

УДК 517.955

Л о м о в ц е в Ф. Е. Задачи Коши для факторизованных дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения несглаживающихся коэффициентов // Доклады НАН Беларуси. 2003. Т.47. № 1. С. 5–9.

Доказаны существование и единственность сильных решений задач Коши:

$$(d/dt + A_m(t)) \mathbf{L} (d/dt + A_1(t)) u(t) = f(t), \quad t \in]0, T[,$$

$$d^i u / dt^i \Big|_{t=0} = j_j \in H, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $A_k(t)$ – при почти всех t заданные, линейные положительные самосопряженные различные, но сравнимые, операторы, которые действуют в гильбертовом пространстве H , имеют зависящие от t области определения $D(A_k(t))$ и подчинены локально по t некоторым более гладким операторам $B(t)$ в H таким, что локально по t

$$\lim_{e \rightarrow 0} (dB_e^{-1}(t)/dt u, u)_H = 0, \quad \lim_{e \rightarrow 0} (A_e(t) B_e^{-1}(t) u, u)_H = |A_k^{1/2}(t) u|_H^2 \quad \forall u \in D(A_k^{1/2}(t)).$$

Операторы $A_k(t)$, их квадратные корни $A_k^{1/2}(t)$ с областями определения $D(A_k^{1/2}(t))$ и их сглаживающие операторы $B_e^{-1}(t) = (I + e B(t))^{-1}$, $e > 0$, могут быть разрывными по t . В точках негладкости и разрывов операторов $B_e^{-1}(t)$ задаются соответствующие условия согласования.

Библиогр. 5 назв.

Ф. Е. Л О М О В Ц Е В

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСГЛАЖИВАЮЩИХСЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком И.В.Гайшуном)

Задача Коши для однофакторного параболического дифференциально-операторного уравнения с переменными областями определения изучалась многими авторами и, в частности, в [1]. Задачи Коши для многофакторных параболических дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения изучены в [2] тогда, когда операторные коэффициенты можно “аппроксимировать” гладкими операторами. В настоящей работе такие задачи исследуются в случае, когда в отличие от [1, 2] операторные коэффициенты, вообще говоря, нельзя “аппроксимировать” гладкими операторами сразу на всем “временном” интервале.

1. Постановка задач. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$ рассматриваются задачи Коши:

$$L_m(t)u \equiv (d/dt + A_m(t))L(d/dt + A_1(t))u = f, \quad t \in]0, T[, \quad (1)$$

$$l_j u \equiv d^j u / dt^j \Big|_{t=0} = j_j \in H, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H и $A_k(t)$ – при почти всех (п. в.) t заданные, линейные положительные самосопряженные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_k(t))$.

Предполагается, что операторы $A_k(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. Операторы $A_k(t)$ являются сужениями на $D(A_k(t))$ некоторых линейных операторов $\check{A}_k(t)$ с кусочно постоянными по t областями определения $D(\check{A}_k)$.

II. Для всех операторов $A_k(t)$ эквивалентны нормы:

$$|A_s(t)u| \sim |A_k(t)u| \sim |A_s(t)u - A_k(t)u| \quad \forall u \in D(A_k(t)), \quad s \neq k,$$

и области определения $D(A_k^m(t)) \neq \{0\}$ их степеней $A_k^m(t)$ плотны в H .

III. Для всех операторов $A_k(t)$ выполняются неравенства

$$|A_s(t)A_k(t)u - A_k(t)A_s(t)u|_{a(t)} \leq \check{c}_{s,k} |u|_{(a+2)(t)}, \quad \check{c}_{s,k} \geq 0, \quad \forall u \in W^{a+4}(t), \quad 0 \leq a \leq 2m-4, \quad 1 \leq s \neq k \leq m,$$

где гильбертовы пространства $W^b(t)$ – области определения $D(A^{b/2m}(t))$ дробных степеней $A^{b/2m}(t)$ операторов $A(t) = A_1^m(t)$, наделенные эрмитовыми нормами $|v|_{b(t)} = |A_1^{b/2}(t)v|$, $|b| \leq 2m$, $W^0(t) = H$.

IV. Интервал $]0, T[$ разбит на непересекающиеся интервалы $I_r =]t_r, t_{r+1}[$, $r = \overline{0, R}$, $t_0 = 0$, $t_{R+1} = T$, так, что на каждом I_r существуют линейные положительные самосопряженные операторы $B(t)$ в H с зависящими от t областями определения $D(B(t))$, у которых обратные $B^{-1}(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$ такие, что $A_k(t)B^{-1}(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H))$, их сильная регулярная производная [3] $dB^{-1}(t)/dt \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(H))$ и равномерно по $t \in I_r$ пределы

$$\lim_{e \rightarrow 0} (dB_e^{-1}(t)/dt, u) = 0, \quad \lim_{e \rightarrow 0} (A_k(t)B_e^{-1}(t)u, u) = |A_k^{1/2}(t)u|^2 \quad \forall u \in W^1(t),$$

где $B_e^{-1}(t) = (I + eB(t))^{-1}$, $e > 0$, и $A_k^{1/2}(t)$ – квадратные корни операторов $A_k(t)$.

V. На каждом I_r существуют не зависящие от t банаховы пространства V_r^{2i} , $0 \leq i \leq m$, что $V_r^2 \supset D(A_k)$; $V_r^0 = H$; $V_r^{2j} \subset V_r^{2i}$, если $j > i$; $W^{2i}(t) \subset V_r^{2i}$, $0 \leq i \leq m$; и сильные регулярные производные $d^i A_k(t)/dt^i \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(V_r^{2j+2}, V_r^{2j}))$, $0 \leq j \leq m-1-i$, $0 \leq i \leq m-1$.

Согласно [2], условий I-V достаточно для существования (единственных) локальных сильных решений задач Коши для уравнений (1) на каждом I_r в отдельности. Для того чтобы из этих локальных сильных решений можно было склеивать глобальные сильные решения задач Коши (1), (2), нужны дополнительные условия согласования. Пусть в каждой общей граничной точке t_r , $r = \overline{1, R}$, интервалов I_r все операторы $A_k(t)$ и $B(t)$ допускают односторонние продолжения соответственно слева $A_k(t_r - 0)$ и $B(t_r - 0)$ и справа $A_k(t_r + 0)$. В дальнейшем существование этих продолжений гарантируется дифференцируемостью операторов $B^{-1}(t)$ и $A_k^{-1}(t)$ по t на I_r в условиях IV и VI с) соответственно. В точках негладкости или разрывов t_r операторов $B(t)$ накладываются следующие условия согласования.

VI. Если разбиение $\{I_r\}$ состоит из двух или более интервалов, то для каждого двух соседних интервалов I_{r-1} и I_r

а) выполняются неравенства

$$|A_1^{m-1}(t_r + 0)u|^2 \leq c_1 |A_1^{m-1}(t_r - 0)u|^2 \quad \forall u \in W^{2m-2}(t_r - 0), \quad c_1 \geq 1; \quad (3)$$

в) на I_{r-1} обратные $\mathring{B}^{-1}(t)$ операторов $\mathring{B}(t) = B^m(t)$ с плотными в H областями определения $D(B^m(t)) \neq \{0\}$ имеют такие сильные регулярные производные $d^j \mathring{B}^{-1}(t)/dt^j$, что $\mathring{B}^{(2m-2j)/2m}(t) (d^j \mathring{B}^{-1}(t)/dt^j) \in L_\infty(I_{r-1}, \mathcal{L}(H))$, $1 \leq j \leq m$; равномерно по $t \in I_{r-1}$ сильные регулярные производные $d^j \mathring{B}_e^{-1}(t)/dt^j$ сильно сходятся к нулю в $W^{2m-2s-1}(t)$ для $\forall v \in W^{2m+2j-2s}(t)$, $j \leq s \leq m$, $1 \leq j \leq m$, при $e \rightarrow 0$ и

$$\lim_{e \rightarrow 0} \left| \mathring{B}_e^{-1}(t)u - u \right|_{(2m-1-2i)(t)} = 0 \quad \forall u \in W^{2m-2i}(t), \quad 0 \leq i \leq m,$$

где $\mathring{B}_e^{-1}(t) = (I + e \mathring{B}(t))^{-1}$, $e > 0$, и $\mathring{B}^{a/2m}(t)$ – дробные степени операторов $\mathring{B}(t)$ с областями определения $D(\mathring{B}^{a/2m}(t))$; выполняются неравенства

$$\left| A_1^{m-1/2}(t_r + 0)u \right| \leq c_2 \left| B^{m-1/2}(t_r - 0)u \right| \quad \forall u \in D(\mathring{B}^{(2m-1)/2m}(t_r - 0)), \quad c_2 > 0;$$

с) на I_r операторы $A_k^{-(m-k+1/2)}(t)$ имеют сильную регулярную производную $dA_k^{-(m-k+1/2)}(t)/dt \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(H))$, что $A_k^{m-k+1/2}(t) (dA_k^{-(m-k+1/2)}(t)/dt) \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(W^1(t), H))$, $1 \leq k \leq m$, и обратные $A_k^{-1}(t)$ операторов $A_k(t)$ имеют сильные регулярные производные $d^j A_k^{-1}(t)/dt^j \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(H))$, что $d^j A_k^{-1}(t)/dt^j \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(W^{2m-2k+2-s}(t), W^{2m-2k+2-s}(t)))$, $1 \leq j \leq s \leq m-k$, $1 \leq k < m$.

В настоящей работе доказывается корректная разрешимость задач Коши (1), (2). Приводится пример новых корректных смешанных задач для параболических дифференциальных уравнений с высшими порядками производных по t и переменными порядками по $x \in R^n$.

2. Теорема существования и единственности. Обозначим символами $\mathcal{H}^a$ гильбертовы пространства $L_2([0, T[, W^a(t))$ с эрмитовыми нормами $\|\cdot\|_a, |a| \leq 2m$, $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}$. Пространствами сильных решений наших задач Коши являются банаховы пространства E^m — пополнения множеств $D(L_m) = \{u \in D(\mathring{L}_m) : d^s u / dt^s \in L_2(I_r, W^{2m-2s}(t)) \cap \mathcal{H}, \quad 0 \leq s \leq m-1, \quad r = \overline{0, R}\}$, где

$$D(\mathring{L}_m) = \left\{ u \in \mathcal{H} : \frac{d^s u}{dt^s} \in L_2(I_r, V_r^{2m-2s}), \quad 0 \leq s \leq m, \quad r = \overline{0, R}; \quad \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}}, \frac{d^{a_1} \mathring{A}_{k_1}}{dt^{a_1}} \mathbf{L} \right.$$

$$\left. \frac{d^{a_p} \mathring{A}_{k_p}(t)}{dt^{a_p}} \frac{d^{m-1-p-|a(p)|} u}{dt^{m-1-p-|a(p)|}} \in L_2(I_r, W^2(t)), \quad 0 \leq |a(p)| \leq m-1-p, \quad 1 \leq p \leq m-1, \right.$$

$\left. 1 \leq k_1, \dots, k_p \leq m, \quad k_i \neq k_j, \quad r = \overline{0, R} \right\}$, $a(p) = (a_1, \dots, a_p) \in Z_+^p$ и $|a(p)| = a_1 + \mathbf{L} + a_p$, по нормам

$$\|u\|_m = \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \left\| \frac{d^i u}{dt^i} \right\|_{(2m-2-2i)(t)}^2 + \left\| \frac{d^i u}{dt^i} \right\|_{2m-1-2i}^2 \right) \right\}^{1/2}. \quad \text{Пространствами правых частей являются}$$

гильбертовы пространства $F^m = \mathcal{H}^{-1} \times W^{2m-2}(0) \times \mathbf{L} \times W^2(0) \times H$ — множества всех элементов

$$\mathfrak{S} = \{f, j_0, \dots, j_{m-1}\} \text{ с конечными эрмитовыми нормами } \langle \|\mathfrak{S}\| \rangle_m = \left\{ \|A_1^{-1/2}(t)f\|_0^2 + \sum_{j=0}^{m-1} |j_j|_{(2m-2-2j)(0)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Задачам Коши (1), (2) соответствуют линейные неограниченные операторы $L_m \equiv \{L_m(t), \mathbf{l}_0, \dots,$

$\mathbf{l}_{m-1}\}: E^m \supset D(L_m) \rightarrow F^m$, с плотными областями определения $D(L_m)$. Если выполняются

условия I, II, IV и V, то эти операторы L_m допускают замыкания $\bar{L}_m \equiv \{\bar{L}_m(t), \mathbf{l}_0, \dots, \mathbf{l}_{m-1}\}: E^m \supset$

$D(\bar{L}_m) \rightarrow F^m$. Решения операторных уравнений $\bar{L}_m u = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \in F^m$, называются **сильными** и **решениями задач Коши** (1), (2).

На основании результатов [2] функциональным методом из [4] доказывается следующая теорема существования и единственности этих сильных решений.

Т е о р е м а 1. Пусть выполняются I – VI. Если у обратных $A^{-1}(t) \in L_\infty([0, T[, \mathcal{L}(H))$ при $m \geq 1$ операторов $A(t)$ сильная регулярная производная $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(H, W^{2m-2}(t)))$, $r = \overline{0, R}$, при $m > 2$, то для каждого $f \in \mathcal{H}^{-1}$ и $j_j \in W^{2m-2-2j}(0)$, $0 \leq j \leq m-1$, существует единственное сильное решение $u \in E^m$ задач Коши (1), (2), удовлетворяющее неравенствам

$$\|u\|_m^2 \leq c_0(m) \langle \|\mathfrak{S}\| \rangle_m^2, \quad \mathfrak{S} = \{f, j_0, \dots, j_{m-1}\}, \quad c_0(m) > 0, \quad m = 1, 2, \dots.$$

При ее доказательстве существенно используется следующая теорема о повышении гладкости локальных сильных решений.

Т е о р е м а 2. Пусть условия I – V выполняются на I_r и операторы $A^{-1}(t) \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(H))$ при $m \geq 1$ имеют сильную регулярную производную $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(H, W^{2m-2}(t)))$ при $m > 2$. Если операторы $A_k^{-(m-k+1/2)}(t)$ имеют сильную регулярную производную $dA_k^{-(m-k+1/2)}(t)/dt \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(H))$, что $A_k^{m-k+1/2}(t)(dA_k^{-(m-k+1/2)}(t)/dt) \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(W^1(t), H))$, $1 \leq k \leq m$, и операторы $A_k^{-1}(t)$ имеют сильные регулярные производные $d^j A_k^{-1}(t)/dt^j \in L_\infty([0, T[, \mathcal{L}(H))$, что $d^j A_k^{-1}(t)/dt^j \in L_\infty([0, T[, \mathcal{L}(W^{2m-2k+2-s}(t), W^{2m-2k+2-s}(t)))$, $1 \leq j \leq s \leq m-k$, $1 \leq k \leq m$, то для каждого $f \in L_2(I_r, H)$ и $j_j \in W^{2m-1-2j}(t_r + 0)$, $0 \leq j \leq m-1$, задачи Коши для уравнений (1) на I_r имеют единственное сильное решение $u \in E_r^m$ со свойствами

$$d^i u / dt^i \in \mathcal{H}_r^{2m-2i}, \quad 0 \leq i \leq m. \quad (4)$$

С л е д с т в и е. Пусть выполняются предположения теоремы 2. Если операторы $B_k(t) \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(W^{2m-2k+2}(t), W^{2m-2k+1}(t)))$ имеют сильные регулярные производные $d^j \overset{\#}{B}_k(t) / dt^j \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(W^{2m-2k+2j+2-2s}(t), W^{2m-2k-2s}(t)))$, где $0 \leq j \leq s \leq m-k$, $1 \leq k \leq m$, и $d^j \overset{\#}{B}_k(t) / dt^j \in L_\infty(I_r, \mathcal{L}(W^{2m-2k-2j+1-s}(t), W^{2m-2k-2j-s}(t)))$, где $0 \leq s \leq 2m-2k-2j$, $0 \leq j \leq m-k$, $1 \leq k \leq m$, то для уравнений с факторизованными младшими частями

$$(d/dt + A_m(t) + \overset{\#}{B}_m(t)) \mathbf{L} (d/dt + A_1(t) + \overset{\#}{B}_1(t)) u = f, \quad m=1, 2, \dots, \quad (5)$$

задачи Коши для уравнений (5) на I_r при каждом $f \in L_2(I_r, H)$ и $j_j \in W^{2m-1-2j}(t_r+0)$, $0 \leq j \leq m-1$, имеют единственное сильное решение $u \in E_r^m$ со свойствами (4).

Пространства E_r^m и $\mathcal{H}_r^a$ получаются из пространств E^m и $\mathcal{H}^a$ заменой $]0, T[$ на $]t_r, t_{r+1}[$.

З а м е ч а н и я. 1. Методом продолжения по параметру теорема 1 (возможно, с большими $c_0(m)$) распространяется на уравнения с младшими частями

$$L_m(t)u + \sum_{k=0}^{m-1} B_k(t) \frac{d^k u}{dt^k} = f, \quad t \in]0, T[, \quad m=1, 2, \dots,$$

если $B_k(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(W^{2m-2k-1}(t), H))$, $0 \leq k \leq m-1$.

2. Поскольку неравенства (3) при $m=1$ превращаются в равенства с $c_1=1$, то задача Коши (1), (2) при $m=1$ может быть корректной даже тогда, когда число интервалов неглаживания I_r бесконечно [3].

3. Автор не знает справедлива ли теорема 2 без эквивалентности $|A_k(t)u| \sim |A_s(t)u - A_k(t)u| \quad \forall u \in D(A_k(t)), \quad s \neq k$. Но автору известно, что справедлива теорема существования и единственности гладких решений u задач Коши (1), (2), которые удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{0 < t < T} \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right|_{(2m-1-2i)(t)}^2 + \sum_{i=0}^m \left\| \frac{d^i u}{dt^i} \right\|_{2m-2i}^2 \leq c_3 \left(\|f\|_0^2 + \sum_{j=0}^{m-1} |j_j|_{(2m-1-2j)(0)}^2 \right), \quad c_3 > 0,$$

без этой эквивалентности в случае кусочно постоянных областей $D(A_k(t)) = D(\overset{\#}{A}_k(t))$ и вместо условия VI а) более жестких условий согласования $|A_1^{m-1/2}(t_r+0)u| \leq c_1 |A_1^{m-1/2}(t_r-0)u| \quad \forall u \in W^{2m-1}(t_r-0), \quad r = \overline{1, R}$. При $m=1$ эти оценки означают монотонность множеств $D(A_1^{1/2}(t))$ по t [5, с. 63].

3. П р и м е р. В ограниченной области $G =]0, T[\times \Omega$, $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$, переменных t и $x = (x_1, \dots, x_n)$ с гладкой боковой поверхностью $\Gamma = [0, T[\times S$ рассматриваются уравнения

$$\prod_{k=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{r=0}^{p(t)} a_{k,r}(t) (-\Delta)^r + \sum_{r=0}^{[p(t)/2]} b_{k,r}(t) (-\Delta)^r \right) u(t, x) = f(t, x), \quad (6)$$

где их коэффициенты $a_{k,r} - \max\{m-1, 1\}$ раз и $b_{k,r} - m-k$ раз кусочно непрерывно дифференцируемые функции $t \in [0, T]$ с конечным числом точек негладкости и разрывов первого рода, $a_{k,p(t)} > 0$ – различны при каждом $t \in [0, T]$ и $p \geq 0$ – целочисленная невозрастающая функция $t \in [0, T[$ с конечным числом точек разрывов; с граничными условиями

$$\Delta^i u(t, x) \Big|_{\S} = (\partial \Delta^i u(t, x) / \partial n) \Big|_{S-\S} = 0, \quad 0 \leq i \leq mp(t) - 1, \quad t \in [0, T[, \quad (7)$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 / \partial x_n^2$, n – внешняя нормаль к S и $\S \subseteq S$; и с начальными условиями

$$\partial^j u(0, x) / \partial t^j = j_j(x), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Корректная разрешимость смешанных задач (6)–(8) не следует из [1,2], потому что здесь соответствующие операторы $A_k(t)$ не допускают сглаживания сразу на всем интервале $]0, T[$.

Из абстрактной теоремы 1 вытекает следующая

Т е о р е м а 3. Для каждой $f \in L_2([0, T[, W_{2,\Delta(t)}^{-p(t)}(\Omega))$ и $j_j \in W_{2,\Delta(0)}^{mp(0)(2m-2-j)}(\Omega)$, $0 \leq j \leq m-1$, смешанные задачи (6),(8) имеют единственное сильное решение $u \in C^{(m-1)}([0, T[, L_2(\Omega)) \cap E^m(G)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\|u\|_m^2 \leq c_0(m) \langle \|\mathfrak{I}\|_m^2, \quad \mathfrak{I} = \{f, j_0, \dots, j_{m-1}\} \in \mathfrak{I}^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь банаховы пространства $E^m(G)$ – пополнения множеств всех функций из пространств Соболева-Слободецкого $W_2^{m, 2mp(0)}(G)$, удовлетворяющих условиям (7), по нормам

$$\|u\|_m = \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \left(\operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{(2m-2-j)(t), \Omega}^2 + \int_0^T \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{(2m-1-2j)(t), \Omega}^2 dt \right) \right\}^{1/2},$$

где

$$\|v(x)\|_{(2m-s)(t), \Omega}^2 = \sum_{i=0}^{mp(t)-[(p(t)+1)/2]s} \int_{\Omega} |\Delta^i v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + \sum_{i=0}^{mp(t)-[(p(t)+2)/2]s} \int_{\Omega} |\nabla \Delta^i v(x)|^2 dx, \quad (9)$$

∇ – оператор набла, $\nabla^2 = \Delta$ и $[\cdot]$ – целая часть числа. Гильбертовы пространства $\mathfrak{I}^m =$

$L_2([0, T], W_{2, \Delta(t)}^{-p(t)}(\Omega)) \times W_{2, \Delta(0)}^{mp(0)(2m-2)}(\Omega) \times L \times W_{2, \Delta(0)}^{2mp(0)}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ – множества всех функций $\mathfrak{Z}(t, x) =$

$\{f(t, x), j_0(x), \dots, j_{m-1}(x)\}$ с нормами $\langle \|\mathfrak{Z}(t, x)\| \rangle_m = \left\{ \int_0^T \int_\Omega |\hat{A}^{-1}(t) f(t, x)|^2 dx dt + \sum_{j=0}^{m-1} \|j_j(x)\|_{(2m-2-j)(0), \Omega}^2 \right\}^{1/2}$.

Антидвойственные пространства $W_{2, \Delta(t)}^{-p(t)}(\Omega)$ к гильбертовым пространствам $W_{2, \Delta(t)}^{p(t)}(\Omega)$ с эрмитовыми нормами (9) при $m = s = 1$ являются пополнениями $L_2(\Omega)$ по нормам

$\|f(x)\|_{-1(t), \Omega} = \sup_v \left\{ \left| \int_\Omega f(x) \overline{v(x)} dx \right| / \|v(x)\|_{1(t), \Omega} \right\}, \quad v \in W_{2, \Delta(t)}^{p(t)}(\Omega).$ Гильбертовы пространства

$W_{2, \Delta(0)}^{mp(0)(2m-2-2j)}(\Omega)$ – пополнения множеств всех функций из пространств Соболева $W_2^{2mp(0)}(\Omega)$,

удовлетворяющих (7) при $t = 0$, по эрмитовым нормам $\|\cdot\|_{(2m-2-2j)(0), \Omega}$. Операторы $\hat{A}^{-1}(t) f(x)$ –

квадратные корни операторов, дающих решение уравнений $\hat{A}^2(t)u = (-\Delta)^{p(t)} u = f(x)$ в Ω с граничными условиями (7) на S при $m = 1$.

Автор благодарит профессора Юрчука Н.И., которому он обязан третьим замечанием.

Литература

1. Л о м о в ц е в Ф. Е., Ю р ч у к Н. И. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1754 – 1766.
2. Л о м о в ц е в Ф. Е. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 1. С. 57 — 61.
3. Л о м о в ц е в Ф. Е. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 7. С. 1132 — 1141.
4. Л о м о в ц е в Ф. Е. // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 4. С. 43 — 47.
5. Lions J.-L. Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin, 1961.

Белорусский государственный университет

Поступило 18.05.01

S u m m a r y

The existence and uniqueness of strong solutions of the Cauchy problems for factorized operator-differential equations with variable domains of non-smoothable coefficients are proved.

L o m o v t s e v F. E. The Cauchy problems for factorized operator-differential equations with variable domains of non-smoothable coefficients