УДК 517.956.4

Л о м о в ц е в Ф. Е. Полные параболические дифференциально-операторные уравнения нечетных порядков с переменными областями определения операторных коэффициентов// Доклады НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 3. С. 55–59.

Доказаны существование и единственность сильных решений граничных задач:

$$(-1)^m \frac{d^{2m+1}u}{dt^{2m+1}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} A_{2k+1}(t) \frac{d^k u}{dt^k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k}{dt^k} A_{2k}(t) \frac{d^k u}{dt^k} + l\, A_0(t)u = f,$$

$$d^i u(0)/dt^i = d^j u(T)/dt^j = 0, 0 \le i \le m, 0 \le j \le m-1, m = 0,1,\dots ,$$

где $A_s(t)$ – линейные неограниченные операторы в гильбертовом пространстве H с зависящими от t областями определения; $(-1)^{[s/2]} A_s(t), s > 0,$ – полуограниченные снизу, симметрические, дифференцируемые $\left[(s+1)/2\right]$ раз операторы, подчиненные степеням $A^{1-(s-1)/2m}(t)$ некоторых линейных положительных самосопряженных операторов $A(t)$ в H; операторы $A(t)$ подчинены операторам $A_0(t)$ неравенствами $\left(A(t)u,u\right)_H \le \mathrm{Re}\left(A_0(t)u,u\right)_H \; \forall u \in D(A_0(t))$; $A_0(t)$ аппроксимируются более гладкими максимально диссипативными операторами $B(t)$ в H.

Библиогр. 8 назв.

УДК 517.956.4

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ

ПОЛНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком И. В Гайшуном)

Полные параболические дифференциально-операторные (п.д.-о.) уравнения с постоянными областями определения изучались в [1]. Неполные п.д.-о. уравнения с переменными областями определения исследованы в [2].

1. Постановка задач. Пусть H – гильбертово пространство (г.п.) со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. На ограниченном интервале $]0,T[$ рассмотрим граничные задачи (Г.З.)

$$L_m(l)u \equiv (-1)^m \frac{d^{2m+1}u}{dt^{2m+1}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} A_{2k+1}(t) \frac{d^k u}{dt^k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k}{dt^k} A_{2k}(t) \frac{d^k u}{dt^k} + l\, A_0(t)u = f, \tag{1}$$

$$d^i u / dt^i \big|_{t=0} = d^j u / dt^j \big|_{t=T} = 0, 0 \le i \le m, 0 \le m-1, m = 0,1,\dots , \tag{2}$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H; $A_s(t)$ – при почти всех (п. в.) t заданные, линейные неограниченные замкнутые операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_s(t))$ и $l \ge 1$ – параметр.

Предполагается, что операторы $A_s(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. Существуют линейные положительные самосопряженные операторы $A(t)$ в H с переменными областями определения $D(A(t))$, у которых обратные $A^{-1}(t) \in L_\infty(]0,T[, \mathscr{L}(H))$ и

$$[u]^2_{(t)} \equiv \mathrm{Re}\left(A_0(t)u,u\right) \ge c_1 \left(A(t)u,u\right) \forall u \in D(A_0(t)). \tag{3}$$

II. Области определения $D(A_s(t)), s>0,$ содержат $D(A(t))$. Существуют сильные регулярные производные [3,4] $d^j A_s(t)/dt^j \in L_\infty(]0,T[, \mathscr{L}(W^{2m+1-s}(t),H))$, $0 \le j \le \left[(s+1)/2\right], s>0,$ что

$$\left|\left(d^j A_s(t)/dt^j u,v\right)\right| \le c_s^{(j)} |u|_{(m-[s/2]+p_s)(t)} |v|_{(m-[(s-1)/2]-p_s)(t)} \forall u,v \in D(A(t)), \tag{4}$$

где $p_{2k} = 1/2, 1; p_{2k+1} = 0,1;$ г.п. $W^a(t)$ – области определения $D(A^{a/2m}(t))$ дробных спепеней $A^{a/2m}(t)$ операторов $A(t)$, наделенные эрмитовыми нормами $|v|_{a(t)} = \left|A^{a/2m}(t)v\right|, 0 \le a \le 2m,$ и $[\cdot]$ – целая часть числа. Операторы $A_s(t), s>0,$ симметричны на $D(A(t))$ в H и

$$(-1)^{[(s+2)/2]}\left(A_s(t)u,u\right) \le c^{(s)} |u|^2_{(m-[s/2]-p_s)(t)} \forall u \in D(A(t)), p_{2k}=0, p_{2k+1}=1/2. \tag{5}$$

III. a). Существуют диссипативные в H операторы $B(t)$ с зависящими от t областями определения $D(B(t))$, у которых сильные регулярные производные [3] обратных

$d^i B^{-1}(t)/dt^i \in L_\infty(]0,T[\,,\mathcal{L}(H)), 0 \le i \le m+1,$ такие, что $A_s(t)\left(d^i B^{-1}(t)/dt^i\right) \in L_\infty(]0,T[\,,\mathcal{L}(H)),$ $0 \le i \le [s/2], 0 \le s \le 2m.$ Обратные $B^{*-1}(t)$ сопряженных $B^*(t)$ к $B(t)$ в H имеют сильные регулярные производные $d^j B^{*-1}(t)/dt^j \in L_\infty(]0,T[\,,\mathcal{L}(H)), 0 \le j \le m.$

в). При $m = 0$ равномерно по t существуют пределы [2]:

$$\lim_{e \to 0} \operatorname{Re}\left(dB_e^{-1}/dt\left(B_e^{-1}\right)^* u,u\right) = 0,\ -\lim_{e \to 0} \operatorname{Re}\left(A_0(t)B_e^{-1}\left(B_e^{-1}\right)^* u,u\right) \le c_2 |u|^2\ \forall u \in H_t^+,$$

где г.п. H_t^+ – пополнения $D(A_0(t))$ по эрмитовым нормам $[\cdot]_{(t)}, B_e^{-1} = \left(I - eB(t)\right)^{-1}, e > 0,$ – семейство сглаживающих операторов и $\left(B_e^{-1}\right)^* = \left(I - eB^*(t)\right)^{-1}$ – его сопряженное семейство.

с). При $m > 0$ равномерно по t сильные регулярные производные $d^i B_e^{-1}/dt^i, 1 \le i \le m+1,$ сходятся к 0 в нормах пространств $\mathcal{L}\left(W^i(t), H\right), 1 \le i \le m+1,$ и сильные регулярные производные $d^j\left(B_e^{-1}\right)^*/dt^j, 1 \le j \le m+1,$ сильно сходятся к 0 в $W^i(t)$ для $\forall v \in W^{i+j-1}(t), 1 \le j \le m+1-i, 0 \le i \le m,$ при $e \to 0$. Для всех $k > 0$, для которых $A_{2k}(t) \ne 0$ или $A_{2k+1}(t) \ne 0$, равномерно по t производные $d^i B_e^{-1}/dt^i\ , 1 \le i \le m,$ сходятся к 0 в нормах пространств $\mathcal{L}\left(W^{m-k+i}(t), W^{m-k+1}(t)\right), 1 \le i \le k,$ и производные $d^j\left(B_e^{-1}\right)^*/dt^j$ сильно сходятся к 0 в $W^{m-k+i}(t)$ для $\forall v \in W^{m-k+i+j}(t), 1 \le j \le k-i,$ $0 \le i \le k-1,$ при $e \to 0$. Равномерно по t существуют пределы:

$$\lim_{e \to 0}\left|B_e^{-1}u - u\right|_{m(t)} = \lim_{e \to 0}\left|\left(B_e^{-1}\right)^* u - u\right|_{m(t)} = 0 \forall u \in W^m(t),$$

$$\lim_{e \to 0} \operatorname{Re}\left(A_0(t)B_e^{-1}\left(B_e^{-1}\right)^* u,u\right) = [u]_{(t)}^2\ \forall u \in H_t^+, \tag{6}$$

$$(-1)^{[(s+2)/2]} \lim_{e \to 0} \operatorname{Re}\left(A_s(t)B_e^{-1}\left(B_e^{-1}\right)^* u,u\right) \le \tilde{c}^{(s)} |u|^2_{(m-[s/2]-p_s)(t)}\ \forall u \in W^{m-[s/2]}(t),\ s > 0, \tag{7}$$

$$p_{2k} = 0,\ p_{2k+1} = 1/2,$$

$$(-1)^{[(s+2)/2]} \lim_{e \to 0} \operatorname{Re}\left[\left(A_s(t)B_e^{-1}\left(B_e^{-1}\right)^* u,v\right) - \left(u, A_s(t)B_e^{-1}\left(B_e^{-1}\right)^* v\right)\right] \le \tilde{c}_s |u|_{(m-[(s+1)/2]+p_s)(t)} \times \tag{8}$$

$$|v|_{(m-[s/2]-p_s)(t)}\ \forall u \in W^{m-[(s+1)/2]+2p_s}(t), \forall v \in W^{m-[s/2]}(t),\ p_{2k} = 1/2, p_{2k+1} = 0, s > 0.$$

Здесь постоянные $c_1 > 0$ и $c_s^{(j)}, c^{(s)}, c_2, \tilde{c}^{(s)}, \tilde{c}_s \ge 0$ не зависят от u,v и t.

Докажем корректную сильную разрешимость ГЗ (1), (2). В приложениях ими являются , в частности, смешанные задачи для параболических уравнений переменных порядков [3,5-7]. В конце настоящей работы приведем пример корректных краевых задач для непараболических уравнений нечетных переменных порядков по пространственным переменным.

2. Теорема единственности. Сначала введем пространства и дадим определение сильных решений (с.р.). Обозначим пространства $L_2\left(]0,T[,W^a(t)\right)$ символами $\mathscr{H}^a, 0 \le a \le 2m$, $\mathscr{H}^0 = \mathscr{H}$. Пространствами с.р. ГЗ (1), (2) являются г.п. E^m – пополнения множеств

$$D(L_m) = \{u \in \mathscr{H}: u(t) \in D(A_0(t)) \text{ при п. в. } t;$$

$$\frac{d^{2m+1}u}{dt^{2m+1}}, \frac{d^s u}{dt^s}, \frac{d^{[(s+1)/2]}}{dt^{[(s+1)/2]}} A_s(t) \frac{d^{[s/2]}u}{dt^{[s/2]}} \in \mathscr{H},$$

$$0 \le s \le 2m, d^k u / dt^k \in \mathscr{H}^{m-k}, 1 \le k \le m-1; d^i u / dt^i \big|_{t=0} = d^j u / dt^j \big|_{t=T} = 0, 0 \le i \le m, 0 \le j \le m-1\}$$

по эрмитовым нормам $|||u|||_m = \left(\| d^m u / dt^m \|_0^2 + \int_0^T (T-t)[u]_{(t)}^2 \, dt \right)^{1/2}$. Пространствами правых частей уравнений (1) являются банаховы пространства $\hat{F}^{-m}$ – пополнения пространства $\mathscr{H}$ с весом $T-t$ по нормам $\langle\| f \|\rangle_{-m} = \sup_{v \in E^m} \left\{ \left| \int_0^T (T-t)(f,v)\,dt \right| \Big/ |||v|||_m \right\}$. ГЗ (1), (2) соответствуют линейные неограниченные операторы $L_m(l): E^m \supset D(L_m) \to \hat{F}^{-m}$. Известным образом доказывается [2], что если выполняются условия I и II (без (4) и (5)) и $D(L_m)$ плотны в $\mathscr{H}$, то $L_m(l)$ допускают замыкания $\overline{L}_m(l): E^m \supset D(\overline{L}_m) \to \hat{F}^{-m}$. Решения операторных уравнений $\overline{L}_m(l)u = f$, $f \in \hat{F}^{-m}$, $m = 0,1,\ldots,$ называются с и л ь н ы м и р е ш е н и я м и ГЗ (1), (2).

Т е о р е м а 1. *Если выполняются условия I и II, производная* $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[,$ $\mathscr{L}\left(H, W^{2m-1}(t)\right)) \cap L_\infty(]0,T[, \mathscr{L}\left(W^{-2m}(t), W^{-1}(t)\right))$ *при* $m \ge 1$ *и* $D(L_m)$ *плотны в* $\mathscr{H}$, *то можно указать* $c_0(m) > 0, \Lambda_0 = [1,+\infty[$ *при* $m = 0$ *и* $\Lambda_m = [l_m, +\infty[$ *при* $m > 0$, *что для* $\forall l \in \Lambda_m$

$$|||u|||_m \le c_0(m) \langle\| \overline{L}_m(l) u \|\rangle_{-m} \quad \forall u \in D(\overline{L}_m), m = 0,1,\ldots \,. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрированием по частям приходим к неравенствам

$$|||u|||_m^2 \le 2\,\mathrm{Re} \int_0^T e^{c(t-t)}(T-t)\left(L_m(l)u, u\right) dt + \int_0^T \Phi(u,u) dt \forall u \in D(L_m), \tag{10}$$

$$\Phi(u,u) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=0}^{m-2} C_m^i \left(\frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[\frac{d^{m-i} e^{c(T-t)}(T-t)}{dt^{m-i}} \frac{d^i u}{dt^i} \right] \right) + 2mRe \left(\frac{d^m u}{dt^m}, \right.$$

$$\frac{d^2e^{c(T-t)}(T-t)}{dt^2}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}\Big)-2me^{c(T-t)}\left|\frac{d^mu}{dt^m}\right|^2-(2m+1)ce^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{d^mu}{dt^m}\right|^2+$$

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\Big\{2\sum_{i=0}^{k-1}C_{k+1}^i\frac{d^{k+1-i}e^{c(T-t)}(T-t)}{dt^{k+1-i}}\left(A_{2k+1}(t)\frac{d^ku}{dt^k},\frac{d^iu}{dt^i}\right)-(2k+1)ce^{c(T-t)}(T-t)\Big(A_{2k+1}(t)\frac{d^ku}{dt^k},$$

$$\frac{d^ku}{dt^k}\Big)-e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{dA_{2k+1}(t)}{dt}\frac{d^ku}{dt^k},\frac{d^ku}{dt^k}\right)-(2k+1)e^{c(T-t)}\left(A_{2k+1}(t)\frac{d^ku}{dt^k},\frac{d^ku}{dt^k}\right)\Big\}-$$

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\Big\{2\sum_{i=0}^{k-2}C_k^i\frac{d^{k-i}e^{c(T-t)}(T-t)}{dt^{k-i}}\left(A_{2k}(t)\frac{d^ku}{dt^k},\frac{d^iu}{dt^i}\right)\quad-2kce^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k}(t)\frac{d^ku}{dt^k},\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}\right)+$$

$$2\,e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_{2k}(t)\frac{d^ku}{dt^k},\frac{d^ku}{dt^k}\right)+ke^{c(T-t)}\left(\frac{dA_{2k}(t)}{dt}\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}},\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}\right)-$$

$$kce^{c(T-t)}\left(A_{2k}(t)\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}},\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}\right)\Big\}-(2l-1)e^{c(T-t)}(T-t)\operatorname{Re}\big(A_0(t)u,u\big).$$

При $m=0$ форма Φ не положительна при $\forall c\geq 0$ и $\forall l\geq 1$. При $m>0$ с помощью (3)-(5), интерполяционных неравенств (2.13) и (2.14) из [1] и новых интерполяционных неравенств

$$\left\|\frac{d^iu}{dt^i}\right\|^2_{(m-1-1/2)(t)}\leq t\int_0^T(T-t)\left|\frac{d^mu}{dt^m}\right|^2dt+c_2(t)\int_0^T(T-t)|u|^2_{m(t)}\,dt,t>0,0<i<m,$$

находим сначала $c=c_3>0$ и потом $l_m\geq 1$ такие, что интеграл от формы Φ в (10) не больше $(1-c_4)|||u|||_m^2, 0<c_4<1$. Отсюда для $\forall u\in D(L_m)$ находим $c_0(m)>0$ и неравенства (9), которые распространяются предельным переходом на $\forall u\in D(\overline{L}_m)$.

3. Теорема существования. Из теоремы 1 следует единственность и непрерывная зависимость с.р. ГЗ (1),(2). Существование с. р. при $\forall f\in\hat{F}^{-m}$ дает

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1 и условие III. Тогда для каждых* $l\in\tilde{\Lambda}_m$, *где* $\tilde{\Lambda}_0=\Lambda_0$ *при* $m=0$ *и* $\tilde{\Lambda}_m=\big[\,\tilde{l}_m,+\infty\big[,\ \tilde{l}_m\geq l_m$, *при* $m>0$, *и* $f\in\hat{F}^{-m}$ *с.р.* $u\in E^m$ *ГЗ (1), (2) существует, единственно и* $|||u|||_m\leq c_0(m)\langle\|f\|\rangle_{-m}, m=0,1,\ldots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из априорных оценок (9) и рефлексивности пространств $\hat{F}^{-m}$ вытекает, что достаточно доказать: $v=0$, если для некоторой функции $v\in E^m$

$$\int_0^T(T-t)\big(L_m(l)u,v\big)\,dt=0\quad\forall u\in D(L_m),\quad m=0,1,\ldots\ . \qquad (11$$

В (11) интегрируем m раз по частям, полагаем $u = B_e^{-1}(t)h$ и $w = e^{c(t-T)}v \in E^m$, интегрируем еще один раз по частям , распространяем полученные тождества предельным переходом по h, полагаем $h = \left(B_e^{-1}\right)^* w$, берем удвоенную вещественную часть, интегрируем по частям с помощью леммы из [8] и имеем равенства

$$(2m+1)\int_0^T e^{c(T-t)}\left|\left(B_e^{-1}\right)^*\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2 dt + Te^{cT}\left|\left(B_e^{-1}\right)^*\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2\Big|_{t=0} =$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{i=2}^{m} C_m^i \int_0^T \left(\left(B_e^{-1}\right)^*\frac{d^m w}{dt^m}, \frac{d}{dt}\left[\left(B_e^{-1}\right)^*\frac{d^i e^{c(T-t)}(T-t)}{dt^i}\frac{d^{m-i}w}{dt^{m-i}}\right]\right)dt +$$

$$2m\,\mathrm{Re}\int_0^T \left(\left(B_e^{-1}\right)^*\frac{d^m w}{dt^m}, \left(\frac{d}{dt}\left[\left(B_e^{-1}\right)^*\frac{de^{c(t-t)}(T-t)}{dt}\right]\right)\frac{d^{m-1}w}{dt^{m-1}}\right)dt -$$

$$-2\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{m} C_m^i \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\left[\frac{d^i\left(B_e^{-1}\right)^*}{dt^i}\frac{d^{m-i}w}{dt^{m-i}}\right], \left(B_e^{-1}\right)^*\frac{d^m e^{c(T-t)}(T-t)w}{dt^m}\right)dt -$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{m+1} C_{m+1}^i \int_0^T \left(\frac{d^i B_e^{-1}}{dt^i}\frac{d^{m+1-i}\left(B_e^{-1}\right)^* w}{dt^{m+1-i}}, \frac{d^m e^{c(T-t)}(T-t)w}{dt^m}\right)dt - (2m+1)c\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\left(B_e^{-1}\right)^*\frac{d^m w}{dt^m}\right|^2 dt +$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\int_0^T \left(A_{2k+1}(t)\frac{d^k B_e^{-1}\left(B_e^{-1}\right)^* w}{dt^k}, \frac{d^{k+1}e^{c(T-t)}(T-t)w}{dt^{k+1}}\right)dt - 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\int_0^T \Bigg(A_{2k}(t)\frac{d^k B_e^{-1}\left(B_e^{-1}\right)^* w}{dt^k},$$

$$\frac{d^k e^{c(T-t)}(T-t)w}{dt^k}\Bigg)dt - 2l\,\mathrm{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A_0(t)B_e^{-1}\left(B_e^{-1}\right)^* w, w\right)dt\ . \qquad (12)$$

Левые части в (12) при $c \ge 0$ оцениваются снизу величинами, предел которых при $e \to 0$ равен $(2m+1)\left\|d^m w/dt^m\right\|_0^2$. В правых частях (12) интегрируем один раз по частям, применяем (4) и выше указанные интерполяционные неравенства, переходим к пределу при $e \to 0$ с помощью (7), (8), снова применяем эти же интерполяционные неравенства и, в силу (3) и (6), находим сначала $c = c_5 \ge 0$, а потом $\tilde{l}_m \ge l_m$ такие, что предел правых частей в (12) не превосходит $(2m+1-c_6)\left\|d^m w/dt^m\right\|_0^m, c_6 > 0$. Отсюда заключаем, что $w = 0$ и, значит, $v = 0$.

З а м е ч а н и е . Тем же способом теорема 1 (возможно, с большими $c_0(m)$ и l_m) и методом продолжения по параметру теорема 2 (возможно, с большими $\tilde{l}_m$) распространяются на уравнения с младшими частями

$$L_m(l)u+\sum_{k=0}^{2m} B_k(t)\frac{d^k u}{dt^k}=f,t\in\left]0,T\right[,m=0,1,...,$$

если $B_k(t)\in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(W^{2m-k}(t),H)),k>0,B_0(t)\in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H_t^+,H))$ и существуют сильные регулярные производные $d^jB_k(t)/dt^j\in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(W^{2m-k+j}(t),H)), j\le k-m, m<k\le 2m,$ что

$$\left|\left(\frac{d^jB_k(t)}{dt^j}u,v\right)\right|\le\begin{cases}c_7\left|u\right|_{(m-k)(t)}\left|v\right|_{m(t)},k\le m,c_7\ge 0,\forall u,v\in D(A(t)),\\ c_7^{(j)}\left|u\right|\left|v\right|_{(2m-k+j)(t)},k>m,c_7^{(j)}\ge 0,\forall u,v\in D(A(t)).\end{cases}$$

4. Пример. Пусть $\Omega\subset R^n,n\ge 1,$ — ограниченная область переменных $x=(x_1,\dots,x_n)$ с гладкой границей S. Обозначим через $\rhd$ оператор $-\sum_{i=1}^n\partial^3u/\partial x_i^3+u$ с условиями $u\big|_S=\partial u/\partial x_i\big|_{S_i^-}=0,i=\overline{1,n},$ где S_i^- – части S с отрицательными направляющими косинусами. Обозначим через $\lhd$ его сопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор $\sum_{i=1}^n\partial^3v/\partial x_i^3+v$ с условиями $v\big|_S=\partial v/\partial x_i\big|_{S_i^+}=0,i=\overline{1,n},$ где S_i^+ – части S с положительными направляющими косинусами. Самосопряженный положительный оператор $\lhd\rhd$ в $L_2(\Omega)$ имеет квадратный корень $(\lhd\rhd)^{1/2}$.

В области $G=\left]0,T\right[\times\Omega$ переменных t и x рассмотрим краевые задачи:

$$(-1)^m\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial t^{2m+1}}+\sum_{i=0}^{[p(t)/2]}\tilde{a}_i(t)(\lhd\rhd)^i u+l\sum_{j=0}^{p(t)}a_j(t)(\lhd\rhd)^{1/2}(\lhd\rhd)^j u=f,\tag{13}$$

$$\partial^iu(0,x)/\partial t^i=\partial^ju(T,x)/\partial t^j=0,0\le i\le m,0\le j\le m-1,m=0,1,...,\tag{14}$$

где $\tilde{a}_i,a_j$ – измеримые ограниченные функции, $a_{p(t)}>0$ и p – целочисленная неотрицательная функция, ограниченная числом p_0.

Из абстрактной теоремы 2 вытекает

Т е о р е м а 3 . *Существуют* $c_0(m)>0,\tilde{\Lambda}_1=[1,+\infty[$ *при* $m=0$ *и* $\tilde{\Lambda}_m=[\tilde{l}_m,+\infty[$ *при* $m>0$, *что для каждых* $f\in\tilde{\mathfrak{I}}^{-m}(G)$ *и* $l\in\tilde{\Lambda}_m$ *краевые задачи (13), (14) имеют единственное с.р.* $u\in C^{(m-1)}([0,T],L_2(\Omega))\cap E^m(G)$ *и* $|||u(t,x)|||_m\le c_0(m)\langle\|f(t,x)\|\rangle_{-m},m=0,1,\dots$.

Здесь г.п. $\mathrm{E}^m(G)$ — пополнения множества всех u из пространства Соболева-Слободецкого $W_2^{2m+1,6p_0}(G)$ по эрмитовым нормам

$$\|u\|_m = \left\{ \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right|^2 dxdt + \int_0^T \sum_{j=0}^{[p(t)/2]} \int_\Omega |(\lhd \rhd)^j u|^2 dxdt + \int_0^T \sum_{j=0}^{[(p(t)-1)/2]} \int_\Omega |\rhd (\lhd \rhd)^j u|^2 dxdt \right\}^{1/2}.$$

Банаховы пространства $\hat{\mathfrak{I}}^{-m}(G)$ — пополнения $L_2(G)$ с весом $T-t$ по нормам $\langle\|f\|\rangle_{-m} =$

$\sup\limits_{v} \left\{ \left| \int_0^T \int_\Omega (T-t) f \bar{v} dxdt \right| / \|v\|_m \right\}$, $v \in \mathrm{E}^m(G)$.

Л и т е р а т у р а

1. Л о м о в ц е в Ф. Е.//Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 6. С. 973-983.
2. Л о м о в ц е в Ф. Е., Ю р ч у к Н. И.//Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1754-1766.
3. Л о м о в ц е в Ф. Е.//Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 7. С. 1132-1141.
4. Л о м о в ц е в Ф. Е.//Доклады НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 1. С. 13-15.
5. Л о м о в ц е в Ф. Е.//Тез. докл. Международной математической конференции памяти С. Г. Кондратени. Брест, 2000. С. 60.
6. Ю р ч у к Н. И.//Доклады АН СССР. 1982. Т.265, № 1. С. 44-47.
7. Ю р ч у к Н. И.//Доклады АН СССР. 1986. Т. 287, № 3. С. 560-563.
8. Л о м о в ц е в Ф. Е.//Доклады АН БССР. 1983. Т. 27, № 3. С. 200-203.

Белорусский государственный университет Поступило 28.04.01 г.

S u m m a r y

Existence and uniqueness of strong solutions of boundary-value problems for complete parabolic odd-order differential equations with variable domains of operator coefficients are proved

L o m o v t s e v F. E. Complete parabolic odd-order differential-operator equations with variable domains of operator coefficients