УДК 517.95

Л о м о в ц е в Ф. Е. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗРЫВНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ// Доклады НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 3. С. 37–40.

Методом энергетических неравенств доказана теорема существования и единственности сильных решений задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными по времени операторными коэффициентами, имеющими зависящие от времени области определения. В приложениях к краевым задачам такой задачей Коши являются корректные смешанные задачи для гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных переменного порядка.

Библиогр. – 2 назв.

УДК 517.95

Ф. Е. Ломовцев

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗРЫВНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком И.В. Гайшуном)

Гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с разрывными операторными коэффициентами изучались в [1]. В настоящей работе значительно ослаблены условия однозначной сильной разрешимости задачи Коши для таких уравнений.

1. Постановка задачи. Пусть H – г.п. со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. На ограниченном интервале $]0, T[$ рассматривается задача Коши

$$\mathcal{L}u \equiv d^2u / dt^2 + A(t)u = f, \; t \in \,]0, T[, \tag{1.1}$$

$$\ell_0 u \equiv u|_{t=0} = \varphi, \; \ell_1 u \equiv (du / dt)|_{t=0} = \psi, \; \varphi, \psi \in H. \tag{1.2}$$

Здесь u и f - функции переменной t со значениями в H, $A(t)$, $t \in \theta$,- линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и θ - некоторое множество полной меры из $[0, T]$.

I. Операторы $A_0(t) = A(t) + c_0 I, t \in \theta,$ самосопряжены в H и

$$\left(A(t)u + c_0 u, u\right) \geq c_1 |u|^2 \, \forall u \in D(A(t)), \tag{1.3}$$

где постоянные $c_0 \geq 0$ и $c_1 > 0$ не зависят от u и t.

II. Интервал $]0, T[$ разбит на взаимно непересекающиеся интервалы $I_k =]t_k, t_{k+1}[$, $k = \overline{1, K}$, так, что на каждом I_k обратные операторы $A_0^{-1}(t)$ к $A_0(t)$ имеют сильные регулярные производные $d^i A_0^{-1}(t) / dt^i \in L_\infty(I_k, \mathcal{L}(H))$, $i=1,2$, такие, что при п.в. $t \in I_k \cap \theta$

$$-\left(\left(dA_0^{-1}(t) / dt\right)g, g\right) \leq c_2 \left(A_0^{-1}(t)g, g\right) \forall g \in H, \tag{1.4}$$

$$\left|\left(\left(d^2 A_0^{-1}(t)\,/\,dt^2\right)g,\,v\right)\right| \;\le\; c_3|g|\left|A_0^{-1/2}(t)v\right|\forall g,\,v\,\in\,H, \qquad (1.5)$$

где $A_0^{-1/2}(t)$ - обратные операторы к квадратным корням $A_0^{1/2}(t)$ операторов $A_0(t)$, $t\in\theta$, и постоянные $c_2, c_3 \ge 0$ не зависят от g, v, t и k.

III. Если разбиение $\{I_k\}$, $k=\overline{1, K}$, состоит из двух или более интервалов, то для каждых двух соседних интервалов I_{k-1} и I_k

а) в общей граничной точке t_k выполняется $W(t_k-0)\subset W(t_k+0)$, $D(A(t_k-0))\cap D(A(t_k+0))$ плотно в г.п. $W(t_k-0)$ и существует не зависящая от u, k и t_k постоянная $c_4\ge 1$, что $\left|A_0^{1/2}(t_k+0)u\right|^2 \le c_4\left|A_0^{1/2}(t_k-0)u\right|^2 \forall\, u\in W(t_k-0)$;

в) на левом интервале I_{k-1} неравенство (1.4) выполняется со знаком абсолютной величины в его левой части ;

с) существуют сильные регулярные производные $d^i A_0^{-1/2}(t)\,/\,dt^i \in L_\infty(I_p, \mathcal{L}(H))$, что $A_0^{1/2}(t)\left(d^i A_0^{-1/2}(t)\,/\,dt^i\right) \in L_\infty\,(I_p, \mathcal{L}(W^{i-1}(t), H))$, $i=1,2$, $p=k-1,k$, $W^0(t)=H$, $W^1(t)=W(t)$.

2. <u>Теорема существования и единственности сильных решений</u>. Наделяя области определения $D(A_0^{1/2}(t))$ операторов $A_0^{1/2}(t)$ нормами $|v|_{(t)} = \left|A_0^{1/2}(t)v\right|$, получаем г. п.п. $W(t)$. Операторы $A_0(t_k-0)$ - продолжение слева и $A_0(t_k+0)$ - продолжение справа операторов $A_0(t)$ в точки разрывов t_k. Пусть $D(A(0))\neq\{\varnothing\}$. Задаче Коши (1.1), (1.2) соответствует линейный неограниченный оператор $\mathbf{L}\equiv\{\mathcal{L},\,\ell_0,\,\ell_1\}$: $E\supset D(\mathbf{L})\to F$, действующий из б.п. E, полученного пополнением множества $D(\mathbf{L})=\{u\in L_2(]0,T[,H) : u(t)\in D(A(t)),\ t\in\theta;$ $d^2u/dt^2,\ du/dt,\ A(t)u\in L_2(]0,T[,H)\}$ по норме $\|u\|_E = \left[\sup\limits_{0<t<T}\left(|du(t)/dt|^2 + |u(t)|^2_{(t)}\right)\right]^{1/2}$, в г.п. $F=L_2(]0,T[,H)\mathrm{x}W(0)\mathrm{x}H$ всех $\mathcal{F}=\{f,\varphi,\psi\}$ с нормой $\|\mathcal{F}\|_F = \left(\int\limits_0^T |f(t)|^2dt + |\varphi|^2_{(0)} + |\psi|^2\right)^{1/2}$.

Можно доказать, что если выполняются условия I и II (без (1.4) и (1.5)), то $D(\mathbf{L})$ плотно в

$L_2(]0,T[,H)$ и линейный оператор $\mathbf{L}$ допускает замыкание $\overline{\mathrm{L}} \equiv \{\overline{\mathcal{L}}, \ell_0, \ell_1\}: E \supset D(\overline{\mathbf{L}}) \to F$.

Решения уравнения $\overline{\mathbf{L}}\, u=\mathcal{F}$, $\mathcal{F}=\{f,\varphi,\psi\}$, называются сильными решениями (с.р.) задачи Коши (1.1), (1.2).

Т е о р е м а. Пусть выполняются условия I-III и $D(A(0)) \neq \{\varnothing\}$. Тогда для каждого $\mathcal{F}=\{f,\varphi,\psi\} \in F$ с. р. $u \in E$ задачи Коши (1.1), (1.2) существует, единственно и

$$\|u\|_E^2 \leq c_5 \; \|\mathcal{F}\|_F^2 . \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1 из [2] имеем неравенство

$$\sup_{t_1 \le t \le t_2}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + |u|^2_{(t)}\right) \leq e^{c_6(t_2-t_1)}\Big(\int_{t_1}^{t_2} |\overline{\mathcal{L}}u|^2\, dt + \left|\ell_0 u\right|^2_{(0)} + \left|\ell_1 u\right|^2\Big) \;\; \forall u \in D(\overline{\mathbf{L}}_1), \tag{2.2}$$

где $D(\overline{\mathbf{L}}_1)$ получается из $D(\overline{\mathbf{L}})$ заменой $[0,T]$ на $[t_1,t_2]$ и $c_6=max\{1+c_0, c_2+c_0/c_1\}$, а по теореме 2 из [2] для $\forall f_1 \in L_2(]t_1,t_2[,H)$, $\forall \varphi \in W(0)$ и $\forall \psi \in H$ существует единственное с.р. $u_1 \in E_1$ уравнения $\overline{\mathbf{L}}_1 u=\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1=\{f_1, \varphi, \psi\} \in F_1$, где нормы б. п.п. E_1 и F_1 определяются соответственно левой и правой частями (2.2) и $\overline{\mathbf{L}}_1 \equiv \{\overline{\mathcal{L}}, \ell_0, \ell_1\}$. По теореме 1 из [2] имеем неравенство

$$\sup_{t_2 \le t \le t_3}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + |u|^2_{(t)}\right) \leq e^{c_6(t_3-t_2)}\Big(\int_{t_2}^{t_3} |\overline{\mathcal{L}}u|^2\, dt + \left|u(t_2)\right|^2_{(t_2+0)} + \left|\frac{du(t_2)}{dt}\right|^2\Big) \;\; \forall u \in D(\overline{\mathrm{L}}_2), \tag{2.3}$$

где $D(\overline{\mathbf{L}}_2)$ получается из $D(\mathbf{L})$ заменой $[0,T]$ на $[t_2,t_3]$, а по теореме 2 из [2] в силу $W(t_2-0) \subset W(t_2+0)$ из условия III а) для $\forall f_2 \in L_2(]t_2,t_3[,H)$, $\varphi_2=u_1(t_2) \in W(t_2+0)$ и $\psi_2 = du_1(t_2)/dt \in H$ существует единственное с.р. $u_2 \in E_2$ уравнения $\overline{\mathbf{L}}_2 u = \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2=\{f_2, \varphi_2, \psi_2\} \in F_2$, где нормы б. п.п. E_2 и F_2 определяются соответственно левой и правой частями (2.3) и $\overline{\mathbf{L}}_2 u \equiv \{\overline{\mathcal{L}}u, u\big|_{t=t_2}, (du/dt)\big|_{t=t_2}\}$.

Так как $f \in L_2(]t_1, t_2[, H) \cap L_2(]t_2, t_3[, H)$ для $\forall f \in L_2(]0, T[, H)$, то сложим (2.2) и (2.3), правую часть в (2.3) оценим с помощью неравенства из условия III а) и (2.2) и получим, что $\forall f \in L_2(]0, T[, H), \forall \varphi \in W(0)$ и $\forall \psi \in H$ существует единственная $u_{1,2} \in E_{1,2}$, равная u_k на $[t_k, t_{k+1}], k = 1,2,$ и удовлетворяющая уравнениям $\overline{\mathbf{L}}_1 u = \mathcal{F}_1$ и $\overline{\mathbf{L}}_2 u = \mathcal{F}_2$ и неравенству

$$\sup_{t_1 \le t \le t_3}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + |u|^2_{(t)}\right) \le (1+c_4)e^{c_6(t_3-t_1)}\left(\int_{t_1}^{t_3} |\mathcal{L}u|^2\,dt + |\ell_0 u|^2_{(0)} + |\ell_1 u|^2\right) \quad \forall u \in D(\overline{\mathbf{L}}_{1,2}). \qquad (2.4)$$

Функция $u_{1,2}$ будет с.р. уравнения $\overline{\mathbf{L}}_{1,2} u = \mathcal{F}_{1,2}$, $\mathcal{F}_{1,2} = \{f, \varphi, \psi\} \in F_{1,2}$, где $\overline{\mathbf{L}}_{1,2} \equiv \{\mathcal{L}, \ell_0, \ell_1\}$, если указать такие $u^{(n)}_{1,2} \in D(\mathrm{L}_{1,2})$, что $u^{(n)}_{1,2} \to u_{1,2}$ в $E_{1,2}$ и $\mathrm{L}_{1,2} u^{(n)}_{1,2} \to \mathcal{F}_{1,2}$ в $F_{1,2}$ при $n \to \infty$. Нормы б. п.п. $E_{1,2}$ и $F_{1,2}$ определяются соответственно левой и правой частями (2.4), а $D(\mathrm{L}_{1,2})$ получается из $D(\mathbf{L})$ заменой $[0,T]$ на $[t_1, t_3]$.

Используя условие III в), легко вывести неравенство

$$\sup_{t_1 \le t \le t_2}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + |u|^2_{(t)}\right) \le e^{c_6(t_2-t_1)}\left(\int_{t_1}^{t_2} |\mathcal{L}u|^2\,dt + |u(t_2)|^2_{(t_2-0)} + \left|\frac{du(t_2)}{dt}\right|^2\right) \forall u \in D(\overline{\mathbf{L}}_1). \qquad (2.5)$$

Функция u_1 является единственным с.р. задачи Коши с обратным временем на $[t_1, t_2]$ для $f_1 = f \in L_2(]t_1, t_2[, H), \varphi_1 = \varphi_2 \in W(t_2 - 0)$ и $\psi_1 = \psi_2 \in H$. В силу плотности $L_2(]t_1, t_2[, W(t))$ в $L_2(]t_1, t_2[, H)$ существуют $f^{(1)}_n \in L_2(]t_1, t_2[, W(t))$, сходящиеся к f_1 в $L_2(]t_1, t_2[, H)$, и в силу условия III а) существуют $\varphi^{(1)}_n, \psi^{(1)}_n \in D(A(t_2\text{-}0)) \cap D(A(t_2+0))$, сходящиеся соответственно к φ_1 в $W(t_2 - 0)$ и к ψ_1 в H. По теореме 3 о гладкости из [1] для $f^{(1)}_n, \varphi^{(1)}_n$ и $\psi^{(1)}_n$ с.р. $u^{(1)}_n$ задачи Коши с обратным временем на $[t_1, t_2]$ принадлежат $D(\mathrm{L}_1)$ благодаря условию III с). Из (2.5) видно, что $u^{(1)}_n \to u_1$ в E_1, когда $f^{(1)}_n \to f_1$ в $L_2(]t_1, t_2[, H), \varphi^{(1)}_n \to \varphi_1$ в $W(t_2 - 0)$ и $\psi^{(1)}_n \to \psi_1$ в H при $n \to \infty$. Применяя эту же теорему о гладкости к задаче Коши на $[t_2, t_3]$ для $f^{(2)}_n \in L_2(]t_2, t_3[, W(t)), \varphi^{(2)}_n = \varphi^{(1)}_n$ и

$\psi_n^{(2)} = \psi_n^{(1)}$ заключаем, что ее с.р. $u_n^{(2)} \in D(\mathrm{L}_2)$ благодаря условию III c). Из (2.3) видно, что $u_n^{(2)} \to u_2$ в E_2, когда $f_n^{(2)} \to f_2 = f$ в $L_2(]t_2, t_3[, H)$, $\varphi_n^{(2)} \to \varphi_2$ в $W(t_2+0)$ в силу неравенства из условия III a) и $\psi_n^{(2)} \to \psi_2$ в H при $n \to \infty$. Поэтому возьмем $u_{1,2}^{(n)} = u_n^{(k)}$ на $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 1,2$, так как из (2.4) следует, что $u_{1,2}^{(n)} \to u_{1,2}$ в $E_{1,2}$, когда $\mathrm{L}_{1,2}u_{1,2}^{(n)} \to \mathcal{F}_{1,2}$ в $F_{1,2}$ при $n \to \infty$.

Находим с.р. $u_3 \in E_{1,3}$ задачи Коши на $[t_3, t_4]$ для $f_3 = f \in L_2(]t_3, t_4[, H)$, $\varphi_3 = u_2(t_3) \in W(t_3+0)$ в силу $W(t_3-0) \subset W(t_3+0)$ из условия III a) и $\psi_3 = du_2(t_3)/dt \in H$. Функция $u_{1,3}$, равная u_k на $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 1,2,3$, будет с.р. задачи Коши на $[t_1, t_4]$, если указать такие $u_{1,3}^{(n)} \in D(\mathrm{L}_{1,3})$, что $u_{1,3}^{(n)} \to u_{1,3}$ в $E_{1,3}$ и $\mathrm{L}_{1,3}u_{1,3}^{(n)} \to \mathcal{F}_{1,3} = \{f,\varphi,\psi\}$ в $F_{1,3}$ при $n \to \infty$. Нормы б. п.п. $E_{1,3}$ и $F_{1,3}$ определяются соответственно левой и правой частями неравенства

$$\sup_{t_1 \le t \le t_4}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + |u|^2_{(t)}\right) \le (1+c_4)^2 e^{c_6(t_4-t_1)}\left(\int_{t_1}^{t_4} |\mathcal{L}u|^2 + |\ell_0 u|^2_{(0)} + |\ell_1 u|^2\right) \ \forall u \in D(\bar{\mathrm{L}}_{1,3}), \qquad (2.6)$$

а $D(\mathrm{L}_{1,3})$ получается из $D(\mathbf{L})$ заменой $[0, T]$ на $[t_1, t_4]$.

Повторив рассуждения для $]t_2, t_3[$ и $]t_3, t_4[$ вместо $]t_1, t_2[$ и $]t_2, t_3[$ построим такие $u_{2,3}^{(n)} \in D(\mathrm{L}_{2,3})$, что $u_{2,3}^{(n)} \to u_{1,3}$ в $E_{2,3}$, $\mathcal{L}u_{2,3}^{(n)} \to f$ в $L_2(]t_2, t_4[, H)$, $u_{2,3}^{(n)}(t_2) \to u_2(t_2)$ в $W(t_2+0)$ и $du_{2,3}^{(n)}(t_2)/dtt \to du_2(t_2)/dt$ в H при $n \to \infty$, где $E_{2,3}$ и $F_{2,3}$ определяются аналогично $E_{1,2}$ и $F_{1,2}$, а $D(\mathrm{L}_{2,3})$ получается из $D(\mathbf{L})$ заменой $[0, T]$ на $[t_2, t_4]$.

Тогда $u_{1,3}^{(n)} = q_n^+ u_{1,2}^{(n)} + q_n^- u_{2,3}^{(n)} \in D(\mathrm{L}_{1,3})$, где $q_n^+(t) + q_n^-(t) = 1 \forall t \in [t_1, t_4]$ и

$$q_n^+(t) = \left\{\begin{array}{l} 1,\ t_1 \le t \le t_0 = t_2 + (t_3 - t_2)/2, \\ 1 - n(t - t_0)^2/2,\ t_0 \le t \le t_0 + 1/\sqrt{n}, \\ n(t - t_0 - 2/\sqrt{n})^2/2,\ t_0 + 1/\sqrt{n} \le t \le t_0 + 2/\sqrt{n}, \\ 0,\ t_0 + 2/\sqrt{n} \le t \le t_4. \end{array}\right\}$$

Из неравенства

$$\int_{t_1}^{t_4} |\mathcal{L}u_{1,3}^{(n)} - f|^2 dt \le 6\int_{t_1}^{t_3} |\mathcal{L}u_{1,2}^{(n)} - f|^2 dt + 6\int_{t_2}^{t_4} |\mathcal{L}u_{2,3}^{(n)} - f|^2 dt +$$

$$+ 24\, n \int_{t_0}^{t_0+2/\sqrt{n}} \left(\left| \frac{du_{1,2}^{(n)}}{dt} - \frac{du_{1,3}}{dt} \right|^2 + \left| \frac{du_{2,3}^{(n)}}{dt} - \frac{du_{1,3}}{dt} \right|^2 \right) dt +$$

$$+ 6\, n^2 \int_{t_0}^{t_0+2/\sqrt{n}} \left(\left| u_{1,2}^{(n)} - u_{1,3} \right|^2 + \left| u_{2,3}^{(n)} - u_{1,3} \right|^2 \right) dt$$

видно, что $\mathcal{L}u_{1,3}^{(n)} \to f$ в $L_2(]t_1, t_4[, H)$ при $n \to \infty$, так как $u_{1,2}^{(n)}$ и $u_{2,3}^{(n)}$ можно заранее выбрать такими, чтобы $\left\| u_{1,2}^{(n)} - u_{1,3} \right\|_{E_{1,2}}^2, \left\| u_{2,3}^{(n)} - u_{1,3} \right\|_{E_{2,3}}^2 \le 1/2^n,\ n = 1,2,\ldots.$ Тогда из (2.6) следует, что $u_{1,3}^{(n)} \to u_{1,3}$ в $E_{1,3}$ при $n \to \infty$ и т.д. За конечное число шагов для $\forall f \in$ $\in L_2(]0, T[, H), \forall \varphi \in W(0)$ и $\forall \psi \in H$ найдем единственное с.р. $u \in E,$ равное u_k на $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{1, K},$ и удовлетворяющее (2.1) при $c_5 = (1 + c_4)^{K-1} \exp(c_6 T)$.

З а м е ч а н и е. Методом продолжения по параметру утверждение теоремы (возможно с большей c_5) распространяется на уравнения $d^2u/dt^2 + \tilde{B}(t)(du/dt) + A(t)u + \tilde{A}(t)u =$ $= f$, если $\tilde{B}(t), \tilde{A}(t)A_0^{-1/2}(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(H)).$ В приложениях задачей Коши (1.1), (1.2) являются корректные смешанные задачи для гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных переменного порядка.

Л и т е р а т у р а

1. Л о м о в ц е в Ф. Е. // ДУ. 1997. Т.33, № 10. С. 1394-1403.
2. Л о м о в ц е в Ф. Е. // Докл. НАН Беларуси.

Белорусский государственный университет

Р Е З Ю М Е

Доказана теорема существования и единственности сильных решений задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными по времени операторными коэффициентами, имеющими зависящие от времени области определения.