 c_i^2(t)\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{-p(t)}{m}}\ln^i(1+|\xi|^2)F[g]\right\|^2 \le \frac{2}{(2\pi)^n}\sum_{i=1}^2\left(\frac{i}{\rho e}\right)^{2i}c_i^2(t)\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{-p(t)}{m}+\rho}F[g]\right\|^2 \le$$

$$2(2\pi)^{-n}\sum_{i=1}^2(i/\rho e)^{2i}c_i^2(t)\,\|F[g]\|^2 = 2\sum_{i=1}^2(i/\rho e)^{2i}c_i^2(t)\,\|g\|^2 \quad \forall g\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

если $0<\rho\le\min\limits_{[0,T]}p(t)/m$ в (54). Требуемые включения для оставшихся $3\le j\le m-1$ доказываются аналогично. Энергетические неравенства (51) соответствуют неравенствам (36).

Все предположения теоремы 2 выполняются. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Анализ приведенных доказательств показывает, что всем предположениям теоремы 2 удовлетворяют также операторы $a_s(t)A_s(t)$, полученные умножением операторов $A_s(t)$ краевых задач $(1'),\ (2')$, которые указаны в пятом пункте, на любые функции $a_s(t)\in C^{([s/2])}[0,T]$, $s>0$. В силу замечания 2 корректность краевых задач $(1'),\ (2')$ сохранится, если к левым частям уравнений $(1')$ прибавить младшие члены $\sum\limits_{k=0}^{2m-1} \sum\limits_{|\alpha(t)|\leq p_k(t)} b_{\alpha(t),k}(t,x) D_x^{\alpha(t)} D_t^k$, где $\alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t))$, $|\alpha(t)| = \alpha_1(t) + \cdots + \alpha_n(t)$, $\alpha_i(t) \geq 0$, $p_k(t) \leq 2p(t)\,(1-(k+1)/2m)$, $b_{\alpha(t),k}(t,x) \in C^{(0,|\alpha(t)|-p(t)(1-k/m))}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ для $0 \leq k \leq m$ и $b_{\alpha(t),k}(t,x) \in C^{(k-m,|\alpha(t)|)}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ для $m < k \leq 2m-1$.

Литература

[1] *Ломовцев Ф.Е.* //Дифференц. уравнения. 1979. Т.15, №6. С.991-999.

[2] *Ломовцев Ф.Е.* //Дифференц. уравнения. 1980. Т.16, №9. С.1581-1586.

[3] *Ломовцев Ф.Е.* //Дифференц. уравнения. 1994. Т.30, №8. С.1412-1425.

[4] *Ломовцев Ф.Е.* //Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, №4. С.542-548.

[5] *Ломовцев Ф.Е.* //Дифференц. уравнения. 2001. Т.37, №2.

[6] *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.,1967.

[7] *Ломовцев Ф.Е.* //Доклады НАН Беларуси. 1999. Т.43, №1. С.13-15.

[8] *Юрчук Н.И.* Метод энергетических неравенств в исследовании д.-о. уравнений: Автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.

[9] *Ломовцев Ф.Е.* //Дифференц. уравнения. 1992. Т.28, №5. С.873-886.

[10] *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. Киев, 1965.

[11] *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.

[12] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию