УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ-СТРУНЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ МЕТОДОМ ВНУТРЕННЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

©2003 г. Ф. Е. Ломовцев

(220050 *Минск, пр. Ф. Скорины, 4, БГУ, мех.-мат.фак-т*)

e-mail: lomovcev@bsu.by

Поступила в редакцию 07.2003г.

Предлагается метод внутренней аппроксимации для уравнений с частными производными — новый метод приближенного решения краевых задач с зависящими от времени граничными условиями на примере смешанной задачи о колебаниях стержня-струны. Этим методом также можно доказывать не только существование, но и единственность решений краевых задач. Библ. 5.

ВВЕДЕНИЕ

Метод внутренней аппроксимации (МВТА) приближенного решения задачи Коши для параболических дифференциально-операторных уравнений (ДОУ) первого порядка с переменными областями определения был предложен в [1] при предположениях на его операторные коэффициенты, при которых справедлива теорема существования и единственности ее точных сильных решений. В случае слабых решений гиперболических ДОУ второго порядка с переменными областями определения аналогичной теоремы нет. Поэтому в настоящей работе методом МВТА впервые приближенно решается смешанная задача о колебаниях стержня-струны и попутно доказывается ее корректная разрешимость в классе слабых решений. Метод МВТА не уступает методам Галеркина, Роте, конечных разностей и другим приближенным методам, которыми можно устанавливать существование слабых решений [2]. Более того, в настоящей работе методом МВТА доказывается единственность слабых решений гиперболических уравнений, чего ранее не удавалось сделать другими приближенными методами. Существенное отличие метода МВТА от конечно-разностных и известных проекционных методов приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП) состоит в использовании ортогональных проекторов на бесконечномерные функциональные пространства.

Введем понятия внутренней и внешней аппроксимаций для ДОУ и ДУЧП. Аппроксимации некоторого неограниченного оператора, при которых он приближается неограниченными (ограниченными) операторами назовем *внутренней (внешней) аппроксимациями* этого оператора. В соответствии с этим определением аппроксимации ДОУ и, в частности, ДУЧП с краевыми условиями, при которых все или часть операторных коэффициентов уравнения и, в частности, дифференциальных операторов уравнения с соответствующими краевыми условиями приближаются неограниченными (ограниченными) операторами будем называть *внутренней (внешней) аппроксимациями* исходного уравнения. Как данное понятие внутренней аппроксимации наполняется конкретным содержанием в конкретных краевых задачах для ДУЧП в конкретных функциональных пространствах мы увидим ниже на примере приближенно решаемой задачи о колебаниях стержня-струны.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решим приближенно следующую краевую задачу, которой моделируются поперечные малые колебания тонких упругих стержней с шарнирно опертым левым концом и упругим (по поперечной силе относительно натяжения вдоль слоя и по углу поворота относительно прогиба) правым концом тогда, когда в течение некоторого времени сопротивление сечений стержня изгибу ослабевает (например, после некоторого нагревания) на столько, что с момента времени $\widehat{t}$ им можно пренебречь. Иначе говоря, с момента времени $\widehat{t}$ колебания стержня мало чем отличаются от колебаний струны. Стержень с такой переменной физической характеристикой будем называть *стержнем-струной*.

В ограниченной области $G =]0,T[\times]0,l[$ независимых переменных t и x интегрируются дифференциальные уравнения

$$u_{tt}(t,x) \ + \ a(t)u_{xxxx}(t,x) = f(t,x), \ t \in]0,\widehat{t}[, \ x \in]0,l[, \tag{1.1}$$

$$u_{tt}(t,x) \ - \ a(t)u_{xx}(t,x) = f(t,x), \ t \in]\widehat{t},T[, \ x \in]0,l[, \tag{1.2}$$

при $0 \le t < \widehat{t}$ с граничными условиями

$$\left. \begin{array}{l} u(t,0) = u_{xx}(t,0) = 0, \ u_x(t,l) + \beta(t)u(t,l) = 0, \\ u_{xxx}(t,l) + \beta(t)u_{xx}(t,l) = 0; \ \ |u_t(t,l)| \le V_1 = const, \ \ |u_{xx}(t,l)| \le F_1 = const, \end{array} \right\} \tag{1.3}$$

при $\widehat{t} < t \le T$ с граничными условиями

$$u(t,0) = 0,\ u_x(t,l) + \beta(t)u(t,l) = 0,\ \ |u_t(t,l)| \le V_1 = const, \tag{1.4}$$

и с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),\ x \in]0,l[. \tag{1.5}$$

Нижними индексами-переменными функций условимся обозначать частные производные этих функций.

Принципиальное затруднение при доказательстве корректности и решении этой смешанной задачи вызвано зависимостью коэффициента $\beta(t)$ от t. В дальнейшем мы будем одновременно доказывать существование и единственность точных и искать представления приближенных слабых решений (см. определение 1) задачи (1.1)-(1.5) методом МВТА по следующему сценарию. Сначала задачу (1.1)-(1.5) проаппроксимируем полудискретными задачами (2.1)-(2.6) и (1.1), (1.2), (2.3)-(2.6) и выведем равномерно ограниченные по параметрам дискретизации оценки (2.8) и (2.23) их решений $u^{(n)}$ и ${}^{(n)}$ соответственно. На основании этих оценок сделаем вывод о существовании у приближений $u^{(n)}$ и ${}^{(n)}$подпоследовательностей $\widetilde{u}^{(k)}$ и ${}^{(n_k)}$, слабо сходящихся к некоторым точным слабым решениям задачи (1.1)-(1.5). Затем для разности двух произвольных приближений типа ${}^{(n)}$ выведем априорную оценку (3.1), из которой будет следовать единственность слабых решений задачи (1.1)-(1.5), и установим сильную сходимость ${}^{(n)}$ и слабую сходимость $u^{(n)}$ к точному слабому решению $= u$ этой задачи. Наконец, методом Фурье найдем приближенные решения $u^{(n)}$ задачи (1.1)-(1.5) и укажем оценку погрешности (4.10) приближений ${}^{(n)}$ ее решений.

Замечание 1. Ранее колебания стержня с условиями (1.3) не изучались. Требование ограниченности изгибающего момента сил $EJu_{xx}(t,l)$, $t < \widehat{t}$, где $EJ-$ жесткость сечения при изгибе, и, тем самым, в силу $u_{xxx}(t,l) = \beta(t)u_{xx}(t,l)$ поперечных (тангенциальных) сил на правый торец в (1.3) вполне естественен и обусловлен типом граничного режима и его нестационарностью [3]. Например, при упругом закреплении относительно поперечных перемещений $u_{xxx}(t,l) = \beta(t)u(t,l)$ требование ограниченности по времени поперечных сил на правый торец выполняется само по себе и не нуждается в дополнительном задании. Даже при малых прогибах скорость колебаний теоретически может быть большой. Поэтому в (1.3) нужна ограниченность скорости $u_t(t,l)$ вибраций правого торца по времени. При $\beta(t) = const$ эти требования ограниченности $u_{xx}(t,l)$ и $u_t(t,l)$ по t не нужны.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Сначала проведем частичную дискретизацию задачи (1.1)-(1.5) по t. Пусть $\{I_i\}$, $i = \overline{0,n}$, — разбиение интервала $]0,T[$ на взаимно непересекающиеся подинтервалы $I_i =]t_i, t_{i+1}[$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = T$, так, чтобы точка $\widehat{t} = t_{\widehat{i}}$ всегда была одной из точек разбиения и каждое последующее разбиение получается из предыдущего добавлением точек разбиения. Величину $h^{(n)} = \max\limits_{0 \le i \le n} h_i$, где $h_i = |t_{i+1} - t_i|$, назовем *шагом* этой неравномерной дискретизации. Пусть все разбиения удовлетворяют следующему условию корреляции числа n точек дискретизации t_i и величин h_i этой дискретизации относительно $\widehat{t}$: существуют постоянные $\widehat{c}_1,\ \widehat{c}_2 > 0$, что

$$\widehat{i}h_i \le \widehat{c}_1\widehat{t},\ i < \widehat{i};\ (n+1-\widehat{i})h_i \le \widehat{c}_2(T-\widehat{t}),\ i \ge \widehat{i};\ \forall n \ge 1. \tag{2.0}$$

Под *частичной дискретизацией* по t в методе МВТА понимается конечное разбиение интервала $]0,T[$ и дискретизация всех или части коэффициентов уравнения и граничных условий при обязательном сохранении дифференцирования по t.

Смешанная задача (1.1)-(1.5) аппроксимируется частично дискретными смешанными задачами: дифференциальными уравнениями

$$u_{tt}(t,x)\ +\ a(t_i)u_{xxxx}(t,x) = f_i^{(n)}(t,x),\ t \in I_i,\ i = \overline{0,\widehat{i}-1},\ x \in]0,l[, \tag{2.1}$$

$$u_{tt}(t,x)\ -\ a(t_i)u_{xx}(t,x) = f_i^{(n)}(t,x),\ t \in I_i,\ i = \overline{\widehat{i},n},\ x \in]0,l[, \tag{2.2}$$

при $0 \le t < \widehat{t}$ с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} &u(t,0) = u_{xx}(t,0) = 0,\ u_x(t,l) + \beta(t_i)u(t,l) = 0,\\ &u_{xxx}(t,l) + \beta(t_i)u_{xx}(t,l) = 0;\ \ |u_t(t,l)| \le V_1,\ \ |u_{xx}(t,l)| \le F_1,\ i < \widehat{i}, \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

при $\widehat{t} < t \le T$ с граничными условиями

$$u(t,0) = 0,\ u_x(t,l) + \beta(t_i)u(t,l) = 0,\ \ |u_t(t,l)| \le V_1,\ i \ge \widehat{i}, \tag{2.4}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi^{(n)}(x),\ u_t(0,x) = \psi^{(n)}(x),\ x \in]0,l[, \tag{2.5}$$

и дополнительными условиями непрерывности

$$u(t_i-0,x)=u(t_i+0,x),\ u_t(t_i-0,x)=u_t(t_i+0,x),\ x\in]0,l[,\ i=\overline{1,n},\ n=1,2,... \quad . \tag{2.6}$$

В силу плотностей соответствующих пространств для любых $\{f,\varphi,\psi\}\in L_2(G)\times W^2_{2,\Gamma(0)}(0,l)\times L_2(0,l)$ и $\delta_f^{(n)},\delta_\varphi^{(n)},\delta_\psi^{(n)}>0$ существуют $f^{(n)}(t,x)=\left\{f_1^{(n)}(t,x),...,f_n^{(n)}(t,x)\right\}$, $f_i^{(n)}\in L_2(I_i,W^{m(t)}_{2,\Gamma(t_i)}(0,l))\cap W_2^{1,0}(I_i\times]0,l[)$, $\varphi^{(n)}(x)\in W^4_{2,\Gamma(0)}(0,l)$, $\psi^{(n)}(x)\in W^2_{2,\Gamma(0)}(0,l)$ такие, что $\int_0^T\left\|f-f^{(n)}\right\|_0^2dt\le\left(\delta_f^{(n)}\right)^2$, $\left\|\varphi-\varphi^{(n)}\right\|_2\le\delta_\varphi^{(n)}$, $\left\|\psi-\psi^{(n)}\right\|_0\le\delta_\psi^{(n)}$, где $m(t)=2$ при $t<\widehat{t}$, $m(t)=1$ при $t>\widehat{t}$ и $\|\cdot\|_p$— норма пространства Соболева $W_2^p(0,l)$. Гильбертовы пространства $W^{m(t)}_{2,\Gamma(t_i)}(0,l)$ и $W^{2m(t)}_{2,\Gamma(t_i)}(0,l)$— пополнения множества всех функций из $W_2^{2m(t)}(0,l)$, удовлетворяющих условиям (2.3) или (2.4), по нормам $\|\cdot\|_{m(t)}$ и $\|\cdot\|_{2m(t)}$ при $t\in I_i,\ i=\overline{0,n}$, соответственно. Находя на I_i для исходных $f_i^{(n)},\varphi^{(n)},\psi^{(n)}$ последовательно по i гладкие по теореме 2 из [4] решения начально-краевых задач (2.1)-(2.6), мы получим некоторые приближения $u^{(n)}(t,x)=\left\{u_0^{(n)}(t,x),...,u_n^{(n)}(t,x)\right\}\in W_2^{2,2m(t)}(G)$ решений исходной задачи (1.1)-(1.5). Обозначим их аналогичные приближения — решения начально-краевых задач (1.1),(1.2),(2.3)-(2.6) символами $\widehat{u}^{(n)}=\left\{\widehat{u}_0^{(n)}(t,x),...,\widehat{u}_n^{(n)}(t,x)\right\}\in W_2^{2,2m(t)}(G)$. Дадим определение слабых решений смешанной задачи (1.1)-(1.5) из $W_2^{1,m(t)}(G)$.

Определение 1. Функция $\widehat{u}\in W^{1,m(t)}_{2,\Gamma(t)}(G)$ называется *слабым решением* смешанной задачи (1.1)-(1.5) для $\{f,\varphi,\psi\}\in L_2(G)\times W^2_{2,\Gamma(0)}(0,l)\times L_2(0,l)$, если для любого разбиения $\{I_i\}_0^n$ существуют последовательности $\widehat{f}^{(n)}(t,x)$, $\widehat{\varphi}^{(n)}(x)$, $\widehat{\psi}^{(n)}(x)$ такие, что $\left\{\widehat{f}^{(n)},\widehat{\varphi}^{(n)},\widehat{\psi}^{(n)}\right\}\to\{f,\varphi,\psi\}$ в $L_2(G)\times W_2^2(0,l)\times L_2(0,l)$ и соответствующие им решения $\widehat{u}^{(n)}\in W^{2,2m(t)}_{2,\Gamma(t_i)}(G)$ задач (1.1),(1.2), (2.3)-(2.6) сходятся к $\widehat{u}$ в $W_2^{1,m(t)}(G)$ при $h^{(n)}\to0$, $\widehat{u}(0,x)=\varphi(x)$ в $L_2(0,l)$ и эта $\widehat{u}$ удовлетворяет тождеству

$$-\int_0^T\int_0^l\widehat{u}_t(t,x)v_t(t,x)dxdt\ +\ \int_0^T\int_0^l a(t)\left(\partial^{m(t)}\widehat{u}(t,x)/\partial x^{m(t)}\right)\left(\partial^{m(t)}v(t,x)/\partial x^{m(t)}\right)dxdt\ +$$
$$\int_0^T a(t)\beta(t)\left(2-m(t)\right)\widehat{u}(t,l)v(t,l)dt\ =\ \int_0^T\int_0^l f(t,x)v(t,x)dxdt\ +\ \int_0^l\psi(x)v(0,x)dx \tag{2.7}$$

при любых $v\in W^{1,m(t)}_{2,\Gamma(t),T}(G)$. Здесь гильбертово пространство $W^{1,m(t)}_{2,\Gamma(t)}(G)$— пополнение множества всех функций из $W_2^{2,2m(t)}(G)$, удовлетворяющих условиям (1.3)-(1.4), по норме пространства $W_2^{1,m(t)}(G)$, $W^{1,m(t)}_{2,\Gamma(t),T}(G)$ — множество всех функций из $W^{1,m(t)}_{2,\Gamma(t)}(G)$, равных нулю при $t=T$, и $W^{2,2m(t)}_{2,\Gamma(t_i)}(G)$ — множество всех функций из $W_2^{2,2m(t)}(G)$, удовлетворяющих (2.3)-(2.4).

Сначала выведем равномерно ограниченную по точкам разбиения t_i и их количеству n априорную оценку приближений $u^{(n)}$.

Теорема 1. *Если коэффициент* $a(t)\ge a_0>0$, $a(t)\in C[0,\widehat{t}[\cap C]\widehat{t},T]$, *ограничен и имеет ограниченную производную* $a'(t)$ по t, *кроме быть может* $t=\widehat{t}$, *и коэффициент* $\beta(t)\ge0,\beta(t)\in C[0,T]$ *и имеет ограниченную производную* $\beta'(t)$ по t, *кроме быть может* $t=\widehat{t}$, то

$$\frac{1}{2}c^*\sup_{[0,T]}\mathcal{N}\quad(t;u^{(n)})\le\left(1+2\frac{c_1}{c_1^*}\right)e^{c_0T}\left(\int_0^T\left\|f^{(n)}(t,x)\right\|_0^2dt+a(0)\left\|\varphi_{xx}^{(n)}(x)\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi^{(n)}(x)\right\|_0^2+\left\|\psi^{(n)}(x)\right\|_0^2\right), \tag{2.6}$$

где $\mathcal{N}(t;w)\ \equiv\ \|w_t\|_0^2\ +\ a(t)\left\{\left\|\partial^{m(t)}w/\partial x^{m(t)}\right\|_0^2+\left(2-m(t)\right)\beta(t)\left|w(t,l)\right|^2+\|w\|_0^2\right\}$, $c^*=\min\{c_1^*,c_2^*\}$, $c_1^*=\exp\left\{-\widehat{c}_1\widehat{t}M_1/a_0\right\}$, $c_2^*=\exp\left\{-\widehat{c}_2(T-\widehat{t})[M_1+(M_1\widetilde{M}+M\widetilde{M}_1)l]/a_0\right\}$, $M=\sup_{[0,T]}|a(t)|$, $M_1=\sup_{[0,T]}|a'(t)|$, $\widetilde{M}=\sup_{[0,T]}|\beta(t)|$, $\widetilde{M}_1=\sup_{[0,T]}|\beta'(t)|$, $c_0=\max\{1+M,1+M_1/a_0\}$ и c_1— *из оценки (2.17)*.

Доказательство. Умножаем скалярно в $L_2(0,l)$ сумму уравнения (2.1) и $a(0)u^{(n)}$ на $2u_t^{(n)}$ и интегрируем по частям один раз по t и дважды по x с учетом (2.3) на I_0

$$\int_0^l\left(\left|u_t^{(n)}\right|^2+a(t)\left|u_{xx}^{(n)}\right|^2+a(t)\left|u^{(n)}\right|^2\right)dx\,\Bigg|_{t=\tau}=2\int_0^\tau\int_0^l e^{c(\tau-t)}\left(f^{(n)}+a(0)u^{(n)}\right)u_t^{(n)}dxdt-$$
$$c\int_0^\tau\int_0^l e^{c(\tau-t)}\left(\left|u_t^{(n)}\right|^2+a(0)\left|u_{xx}^{(n)}\right|^2+a(0)\left|u^{(n)}\right|^2\right)dxdt\ +\ e^{c\tau}\int_0^l\left(\left|u_t^{(n)}\right|^2+a(0)\left|u_{xx}^{(n)}\right|^2+a(0)\left|u^{(n)}\right|^2\right)dx\,|_{t=0}\ +$$

$$(a(\tau)-a(0))\int_0^l\left(\left|u_{xx}^{(n)}\right|^2+\left|u^{(n)}\right|^2\right)dx\,|_{t=\tau},\ 0<\tau\le t_1\,.$$

Оценим правую часть этого равенства сверху, отбросим неположительные слагаемые при $c=c_0$, в последнем слагаемом применим в силу (2.0) оценки

$$|a(\tau)-a(0)|\le\sup_{[0,t_1]}|a'(t)|\,\tau\le(M_1/a_0)h_i a(\tau)\le\delta_{\widehat{i}}^{(1)}a(\tau),\ \ \delta_{\widehat{i}}^{(1)}=\widehat{c}_1\widehat{t}M_1/a_0\widehat{i},$$

возьмем точную верхнюю грань по $\tau\in[0,t_1]$ и при всех достаточно больших $\widehat{i}$ получим

$$\left(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)}\right)\sup_{[0,t_1]}\mathcal{N}_1(t;u^{(n)})\le\int_0^{t_1}e^{c_0(t_1-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt+e^{c_0t_1}\left(\left\|\psi^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi_{xx}^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi^{(n)}\right\|_0^2\right),\ \ \delta_{\widehat{i}}^{(1)}<1,\tag{2.9}$$

где $\mathcal{N}_1(s;w)\equiv\left(\|w_t\|_0^2+a(t)\|w_{xx}\|_0^2+a(t)\|w\|_0^2\right)|_{t=s}$. Для I_1 аналогично выводится

$$\left(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)}\right)\sup_{[t_1,t_2]}\mathcal{N}_1(t;u^{(n)})\le\int_{t_1}^{t_2}e^{c_0(t_2-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0(t_2-t_1)}\mathcal{N}_1(t_1;u^{(n)}).\tag{2.10}$$

Сложим почленно неравенства (2.9) и (2.10), воспользуемся оценкой

$$g(t_1)\ +\ \sup_{[0,t_2]}g(t)\ \le\ \sup_{[0,t_1]}g(t)\ +\ \sup_{[t_1,t_2]}g(t),$$

которая справедлива для всех функций g, непрерывных при $t=t_1$, приведем подобные члены, остаток последнего слагаемого правой части неравенства (2.10) на основании (2.6) оценим правой частью неравенства (2.9)

$$(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)})\sup_{[0,t_2]}\mathcal{N}_1(t;u^{(n)})\le(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)})^{-1}\left\{\int_0^{t_2}e^{c_0(t_2-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt+e^{c_0t_2}\left(\left\|\psi^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi_{xx}^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi^{(n)}\right\|_0^2\right)\right\}.\tag{2.11}$$

Для I_2 аналогично выводится неравенство

$$\left(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)}\right)\sup_{[t_2,t_3]}\mathcal{N}_1(t;u^{(n)})\le\int_{t_2}^{t_3}e^{c_0(t_3-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0(t_3-t_2)}\mathcal{N}_1(t_2;u^{(n)}).\tag{2.12}$$

Складывая неравенства (2.11) и (2.12) также как неравенства (2.9) и (2.10), находим

$$\left(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)}\right)\sup_{[0,t_3]}\mathcal{N}_1(t;u^{(n)})\le\left(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)}\right)^{-2}\left\{\int_0^{t_3}e^{c_0(t_3-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt+e^{c_0t_3}\left(\left\|\psi^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi_{xx}^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi^{(n)}\right\|_0^2\right)\right\}.$$

Суммируя таким же образом локальные априорные оценки по всем оставшимся $I_i,\ i=\overline{3,\widehat{i}-1}$,

$$\left(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)}\right)^{\widehat{i}}\sup_{[0,\widehat{t}]}\mathcal{N}_1(t;u^{(n)})\le\int_0^{\widehat{t}}e^{c_0(\widehat{t}-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt+e^{c_0\widehat{t}}\left(\left\|\psi^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi_{xx}^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi^{(n)}\right\|_0^2\right).$$

Существует $c_1^*=\lim\limits_{\widehat{i}\to\infty}(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)})^{\widehat{i}}$ и, значит, для $\varepsilon=c_1^*/2>0\ \ \exists N_1$, что $\left(1-\delta_{\widehat{i}}^{(1)}\right)^{\widehat{i}}\ge c_1^*/2\ \ \forall\widehat{i}\ge N_1$ и

$$\frac{1}{2}c_1^*\sup_{[0,\widehat{t}]}\mathcal{N}_1(t;u^{(n)})\le\int_0^{\widehat{t}}e^{c_0(\widehat{t}-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt+e^{c_0\widehat{t}}\left(\left\|\psi^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi_{xx}^{(n)}\right\|_0^2+a(0)\left\|\varphi^{(n)}\right\|_0^2\right).\tag{2.13}$$

Теперь умножая скалярно в $L_2(0,l)$ сумму уравнения (2.2) и $a(\widehat{t})u^{(n)}$ на $2u_t^{(n)}$ и интегрируя один раз по t и x с учетом (2.4) на $I_{\widehat{i}}$, получаем равенство

$$\int_0^l\left(\left|u_t^{(n)}\right|^2+a(t)\left|u_x^{(n)}\right|^2+a(t)\left|u^{(n)}\right|^2\right)dx\,\Bigg|_{t=\tau}+\ a(\tau)\beta(\tau)\left|u^{(n)}(\tau,l)\right|^2=2\int_{\widehat{t}}^{\tau}\int_0^l e^{c(\tau-t)}\left(f^{(n)}+a(\widehat{t})u^{(n)}\right)u_t^{(n)}dxdt-$$

$$c\int_{\widehat{t}}^{\tau}\int_0^l e^{c(\tau-t)}\left(\left|u_t^{(n)}\right|^2+a(\widehat{t})\left|u_x^{(n)}\right|^2+a(\widehat{t})\left|u^{(n)}\right|^2\right)dxdt\ +\ e^{c(\tau-\widehat{t})}\{\int_0^l\left(\left|u_t^{(n)}\right|^2+a(t)\left|u_x^{(n)}\right|^2+a(t)\left|u^{(n)}\right|^2\right)dx\ +$$

$$a(t)\beta(t)\left|u^{(n)}(t,l)\right|^2\}\Big|_{t=\widehat{t}+0}+\left(a(\tau)-a(\widehat{t})\right)\int_0^l\left(\left|u_x^{(n)}\right|^2+\left|u^{(n)}\right|^2\right)dx\Big|_{t=\tau}+\left(a(\tau)\beta(\tau)-a(\widehat{t})\beta(\widehat{t})\right)\left|u^{(n)}(\tau,l)\right|^2 .$$

Если это равенство оценить как и выше и в последнем слагаемом в силу (2.0) применить оценки

$$\left|a(\tau)\beta(\tau)-a(\widehat{t})\beta(\widehat{t})\right|\left|u^{(n)}(\tau,l)\right|^2\le\left(\sup_{[\widehat{t},t_{\widehat{i}+1}]}|a'(t)\beta(t)|+\sup_{[\widehat{t},t_{\widehat{i}+1}]}|a(t)\beta'(t)|\right)(\tau-\widehat{t})\left|u^{(n)}(\tau,l)\right|^2\le$$

$$\left(M_1\widetilde{M}+M\widetilde{M}_1\right)h_il\left\|u_x^{(n)}(\tau,x)\right\|_0^2\le\widehat{c}_2(T-\widehat{t})\left(M_1\widetilde{M}+M\widetilde{M}_1\right)l/a_0(n+1-\widehat{i}),$$

то при $c=c_0$ и всех достаточно больших n будем иметь

$$\left(1-\delta_n^{(2)}\right)\sup_{[\widehat{t},t_{\widehat{i}+1}]}\mathcal{N}_2(t;u^{(n)})\le\int_{\widehat{t}}^{t_{\widehat{i}+1}}e^{c_0(t_{\widehat{i}+1}-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0(t_{\widehat{i}+1}-\widehat{t})}\mathcal{N}_2(\widehat{t}+0;u^{(n)}),\quad\delta_n^{(2)}<1,\tag{2.14}$$

где $\mathcal{N}_2(s;w)\equiv\left(\|w_t\|_0^2+a(t)\|w_x\|_0^2+a(t)\|w\|_0^2+a(t)\beta(t)|w(t,l)|^2\right)|_{t=s}$, $\delta_n^{(2)}=\widehat{c}_2(T-\widehat{t})[M_1+(M_1\widetilde{M}+M\widetilde{M}_1)l]/a_0(n+1-\widehat{i})$. Для $I_{\widehat{i}+1}$ аналогично выводится неравенство

$$\left(1-\delta_n^{(2)}\right)\sup_{[t_{\widehat{i}+1},t_{\widehat{i}+2}]}\mathcal{N}_2(t;u^{(n)})\le\int_{t_{\widehat{i}+1}}^{t_{\widehat{i}+2}}e^{c_0(t_{\widehat{i}+2}-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0(t_{\widehat{i}+2}-t_{\widehat{i}+1})}\mathcal{N}_2(t_{\widehat{i}+1};u^{(n)}).\tag{2.15}$$

Складывая неравенства (2.14) и (2.15) также как неравенства (2.9) и (2.10), находим

$$\left(1-\delta_n^{(2)}\right)\sup_{[\widehat{t},t_{\widehat{i}+2}]}\mathcal{N}_2(t;u^{(n)})\le\left(1-\delta_n^{(2)}\right)^{-1}\{\int_{\widehat{t}}^{t_{\widehat{i}+2}}e^{c_0(t_{\widehat{i}+2}-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0(t_{\widehat{i}+2}-\widehat{t})}\mathcal{N}_2(\widehat{t}+0;u^{(n)})\}.$$

Суммируя локальные априорные оценки по всем оставшимся $I_i,\ i=\overline{\widehat{i}+2,n}$, аналогично выводим

$$\left(1-\delta_n^{(2)}\right)^{n+1-\widehat{i}}\sup_{[\widehat{t},T]}\mathcal{N}_2(t;u^{(n)})\leqslant\int_{\widehat{t}}^{T}e^{c_0(T-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0(T-\widehat{t})}\mathcal{N}_2(\widehat{t}+0;u^{(n)}).$$

Существует $c_2^*=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\delta_n^{(2)})^{n+1-\widehat{i}}$ и, значит, для $\varepsilon=c_2^*/2>0\ \ \exists N_2$, что $\left(1-\delta_n^{(2)}\right)^{n+1-\widehat{i}}\geqslant c_1^*/2\ \ \forall n\geqslant N_2$ и

$$(1/2)c_2^*\sup_{[\widehat{t},T]}\mathcal{N}_2(t;u^{(n)})\leqslant\int_{\widehat{t}}^{T}e^{c_0(T-t)}\left\|f^{(n)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0(T-\widehat{t})}\mathcal{N}_2(\widehat{t}+0;u^{(n)}).\tag{2.16}$$

Показатель $m(t)$ разрывен в точке $\widehat{t}$ и, следовательно, нельзя суммировать (2.13) и (1.1) также как (2.9) и (2.10). Поэтому прочленно сложим (2.13) и (1.1), предварительно оценив второе слагаемое в (1.1) сначала с помощью оценки

$$\left(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2+\beta(t)|u(t,l)|^2\right)\Big|_{t=\widehat{t}+0}\leqslant c_1\left(\|u_{xx}\|_0^2+\|u\|_0^2\right)|_{t=\widehat{t}-0}\ \forall u\in W_2^2(0,l),\ c_1\geqslant1\ ,\tag{2.17}$$

и затем правой частью неравенства (2.13), и при всех $\widehat{i}\geqslant N_1$ и $n\geqslant N_2$ будем иметь априорную оценку (2.8). Теорема 1 доказана.

Равномерная оценка приближенных решений, которая вытекает из неравенства (2.8) (неравенства (2.23)) позволяет обосновать существование функций, удовлетворяющих тождеству (2.7) (определению 1) соответственно.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1 и коэффициент $\beta(t)$ имеет ограниченную вторую производную $\beta''(t)t$, кроме быть может $t=\widehat{t}$. Для каждых $\{f,\varphi,\psi\}\in L_2(G)\times W^2_{2,\Gamma(0)}(0,l)\times L_2(0,l)$ из соответствующих им приближенных решений $u^{(n)}$ можно извлечь подпоследовательность $\widetilde{u}^{(k)}$, которая при $k\to\infty$ сходится слабо в $W_2^{1,m(t)}(G)$ и сильно в $L_2(G)$ к некоторой функции $\widetilde{u}\in W^{1,m(t)}_{2,\Gamma(t)}(G)$, удовлетворяющей тождеству (2.7).*

Доказательство. По построению правая часть неравенства (2.8) при всех достаточно больших n не превосходит

$$2\left(1+2(c_1/c_1^*)\right)e^{c_0T}\left\{\int_0^T\|f\|_0^2dt+\delta_f^2+a(0)\left(\|\varphi_{xx}\|_0^2+\|\varphi\|_0^2+\delta_\varphi^2\right)+\|\psi\|_0^2+\delta_\psi^2\right\}.$$

Отсюда видно, что $u^{(n)}$ ограничены в $W_2^{1,m(t)}(G)$ равномерно по t_i и n и, следовательно, существует ее подпоследовательность $\widetilde{u}^{(k)}$, слабо сходящаяся к некоторой $\widetilde{u} \in W_2^{1,m(t)}(G)$ в $W_2^{1,m(t)}(G)$ при $k \to \infty$. Согласно теореме Реллиха о компактности ограниченных множеств из $W_2^1(G)$ в $L_2(G)$ последовательность $\widetilde{u}^{(k)}$ сходится к $\widetilde{u}$ сильно в $L_2(G)$ при $k \to \infty$.

Для доказательства того, что эта предельная функция удовлетворяет тождеству (2.7) рассмотрим ортогональные проекторы

$$P(t) : W_2^{m(t)}(0,l) \to W_{2,\Gamma(t)}^{m(t)}(0,l),\ t \in [0,T] \setminus \{\widehat{t}\},$$

где гильбертовы пространства $W_{2,\Gamma(t)}^{m(t)}(0,l)$ — пополнения множеств всех функций из $W_2^{2m(t)}(0,l)$, удовлетворяющих (1.3) или (1.4), по нормам $\|\cdot\|_{m(t)}$, $t \in [0,T] \setminus \{\widehat{t}\}$. Отметим, что $u \in W_{2,\Gamma(t)}^{m(t)}(0,l)$ удовлетворяют (при $t > \widehat{t}$ в ниже указанном смысле) граничным условиям

$$u\,|_{x=0} = 0,\ \ [u_x + \beta(t)u]\,|_{x=l} = 0,\ t \in [0,T]\ \setminus \{\widehat{t}\}. \tag{2.18}$$

Для всех $t > \widehat{t}$, где $\beta(t) \neq 0$, функции $u \in W_{2,\Gamma(t)}^1(0,l)$ имеют следы $u_x\,|_{x=l}$ в обобщенном смысле, как пределы $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)_x\Big|_{x=l} = -\beta(t)\lim\limits_{n\to\infty}u_n\,|_{x=l} = \beta(t)u(l) \in C\,[0,T]$ последовательностей $u_n \in C^1\,[0,l]\,,\ u_n \to u$, в $W_2^1(0,l)$ при $n \to \infty$. Для тех $t > \widehat{t}$, где $\beta(t) = 0$, функции $u \in W_{2,\Gamma(t)}^1(0,l)$ "теряют" условие $u_x\,|_{x=l} = 0$.

Определение 2. Для $u \in W_2^{m(t)}(0,l)$ $\quad P(t)u(x) = g(t,x)$ тогда (и только тогда), когда $g \in ()$ и $\inf\limits_v \|u-v\|_{m(t)} = \|u-g\|_{m(t)}$ по всем $v \in W_{2,\Gamma(t)}^{m(t)}(0,l)$, $t \in [0,T] \setminus \{\widehat{t}\}$.

Разложим $W_2^{m(t)}(0,l)$ в прямую сумму $W_2^{m(t)}(0,l) = \overset{\circ}{W}{}_2^{m(t)}(0,l) \oplus \mathcal{W}_2^{m(t)}(0,l)$. По теореме 3.2 из [5, с. 17] линейное отображение $\gamma = \{\gamma_0, ..., \gamma_{m(t)-1}\}$, $\quad \gamma_j = \partial^j/\partial x^j$, осуществляет изоморфизм гильбертова пространства $\mathcal{W}_2^{m(t)}(0,l)$ на произведение гильбертовых пространств $\prod\limits_{j=0}^{m(t)-1} W_2^{m(t)-j-1/2}(S)$, где S состоит из $x=0$ и $x=l$.

Действие ортопроекторов $P(t)$ описывает

Лемма 1. Если $\beta(t) \in C\,[0,T]$, *то для каждой* $u \in W_2^{m(t)}(0,l)$ *существует единственная* $g \in \mathcal{W}_2^{m(t)}(0,l)$ *с граничными значениями*

$$\gamma_0 g|_{x=0} = 0,\ \gamma_1 g|_{x=l} = -\beta(t)u|_{x=l},\ \gamma_0 g|_{x=l} = u|_{x=l},\ \gamma_1 g|_{x=0} = u_x|_{x=0},\ \ m(t)=2,\ \ t < \widehat{t}, \tag{2.19$_1$}$$

$$\gamma_0 g|_{x=0} = 0;\ \gamma_0 g|_{x=l} = -\beta^{-1}(t)u_x|_{x=l},\ \text{если}\ \beta(t) \neq 0;\quad \gamma_0 g|_{x=l} = u|_{x=l},\ \text{если}\ \beta(t) = 0;\ m(t)=1,\ t > \widehat{t}, \tag{2.19$_2$}$$

из $W_2^{m(t)-j-1/2}(S),\ 0 \leqslant j \leqslant m(t)-1$, $\quad P(t)u(x) = g(t,x)$ в $W_2^{m(t)}(0,l)$, $t \in [0,T] \setminus \{\widehat{t}\}$.

Доказательство. При $m(t) = 2$, $t < \widehat{t}$, обратное отображение $\mathcal{W}^{-1}$ к γ граничным значениям (2.19$_1$) ставит в соответствие единственную $g \in \mathcal{W}_2^{m(t)}(0,l) \cap W_{2,\Gamma(t)}^2(0,l)$. При $\forall t < \widehat{t}$ и $\forall\ v \in W_{2,\Gamma(t)}^2(0,l)$ расстояние $\|u-v\|_2$ эквивалентно расстоянию $\sum_{j=0}^1 |[\gamma_j(u-v)]|_{2-j-1/2}$, где $|[\cdot]|_q$— норма пространства $W_2^q(S)$, минимум которого достигается при $v = g$. Это означает, что $P(t)u = g$ в $W_2^2(0,l)$ для $t < \widehat{t}$. При $m(t) = 1$, $t > \widehat{t}$, доказательство аналогично. Лемма 1 доказана.

Проекторы $P(t)$ можно дифференцировать по t.

Лемма 2. *Если* $\beta(t) \in C\,[0,T]$ *и существует ограниченная первая производная* $\beta'(t)$ по t, *кроме быть может* $t = \widehat{t}$, *то для каждой* $u \in W_2^{m(t)}(0,l)$ *существует единственная* $w(t,x) \in \mathcal{W}_2^{m(t)}(0,l)$ *с граничными значениями*

$$\gamma_0 g'|_{x=0} = 0,\ \gamma_1 g'|_{x=l} = -\beta'(t)u|_{x=l},\ \gamma_1 g'|_{x=0} = \gamma_0 g'|_{x=l} = 0,\ \ m(t)=2,\ \ t < \widehat{t}, \tag{2.20$_1$}$$

$$\gamma_0 g'|_{x=0} = 0;\ \gamma_0 g'|_{x=l} = \frac{\beta'(t)}{\beta^2(t)}u_x|_{x=l},\ \text{если}\ \beta(t) \neq 0;\quad \gamma_0 g'|_{x=l} = 0,\ \text{если}\ \beta(t) = 0; m(t) = 1, t > \widehat{t}, \tag{2.20$_2$}$$

из $W_2^{m(t)-j-1/2}(S),\ 0 \le j \le m(t)-1$, $\qquad P'(t)u(x) = w(t,x) \qquad W_2^{m(t)}(0,l)$, $t \in [0,T] \setminus \{\widehat{t}\}$.

Доказательство. Перейдем к пределам в $\tau^{-1}\left(g(t+\tau) - g(t)\right)$ для граничных данных (2.19$_1$) и (2.19$_2$) в пространствах $W_2^{m(t)-j-1/2}(S),\ 0 \le j \le m(t)-1$, при $\tau \to 0$ и получим граничные данные (2.20$_1$) и (2.20$_2$), которым отображение γ^{-1} ставит в соответствие единственную $w(t,x) \in \mathcal{W}_2^{m(t)}(0,l)$, $t \in [0,T] \setminus \{\widehat{t}\}$. Поскольку изоморфизм γ^{-1} переводит сходящиеся последовательности из $\prod\limits_{j=0}^{m(t)-1} W_2^{m(t)-j-1/2}(S)$ в сходящиеся последовательности из $\mathcal{W}_2^{m(t)}(0,l)$ и наоборот, то $P'(t)u = w$ $\quad$ в $W_2^{m(t)}(0,l)$, $t \in [0,T] \setminus \{\widehat{t}\}$. Лемма 2 доказана.

Существование слабых решений нам позволяет доказать

Лемма 3. *Пусть* $\beta(t) \in C\,[0,T]$ *и существуют ограниченные первые две производные* $\beta'(t)$ и $\beta''(t)$ по t, *кроме быть может* $t=\widehat{t}$. *Тогда для каждой* $v \in W^{1,m(t)}_{2,\Gamma(t),T}(G)$ *существует последовательность* $v^{(k)}=\{v^{(k)}_0,...,v^{(k)}_k\} \in W^{1,m(t)}_2(G)$ вида

$$v^{(k)}_i(t,x)=P(t_i)v(t,x)+\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\left[P(t_{i+1})-P(t_i)\right]v(t,x),\ t\in I_i,\ i=\overline{0,k}, \tag{2.21}$$

такая, что $v^{(k)}\,|_{t=T}=0$ и $v^{(k)}\to v$ *сильно в* $W^{1,m(t)}_2(G)$ при $k\to\infty$.

Доказательство. Сначала пусть $v\in W^{1,m(t)}_{2,(t),T}(G)$ и $m(t)=2,\ t<\widehat{t}$. Ввиду $v(t)=P(t)v(t)$, изоморфизма γ с нормой, равной $c_2>0$, и значений (2.19_1) имеем

$$\int_{I_i}\left\|v^{(k)}-v\right\|_2^2 dt\le 2\int_{I_i}\|[P(t_i)-P(t)]\,v\|_2^2\,dt\ +\ 2\int_{I_i}\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\,\|[P(t_{i+1})-P(t_i)]\,v\|_2^2\,dt\le$$

$$2c_2^2\int_{I_i}|[(\beta(t_i)-\beta(t))\,v]|^2_{1/2}\,dt+2c_2^2\int_{I_i}|[(\beta(t_{i+1})-\beta(t_i))\,v]|^2_{1/2}\,dt\le 4c_2^2\widetilde{M}_1^2\left(h^{(k)}\right)^2\int_{I_i}|[v]|^2_{1/2}\,dt.$$

Суммируя эти неравенства по всем $i=\overline{0,\widehat{i}-1}$, получаем, что при $h^{(k)}\to 0$

$$\left(\int_0^{\widehat{t}}\left\|v^{(k)}-v\right\|_2^2 dt\right)^{1/2}\le 2c_2\widetilde{M}_1 h^{(k)}\left(\int_0^{\widehat{t}}|[v]|^2_{1/2}\,dt\right)^{1/2}\to 0.$$

Ввиду $v_t=P'(t)v+P(t)v_t$, изоморфизма γ и значений (2.20_1) аналогично имеем

$$\int_{I_i}\left\|v^{(k)}_t-v_t\right\|_0^2 dt\le 4c_1^2\{\int_{I_i}\|[P(t_i)-P(t)]\,v_t\|_2^2\,dt\ +\ \int_{I_i}\left\|\frac{[P(t_{i+1})-P(t_i)]\,v}{t_{i+1}-t_i}-P'(t_i)v\right\|_2^2 dt\ +$$

$$\int_{I_i}\left\|\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\,[P(t_{i+1})-P(t_i)]\,v_t\right\|_2^2 dt\ +\ \int_{I_i}\|[P'(t_i)-P'(t)]\,v\|_2^2\,dt\}\le 4c_1^2\{\int_{I_i}|[(\beta(t_i)-\beta(t))\,v_t]|^2_{1/2}\,dt\ +$$

$$\int_{I_i}\left|\left[\left(\frac{\beta(t_{i+1})-\beta(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\beta'(t_i)\right)v\right]\right|^2_{1/2} dt+\int_{I_i}|[(\beta(t_{i+1})-\beta(t_i))\,v_t]|^2_{1/2}\,dt+\int_{I_i}|[(\beta'(t_i)-\beta'(t))\,v]|^2_{1/2}\,dt\}\le$$

$$8c_1^2\widetilde{M}_1^2\left(h^{(k)}\right)^2\int_{I_i}|[v_t]|^2_{1/2}\,dt\ +\ 5c_1^2\widetilde{M}_2^2\left(h^{(k)}\right)^2\int_{I_i}|[v]|^2_{1/2}\,dt,\ \ \widetilde{M}_2=\sup_{[0,T]}|\beta''(t)|.$$

Здесь мы воспользовались разложением Тейлора $[(\beta(t_{i+1})-\beta(t_i))\,/\,(t_{i+1}-t_i)]-\beta'(t_i)=(1/2)\beta''(t_i^*)\quad(t_{i+1}-t_i)$, $t_i^*\in[t_i,t_{i+1}]$. Суммируя последние неравенства по $i=\overline{0,\widehat{i}-1}$, при $h^{(k)}\to 0$ имеем

$$\left(\int_0^{\widehat{t}}\left\|v^{(k)}_t-v_t\right\|_0^2 dt\right)^{1/2}\le\sqrt{8}c_1\widetilde{M}_1 h^{(k)}\left(\int_0^{\widehat{t}}|[v_t]|^2_{1/2}\,dt\right)^{1/2}+\ \sqrt{5}c_1\widetilde{M}_2 h^{(k)}\left(\int_0^{\widehat{t}}|[v]|^2_{1/2}\,dt\right)^{1/2}\to 0.$$

Затем для $v\in W^{1,m(t)}_{2,\Gamma(t),T}(G)$ при $m(t)=1,\ t>\widehat{t}$, доказательство проводится аналогично, используя граничные значения (2.19_2) и (2.20_2) из лемм 1 и 2. Лемма 3 доказана.

Умножим скалярно в $L_2(0,l)$ уравнения (2.1) и (2.2) на функции $v^{(k)}$ вида (2.21), проинтегрируем по частям согласно (2.3) и (2.4) $m(t)$ раз по x, на каждом I_i проинтегрируем по частям один раз по t и результаты просуммируем по $i=\overline{0,k}$ согласно (2.6)

$$-\int_0^T\int_0^l\widetilde{u}^{(k)}_t v^{(k)}_t dxdt+\int_0^T\int_0^l a^{(k)}(t)\frac{\partial^{m(t)}\widetilde{u}^{(k)}}{\partial x^{m(t)}}\frac{\partial^{m(t)}v^{(k)}}{\partial x^{m(t)}}dxdt+\int_0^T a^{(k)}(t)\beta^{(k)}(t)\,(2-m(t))\,\widetilde{u}^{(k)}(t,l)v^{(k)}(t,l)dt=$$

$$\int_0^T\int_0^l f^{(k)}v^{(k)}dxdt\ +\ \int_0^l\psi^{(k)}(x)v^{(k)}(0,x)dx\ +\ \sum\nolimits_{i=1}^k\int_0^l\widetilde{u}^{(k)}_t(t_i)\left[v^{(k)}_i(t_i)-v^{(k)}_{i-1}(t_i)\right]dx\ +$$

$$\sum_{i=0}^k\int_{I_i}\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}a(t_i)\int_0^l\left\{\frac{\partial^{m(t)}\widetilde{u}^{(k)}_i}{\partial x^{m(t)}}\frac{\partial^{m(t)}(P(t_{i+1})v)}{\partial x^{m(t)}}-(-1)^{m(t)}\frac{\partial^{2m(t)}\widetilde{u}^{(k)}_i}{\partial x^{2m(t)}}P(t_{i+1})v\right\}dxdt\ +$$

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{I_i}\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}a(t_i)\beta(t_i)\left(2-m(t)\right)\widetilde{u}_i^{(k)}(t,l)P(t_{i+1})v(t,l)dt,\ k=1,\ 2,..., \tag{2.22}$$

где $a^{(k)}(t)=a(t_i)$ и $\beta^{(k)}(t)=\beta(t_i),\ t\in I_i,\ i=\overline{0,k}$. Подставив (2.21) в первую сумму в (2.22), убеждаемся, что каждое ее слагаемое равно нулю. Убедимся еще в том, что две последние суммы в (2.22) стремятся к нулю при $k\to\infty$. Сначала пусть $m(t)=2$. С помощью (2.3) и (2.19$_1$) интегрируем по частям

$$\int_0^l \widetilde{u}_{ixxx}^{(k)}P(t_{i+1})vdx=\left[\beta(t_{i+1})-\beta(t_i)\right]\widetilde{u}_{ixx}^{(k)}v\Big|_{x=l}\ +\ \int_0^l \widetilde{u}_{ixx}^{(k)}(P(t_{i+1})v)_{xx}dx,\ i<\widehat{i}.$$

С учетом этого замечаем, что последние две суммы в (2.22) при $i<\widehat{i}$ равны

$$-\sum_{i=0}^{\widehat{i}-1}\int_{I_i}\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}a(t_i)\left[\beta(t_{i+1})-\beta(t_i)\right]\widetilde{u}_{ixx}^{(k)}vdt\Big|_{x=l}\le M\widetilde{M}_1h^{(k)}\int_0^{\widehat{t}}\left|\widetilde{u}_{xx}^{(k)}(t,l)v(t,l)\right|dt\le$$

$$M\widetilde{M}_1h^{(k)}\left(\int_0^{\widehat{t}}\left|\widetilde{u}_{xx}^{(k)}(t,l)\right|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{\widehat{t}}|v(t,l)|^2dt\right)^{1/2}\le M\widetilde{M}_1h^{(k)}\left(\int_0^{\widehat{t}}\left|\widetilde{u}_{xx}^{(k)}(t,l)\right|^2dt\right)^{1/2}\left(l\int_0^{\widehat{t}}\|v_x(t,x)\|_0^2\,dt\right)^{1/2}\to 0$$

при $h^{(k)}\to 0$. Затем замечаем, что при $m(t)=1$ в силу (2.4) и (2.19$_2$)последние две суммы в (2.22) при $i\ge\widehat{i}$ равны нулю. На этом основании согласно выше доказанной слабой сходимости $\widetilde{u}^{(k)}\to\widetilde{u}$ и по лемме 3 сильной сходимости $v^{(k)}\to v$ в $W_2^{1,m(t)}(G)$ при $k\to\infty$ в (2.22) переходим к пределу при $k\to\infty$ и видим, что $\widetilde{u}$ удовлетворяет тождеству (2.7). Тот факт, что $\widetilde{u}\in W_{2,\Gamma(t)}^{1,m(t)}(G)$ подтверждает

Лемма 4. *В предположениях теоремы 2 для каждых* $\{f,\varphi,\psi\}\in L_2(G)\times W_{2,\Gamma(0)}^2(0,l)\times L_2(0,l)$ *пределом слабо сходящихся в* $W_2^{1,m(t)}(G)$ *приближений* $\widetilde{u}^{(k)}\in W_{2,\Gamma(t_i)}^{2,2m(t)}(G)$ *является* $\widetilde{u}\in W_{2,\Gamma(t)}^{1,m(t)}(G)$.

Доказательство. Поскольку $\widetilde{u}^{(k)}=P(t_i)\widetilde{u}^{(k)}$ на $I_i,\ i=\overline{0,k}$, то для ее доказательства достаточно при $\forall v\in W_2^{1,m(t)}(G)$ равенства

$$\int_{I_i}(\widetilde{u}-P(t)\widetilde{u},v)_{m(t)}dt=\int_{I_i}\left(\widetilde{u}-\widetilde{u}^{(k)},v\right)_{m(t)}dt+\int_{I_i}\left(\left[P(t_i)-P(t)\right]\widetilde{u}^{(k)},v\right)_{m(t)}dt+\int_{I_i}\left(\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u},P(t)v\right)_{m(t)}dt,$$

где $(\cdot,\cdot)_{m(t)}$— скалярные произведения в $W_2^{m(t)}(0,l)$, просуммировать по всем $i=\overline{0,k}$, оценить модуль результата и при $h^{(k)}\to 0$ получить

$$\left|\int_0^T(\widetilde{u}-P(t)\widetilde{u},v)_{m(t)}dt\right|\le\left|\int_0^T\left(\widetilde{u}-\widetilde{u}^{(k)},v\right)_{m(t)}dt\right|+c_2\widetilde{M}_1h^{(k)}\int_0^T\left\|\widetilde{u}^{(k)}\right\|_{m(t)}\|v\|_{m(t)}dt+\left|\int_0^T\left(\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u},P(t)v\right)_{m(t)}dt\right|\to 0.$$

Лемма 4 доказана и, тем самым, доказательство теоремы 2 завершено.

Замечания. 2. Если в коэффициенте $a(t)$ уравнений (2.1)-(2.2) на каждом I_i провести еще дополнительную дискретизацию m точками $t_i^{(j)},j=\overline{0,m},\ t_i^{(0)}=t_i,\ i=\overline{0,n}$, то при тех же данных $f^{(n)},\ \varphi^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$ последовательными по i и j решениями полученных задач (2.1)-(2.6) являются некоторые $\breve{u}^{(n,m)}\in W_2^{2,2m(t)}(G)$. Для приближений $\breve{u}^{(n,m)}$ выводится априорная оценка, аналогичная оценке (2.8), благодаря которой утверждения теоремы 2 легко распространяются на $\breve{u}^{(n,m)}$.

3. При доказательстве единственности слабых решений понадобятся еще приближения $\widehat{u}^{(n)}$— решения задач (1.1),(1.2),(2.3)-(2.6), для которых аналогично предыдущему выводится априорная оценка

$$(1/2)c_3^*\sup_{[0,T]}\mathcal{N}(t;\widehat{u}^{(n)})\le(1+c_1)e^{c_0T}\left\{\int_0^T\left\|\widehat{f}^{(n)}(t,x)\right\|_0^2dt+a(0)\left\|\widehat{\varphi}_{xx}^{(n)}\widehat{\varphi}(x)\right\|_0^2+a(0)\left\|\widehat{\varphi}^{(n)}(x)\right\|_0^2+\left\|\widehat{\psi}^{(n)}(x)\right\|_0^2\right\}, \tag{2.23}$$

где $c_3^*=\exp\{-\widehat{c}_2(T-\widehat{t})\widetilde{M}_1l\}$ и последовательности (с теми же свойствами) $\{\widehat{f}^{(n)},\widehat{\varphi}^{(n)},\widehat{\psi}^{(n)}\}\to\{f,\varphi,\psi\}$ в $L_2(G)\times W_2^2(0,l)\times L_2(0,l)$ при $n\to\infty$. С помощью (2.23) аналогично теореме 2 доказывается, что из $\widehat{u}^{(n)}$ можно извлечь подпоследовательность $\widehat{u}^{(n_k)}$, которая сходится слабо в $W_2^{1,m(t)}(G)$ и сильно в $L_2(G)$ (и даже равномерно по t в $L_2(0,l)$) к некоторому слабому решению $\widehat{u}\in W_{2,(t)}^{1,m(t)}(G)$ задачи (1.1)-(1.5) при $k\to\infty$. Условие $\widehat{u}(0,x)=\varphi(x)$ выполняется в силу того, что $\widehat{u}^{(n_k)}(0,x)$ сходятся одновременно к $\widehat{u}(0,x)$ и $\varphi(x)$ в $L_2(0,l)$ при $k\to\infty$.

Ладыженская О.А. выводила единственность слабых решений первой начально-краевой задачи для гиперболических уравнений второго порядка из соответствующей априорной оценки слабых решений [2, с. 382]. К сожалению вывод аналогичной оценки для задачи (1.1)-(1.5) проблематичен из-за переменных условий (1.3)-(1.4), так как производная u_t может не удовлетворять условиям (1.3)-(1.4) при всех t. Поэтому сначала мы вынуждены выводить априорную оценку разности любых двух приближений, указанных в замечании 3.

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения теоремы 2. Если для исходных данных* $\{\widetilde{f}^{(n)}, \widetilde{\varphi}^{(n)}, \widetilde{\psi}^{(n)}\}\{\widehat{f}^{(m)}, \widehat{\varphi}^{(m)}, \widehat{\psi}^{(m)}\}$ *в задаче (1.1),(1.2),(2.3)-(2.6) ее решения* $\widetilde{u}^{(n)}$ и $\widehat{u}^{(m)}$*— некоторые подпоследовательности последовательности* $\widehat{u}^{(n)}$ *(из замечания 3), сходящиеся слабо в* $W_2^{1,m(t)}(G)$ *и сильно в* $L_2(G)$ *к функциям* $\widetilde{u}$ и $\widehat{u}$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$ *соответственно, то*

$$(1/2)c_3^* \sup_{[0,T]} \mathcal{N}(t; \widetilde{u}^{(n)} - \widehat{u}^{(m)}) \leq (1+c_1)e^{c_0 T}\{\int_0^T \left\| \widetilde{f}^{(n)} - \widehat{f}^{(m)} \right\|_0^2 dt + a(0)\left\| \widetilde{\varphi}_{xx}^{(n)} - \widehat{\varphi}_{xx}^{(m)} \right\|_0^2 +$$

$$a(0)\left\| \widetilde{\varphi}^{(n)} - \widehat{\varphi}^{(m)} \right\|_0^2 + \left\| \widetilde{\psi}^{(n)} - \widehat{\psi}^{(m)} \right\|_0^2 \} + \mathcal{R}_{n.m}(\widetilde{u}^{(n)}, \widehat{u}^{(m)}), \tag{3.1}$$

где невязка $\mathcal{R}_{n,m}$ *выражается формулой (3.12) и* $\mathcal{R}_{n,m} \to 0$ при $n, m \to \infty$. *Для каждых* $\{f, \varphi, \psi\} \in L_2(G) \times W_{2,\Gamma(0)}^2(0,l) \times L_2(0,l)$ *слабое решение* $\widehat{u} \in W_{2,\Gamma(t)}^{1,m(t)}(G)$ *смешанной задачи (1.1)-(1.5) единственно, вся последовательность* $\widehat{u}^{(n)}$ *сходится к этому решению* $\widehat{u}$ *сильно в* $W_2^{1,m(t)}(G)$ *и последовательность* $u^{(n)}$ *(из теоремы 1) сходится к* $\widehat{u}$ *слабо в* $W_2^{1,m(t)}(G)$ *и сильно в* $L_2(G)$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Не теряя общности рассуждений можно считать, что $n > m$ и второе разбиение $\{t_i\}_1^n$ интервала $]0,T[$ получается из первого разбиения $\{\widehat{t}_k\}_1^m$ интервала $]0,T[$ добавлением на каждом $]\widehat{t}_{k-1}, \widehat{t}_k[$ некоторых различных n_k точек $t_i^{(k)}$, $i = \overline{1, n_k}$, $k = \overline{1, m+1}$. Общие точки этих двух разбиений будем обозначать только символами $\widehat{t}_k$ первого разбиения. Ясно, что $n_1 + ... + n_{m+1} = n - m$. Пусть $\widehat{h}^{(m)} = \max_{0 \leq k \leq m} \left| \widehat{t}_{k+1} - \widehat{t}_k \right|$.

Сначала выведем оценку разностей приближений на интервале $[0, \widehat{t}_1[$. Поскольку на $[0, t_1^{(1)}[$ последовательности $\widetilde{u}^{(n)}$ и $\widehat{u}^{(m)}$ удовлетворяют одним и тем же условиям (2.3), то (см.(2.9))

$$\sup_{\left[0, t_1^{(1)}\right]} \mathcal{N}_1(t; \widetilde{u}^{(n)} - \widehat{u}^{(m)}) \leq \int_0^{t_1^{(1)}} e^{c_0(t_1^{(1)} - t)} \left\| \widetilde{f}^{(n)} - \widehat{f}^{(m)} \right\|_0^2 dt \ + \ e^{c_0 t_1^{(1)}} [\left\| \widetilde{\psi}^{(n)} - \widehat{\psi}^{(m)} \right\|_0^2 +$$

$$a(0)\left\| \widetilde{\varphi}_{xx}^{(n)} - \widehat{\varphi}_{xx}^{(m)} \right\|_0^2 \ + \ a(0)\left\| \widetilde{\varphi}^{(n)} - \widehat{\varphi}^{(m)} \right\|_0^2]. \tag{3.2}$$

На $[t_1^{(1)}, t_2^{(1)}[$ последовательности $\widetilde{u}^{(n)}$ и $\widehat{u}^{(m)}$ удовлетворяют различным условиям (2.3) и поэтому, интегрируя по частям один раз по t и четырежды по x скалярное произведение в $L_2(0,l)$ суммы уравнения $\widetilde{u}_{tt}^{(n)} - \widehat{u}_{tt}^{(m)} + a(t)(\widetilde{u}_{xxxx}^{(n)} - \widehat{u}_{xxxx}^{(m)}) = \widetilde{f}^{(n)} - \widehat{f}^{(m)}$ и $a(t)(\widetilde{u}^{(n)} - \widehat{u}^{(m)})$ на $2(\widetilde{u}_t^{(n)} - \widehat{u}_t^{(m)})$, в частности, имеем

$$2\int_{t_1^{(1)}}^{\tau}\int_0^l e^{c_0(\tau - t)} a(t)\left(\widetilde{u}_{xxxx}^{(n)} - \widehat{u}_{xxxx}^{(m)}\right)\left(\widetilde{u}_t^{(n)} - \widehat{u}_t^{(m)}\right) dxdt = e^{c_0(\tau-t)} a(t) \left\| \widetilde{u}_{xx}^{(n)} - \widehat{u}_{xx}^{(m)} \right\|_0^2 \Big|_{t=t_1^{(1)}}^{t=\tau} -$$

$$\int_{t_1^{(1)}}^{\tau} \left(e^{c_0(\tau-t)} a(t)\right)_t \left\| \widetilde{u}_{xx}^{(n)} - \widehat{u}_{xx}^{(m)} \right\|_0^2 dt + \varPhi_1(\widetilde{u}^{(n)}, \widehat{u}^{(m)}) \quad + \varPhi_2(\widetilde{u}^{(n)}, \widehat{u}^{(m)}), \ t_1^{(1)} < \tau \leq t_2^{(1)},$$

где

$$\varPhi_1(\widetilde{u}^{(n)}, \widehat{u}^{(m)}) = 2e^{c_0(\tau-t)} a(t) \int_0^l \widetilde{u}_{xx}^{(n)} \widehat{u}_{xx}^{(m)} dx \Bigg|_{t=t_1^{(1)}}^{t=\tau} - \ 2\int_{t_1^{(1)}}^{\tau} \left(e^{c_0(\tau-t)} a(t)\right)_t \int_0^l \widetilde{u}_{xx}^{(n)} \widehat{u}_{xx}^{(m)} dxdt -$$

$$\int_{t_1^{(1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)} a(t) \int_0^l \left(\widetilde{u}_t^{(n)} \widehat{u}_{xxxx}^{(m)} + \widehat{u}_t^{(m)} \widetilde{u}_{xxxx}^{(n)}\right) dxdt,$$

$$\varPhi_2(\widetilde{u}^{(n)}, \widehat{u}^{(m)}) = -e^{c_0(\tau-t)} a(t) \int_0^l \left(\widetilde{u}_{xxxx}^{(n)} \widehat{u}^{(m)} + \widehat{u}_{xxxx}^{(m)} \widetilde{u}^{(n)}\right) dx \Bigg|_{t=t_1^{(1)}}^{t=\tau} +$$

$$\int_{t_1^{(1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)} a(t) \int_0^l \left(\widetilde{u}_{txxxx}^{(n)} \widehat{u}^{(m)} + \widehat{u}_{txxxx}^{(m)} \widetilde{u}^{(n)}\right) dxdt \ + \ \int_{t_1^{(1)}}^{\tau} \left(e^{c_0(\tau-t)} a(t)\right)_t \int_0^l \left(\widetilde{u}_{xxxx}^{(n)} \widehat{u}^{(m)} + \widehat{u}_{xxxx}^{(m)} \widetilde{u}^{(n)}\right) dxdt.$$

Далее интегрируем по частям в $\Phi_2(\widetilde{u}^{(n)},\widehat{u}^{(m)})$ только по x и используем условия (2.3)

$$\Phi_2(\widetilde{u}^{(n)},\widehat{u}^{(m)}) = e^{c_0(\tau-t)}a(t)\left[\beta(t_1^{(1)})-\beta(0)\right]\left(\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}^{(n)}\right)\Big|_{t=t_1^{(1)}}^{t=\tau}\,|_{x=l} -$$

$$\int\limits_{t_1^{(1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)}a(t)[\beta(t_1^{(1)})-\beta(0)](\widetilde{u}_{txx}^{(n)}\widehat{u}^{(m)}-\widehat{u}_{txx}^{(m)}\widetilde{u}^{(n)})dt\,|_{x=l}+\int\limits_{t_1^{(1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)}a(t)[\beta(t_1^{(1)})-\beta(0)](\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)})dt\,|_{x=l}$$

$$-\int\limits_{t_1^{(1)}}^{\tau}\left(e^{c_0(\tau-t)}a(t)\right)_t[\beta(t_1^{(1)})-\beta(0)](\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}^{(n)})dt\,|_{x=l} \quad -\Phi_1(\widetilde{u}^{(n)},\widehat{u}^{(m)}).$$

Представим здесь первое слагаемое в виде интеграла и получим, что

$$\Phi_1(\widetilde{u}^{(n)},\widehat{u}^{(m)})+\Phi_2(\widetilde{u}^{(n)},\widehat{u}^{(m)}) = 2\int\limits_{t_1^{(1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)}a(t)[\beta(t_1^{(1)})-\beta(0)](\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)})dt\,|_{x=l}\,.$$

Без проблем интегрируем по частям один раз по t

$$2\int\limits_{t_1^{(1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)}\int\limits_0^l(\widetilde{u}_{tt}^{(n)}-\widehat{u}_{tt}^{(m)})(\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)})dxdt = e^{c_0(\tau-t)}\left\|\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}\right\|_0^2\Bigg|_{t=t_1^{(1)}}^{t=\tau} + c_0\int\limits_{t_1^{(1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)}\left\|\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}\right\|_0^2dt,$$

$$2\int\limits_{t_1^{(1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)}a(t)\int\limits_0^l(\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})(\widetilde{u}t^{(n)}-\widehat{u}t^{(m)})dxdt = e^{c_0(\tau-t)}a(t)\left\|\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)}\right\|_0^2\Bigg|_{t=t_1^{(1)}}^{t=\tau} - \int\limits_{t_1^{(1)}}^{\tau}(e^{c_0(\tau-t)}a(t))_t\left\|\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)}\right\|_0^2dt.$$

В итоге, отбрасывая неположительные слагаемые за счет выбора c_0, для $[t_1^{(1)},t_2^{(1)}[$ находим

$$\sup_{[t_1^{(1)},t_2^{(1)}]}\mathcal{N}_1(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)}) \le \int\limits_{t_1^{(1)}}^{t_2^{(1)}} e^{c_0(t_2^{(1)}-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt + e^{c_0(t_2^{(1)}-t_1^{(1)})}\mathcal{N}_1(t_1^{(1)};\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)}) +$$

$$2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{t_1^{(1)}}^{t_2^{(1)}} e^{c_0(t_2^{(1)}-t)}a(t)|\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)}|dt\,|_{x=l}\,. \tag{3.3}$$

Складывая неравенства (3.2) и (3.3) также, как неравенства (2.9) и (2.10), устанавливаем

$$\sup_{[0,t_2^{(1)}]}\mathcal{N}_1(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)}) \le \int\limits_0^{t_2^{(1)}} e^{c_0(t_2^{(1)}-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt + e^{c_0t_2^{(1)}}[\left\|\widetilde{\psi}^{(n)}-\widehat{\psi}^{(m)}\right\|_0^2 + a(0)\left\|\widetilde{\varphi}_{xx}^{(n)}-\widehat{\varphi}_{xx}^{(m)}\right\|_0^2+$$

$$a(0)\left\|\widetilde{\varphi}^{(n)}-\widehat{\varphi}^{(m)}\right\|_0^2] + 2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{t_1^{(1)}}^{t_2^{(1)}} e^{c_0(t_2^{(1)}-t)}a(t)|\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)}|dt\,|_{x=l}$$

и т. д. аналогично для всех n_1 точек $t_i^{(1)}$ второго разбиения интервала $]0,\widehat{t}_1[$

$$\sup_{[0,\widehat{t}_1]}\mathcal{N}_1(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)}) \le \int\limits_0^{\widehat{t}_1} e^{c_0(\widehat{t}_1-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt + e^{c_0\widehat{t}_1}[\left\|\widetilde{\psi}^{(n)}-\widehat{\psi}^{(m)}\right\|_0^2 + a(0)\left\|\widetilde{\varphi}_{xx}^{(n)}-\widehat{\varphi}_{xx}^{(m)}\right\|_0^2+$$

$$a(0)\left\|\widetilde{\varphi}^{(n)}-\widehat{\varphi}^{(m)}\right\|_0^2] + 2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_0^{\widehat{t}_1} e^{c_0(\widehat{t}_1-t)}a(t)|\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)}|dt\,|_{x=l}\,. \tag{3.4}$$

Потом точно также для интервала $]\widehat{t}_1,\widehat{t}_2[$ с n_2 точками $t_i^{(2)}$ второго разбиения

$$\sup_{[\widehat{t}_1,\widehat{t}_2]}\mathcal{N}_1(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le\int\limits_{\widehat{t}_1}^{\widehat{t}_2}e^{c_0(\widehat{t}_2-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0(\widehat{t}_2-\widehat{t}_1)}\mathcal{N}_1(\widehat{t}_1;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})+$$

$$2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{\widehat{t}_1}^{\widehat{t}_2}e^{c_0(\widehat{t}_2-t)}a(t)|\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)}|dt\,|_{x=l}\ . \tag{3.5}$$

Складывая неравенства (3.4) и (3.5) также как неравенства (2.9) и (2.10), имеем

$$\sup_{[0,\widehat{t}_2]}\mathcal{N}_1(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le\int\limits_0^{\widehat{t}_2}e^{c_0(\widehat{t}_2-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0\widehat{t}_2}[\left\|\widetilde{\psi}^{(n)}-\widehat{\psi}^{(m)}\right\|_0^2\ +\ a(0)\left\|\widetilde{\varphi}_{xx}^{(n)}-\widehat{\varphi}_{xx}^{(m)}\right\|_0^2+$$

$$a(0)\left\|\widetilde{\varphi}^{(n)}-\widehat{\varphi}^{(m)}\right\|_0^2]\ +\ \ 2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_0^{\widehat{t}_2}e^{c_0(\widehat{t}_2-t)}a(t)|\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)}|dt\,|_{x=l}$$

и т. д. аналогично для всех оставшихся точек $\widehat{t}_k$ первого разбиения

$$\sup_{[0,\widehat{t}]}\mathcal{N}_1(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le\int\limits_0^{\widehat{t}}e^{c_0(\widehat{t}-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0\widehat{t}}[\left\|\widetilde{\psi}^{(n)}-\widehat{\psi}^{(m)}\right\|_0^2\ +\ a(0)\left\|\widetilde{\varphi}_{xx}^{(n)}-\widehat{\varphi}_{xx}^{(m)}\right\|_0^2+$$

$$a(0)\left\|\widetilde{\varphi}^{(n)}-\widehat{\varphi}^{(m)}\right\|_0^2]\ +\ \ 2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_0^{\widehat{t}}e^{c_0(\widehat{t}-t)}a(t)|\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)}|dt\,|_{x=l}\ . \tag{3.6}$$

Приступим к выводу априорной оценки для разности приближений на отрезке $[\widehat{t},T]$. Поскольку на $[\widehat{t},t_1^{(\widehat{i}+1)}[,\ \widehat{t}=t_{\widehat{i}}$, последовательности $\widetilde{u}^{(n)}$ и $\widehat{u}^{(m)}$ удовлетворяют одним и тем же условиям (2.4), то согласно (2.14)

$$(1-\delta_n^{(3)})\sup_{[\widehat{t},t_1^{(\widehat{i}+1)}]}\mathcal{N}_2(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le\int\limits_{\widehat{t}}^{t_1^{(\widehat{i}+1)}}e^{c_0(t_1^{(\widehat{i}+1)}-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ +\ e^{c_0(t_1^{(\widehat{i}+1)}-\widehat{t})}\mathcal{N}_2(\widehat{t}+0;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)}), \tag{3.7}$$

где $\delta_n^{(3)}=\widehat{c}_2(T-\widehat{t})\widetilde{M}_1l/(n+1-\widehat{i})$. На интервале $[t_1^{(\widehat{i}+1)},t_2^{(\widehat{i}+1)}[$ последовательности $\widetilde{u}^{(n)}$ и $\widehat{u}^{(m)}$ удовлетворяют различным условиям (2.4) и поэтому интегрируем по частям один раз по t и дважды по x результат скалярного произведения в $L_2(0,l)$ суммы уравнения $\widetilde{u}_{tt}^{(n)}-\widehat{u}_{tt}^{(m)}-a(t)(\widetilde{u}_{xx}^{(n)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)})=\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}$ и $a(t)(\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})$ на $2(\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)})$. В частности, получаем

$$-2\int\limits_{t_1^{(\widehat{i}+1)}}^{\tau}\int\limits_0^l e^{c_0(\tau-t)}a(t)\left(\widetilde{u}_{xx}^{(n)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\right)\left(\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}\right)dxdt=e^{c_0(\tau-t)}a(t)\left\|\widetilde{u}_x^{(n)}-\widehat{u}_x^{(m)}\right\|_0^2\Big|_{t=t_1^{(\widehat{i}+1)}}^{t=\tau}-$$

$$\int\limits_{t_1^{(\widehat{i}+1)}}^{\tau}\left(e^{c_0(\tau-t)}a(t)\right)_t\left\|\widetilde{u}_x^{(n)}-\widehat{u}_x^{(m)}\right\|_0^2dt-\ \ 2\int\limits_{t_1^{(\widehat{i}+1)}}^{\tau}e^{c_0(\tau-t)}a(t)(\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)})(\widetilde{u}_x^{(n)}-\widehat{u}_x^{(m)})dt\,|_{x=l}\,,\quad t_1^{(\widehat{i}+1)}<\tau\le t_2^{(\widehat{i}+1)}.$$

Далее пользуемся условиями (2.4), интегрируем по частям один раз по t и находим равенство

$$-2\int\limits_{t_1^{(\widehat{i}+1)}}^{\tau}e^{c_0(\tau-t)}a(t)(\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)})(\widetilde{u}_x^{(n)}-\widehat{u}_x^{(m)})dt\,\Big|_{x=l}=e^{c_0(\tau-t)}a(t)\beta(t_1^{(\widehat{i}+1)})\,|\widetilde{u}^{(n)}(t,l)-\widehat{u}^{(m)}(t,l)|^2\Big|_{t=t_1^{(\widehat{i}+1)}}^{t=\tau}-$$

$$-\int\limits_{t_1^{(\hat{i}+1)}}^{\tau} (e^{c_0(\tau-t)}a(t))_t\beta(t_1^{(\hat{i}+1)})|\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)}|^2dt\,|_{x=l} \ + \ e^{c_0(\tau-t)}a(t)[\beta(t_1^{(\hat{i}+1)})-\beta(\hat{t})]\widehat{u}^{(m)}(\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\Big|_{t=t_1^{(\hat{i}+1)}}^{t=\tau}\,|_{x=l}-$$

$$\int\limits_{t_1^{(\hat{i}+1)}}^{\tau} (e^{c_0(\tau-t)}a(t))_t[\beta(t_1^{(\hat{i}+1)})-\beta(\hat{t})]\widehat{u}^{(m)}(t,l)(\widetilde{u}^{(n)}(t,l)-\widehat{u}^{(m)}(t,l))dt \ +$$

$$\int\limits_{t_1^{(\hat{i}+1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)}a(t)[\beta(t_1^{(\hat{i}+1)})\widetilde{u}_t^{(n)}\widehat{u}^{(m)}-\beta(t_1^{(\hat{i}+1)})\widetilde{u}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}+\beta(\hat{t})\widehat{u}_t^{(m)}\widetilde{u}^{(n)}-\beta(\hat{t})\widehat{u}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)}]dt\,|_{x=l}\,.$$

Представим третье слагаемое правой части последнего равенства в виде интеграла и убедимся в том, что сумма последних трех слагаемых этого равенства равна

$$2\int\limits_{t_1^{(\hat{i}+1)}}^{\tau} e^{c_0(\tau-t)}a(t)[\beta(t_1^{(\hat{i}+1)})-\beta(\hat{t})]\widehat{u}^{(m)}(t,l)(\widetilde{u}_t^{(n)}(t,l)-\widehat{u}_t^{(m)}(t,l))dt\ .$$

Отбрасываем неположительные слагаемые за счет выбора c_0 и на основании последних преобразований приходим к (см. (2.15))

$$(1-\delta_n^{(3)})\sup_{[t_1^{(\hat{i}+1)},t_2^{(\hat{i}+1)}]}\mathcal{N}_2(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le\int\limits_{t_1^{(\hat{i}+1)}}^{t_2^{(\hat{i}+1)}} e^{c_0(t_2^{(\hat{i}+1)}-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt+e^{c_0(t_2^{(\hat{i}+1)}-t_1^{(\hat{i}+1)})}\mathcal{N}_2(t_1^{(\widetilde{i}+1)};\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})+$$

$$2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{t_1^{(\hat{i}+1)}}^{t_2^{(\hat{i}+1)}} e^{c_0(t_2^{(\hat{i}+1)}-t)}a(t)|\widehat{u}^{(m)}||\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}|dt\,|_{x=l}\ . \qquad (3.8)$$

Складывая неравенства (3.7) и (3.8) также как неравенства (2.14) и (2.15), получаем

$$(1-\delta_n^{(3)})\sup_{[\hat{t},t_2^{(\hat{i}+1)}]}\mathcal{N}_2(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le(1-\delta_n^{(3)})^{-1}\{\int\limits_{\hat{t}}^{t_2^{(\hat{i}+1)}} e^{c_0(t_2^{(\hat{i}+1)}-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ +$$

$$e^{c_0(t_2^{(\hat{i}+1)}-\hat{t})}\mathcal{N}_2(\hat{t}+0;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\ +2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{\hat{t}}^{t_2^{(\hat{i}+1)}} e^{c_0(t_2^{(\hat{i}+1)}-t)}a(t)|\widehat{u}^{(m)}||\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}|dt\,|_{x=l}\}$$

и т. д. аналогично для всех $n_{\hat{i}+1}$ точек $t_i^{(\hat{i}+1)}$ второго разбиения интервала $]\hat{t},\hat{t}_{\hat{i}+1}[$

$$(1-\delta_n^{(3)})\sup_{[\hat{t},\hat{t}_{\hat{i}+1}]}\mathcal{N}_2(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le(1-\delta_n^{(3)})^{-n_{\hat{i}+1}}\{\int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}_{\hat{i}+1}} e^{c_0(\hat{t}_{\hat{i}+1}-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ \ +$$

$$e^{c_0(\hat{t}_{\hat{i}+1}-\hat{t})}\mathcal{N}_2(\hat{t}+0;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\ +\ \ 2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}_{\hat{i}+1}} e^{c_0(\hat{t}_{\hat{i}+1}-t)}a(t)|\widehat{u}^{(m)}||\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}|dt\,|_{x=l}\}. \qquad (3.9)$$

Затем точно также для $]\hat{t}_{\hat{i}+1},\hat{t}_{\hat{i}+2}[$ с $n_{\hat{i}+2}$ точками $t_i^{(\hat{i}+2)}$ второго разбиения выводим

$$(1-\delta_n^{(3)})\sup_{[\hat{t}_{\hat{i}+1},\hat{t}_{\hat{i}+2}]}\mathcal{N}_2(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le(1-\delta_n^{(3)})^{-n_{\hat{i}+2}}\{\int\limits_{\hat{t}_{\hat{i}+1}}^{\hat{t}_{\hat{i}+2}} e^{c_0(\hat{t}_{\hat{i}+2}-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ +$$

$$e^{c_0(\widehat{t}_{\widehat{i}+2}-\widehat{t}_{\widehat{i}+1})}\mathcal{N}_2(\widehat{t}_{\widehat{i}+1};\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})+\ 2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{\widehat{t}_{\widehat{i}+1}}^{\widehat{t}_{\widehat{i}+2}} e^{c_0(\widehat{t}_{\widehat{i}+2}-t)}a(t)|\widehat{u}^{(m)}||\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}|dt\,|_{x=l}\,\}. \qquad (3.10)$$

Складывая неравенства (3.9) и (3.10) также как неравенства (2.14) и (2.15), имеем

$$(1-\delta_n^{(3)})\sup_{[\widehat{t},\widehat{t}_{\widehat{i}+2}]}\mathcal{N}_2(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le(1-\delta_n^{(3)})^{-n_{\widehat{i}+1}-n_{\widehat{i}+2}-1}\{\int\limits_{\widehat{t}}^{\widehat{t}_{\widehat{i}+2}} e^{c_0(\widehat{t}_{\widehat{i}+2}-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ +$$

$$e^{c_0(\widehat{t}_{\widehat{i}+2}-\widehat{t})}\mathcal{N}_2(\widehat{t}+0;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\ +\ 2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{\widehat{t}}^{\widehat{t}_{\widehat{i}+2}} e^{c_0(\widehat{t}_{\widehat{i}+2}-t)}a(t)|\widehat{u}^{(m)}||\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}|dt\,|_{x=l}\,\}$$

и т. д. аналогично для всех оставшихся точек $\widehat{t}_k$ первого разбиения

$$(1-\delta_n^{(3)})\sup_{[\widehat{t},T]}\mathcal{N}_2(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le(1-\delta_n^{(3)})^{-n_{\widehat{i}+1}-\cdots-n_{m+1}-m+\widehat{i}}\{\int\limits_{\widehat{t}}^{T} e^{c_0(T-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ +$$

$$e^{c_0(T-\widehat{t})}\mathcal{N}_2(\widehat{t}+0;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\ +\ 2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{\widehat{t}}^{T} e^{c_0(T-t)}a(t)|\widehat{u}^{(m)}||\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}|dt\,|_{x=l}\,\}$$

или

$$\frac{1}{2}c_3^*\sup_{[\widehat{t},T]}\mathcal{N}_2(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le(1-\delta_n^{(3)})^{n_{\widehat{i}+1}+\cdots+n_{m+1}+m-\widehat{i}+1}\sup_{[\widehat{t},T]}\mathcal{N}_2(t;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\le\int\limits_{\widehat{t}}^{T} e^{c_0(T-t)}\left\|\widetilde{f}^{(n)}-\widehat{f}^{(m)}\right\|_0^2dt\ +$$

$$e^{c_0(T-\widehat{t})}\mathcal{N}_2(\widehat{t}+0;\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)})\ +\ 2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{\widehat{t}}^{T} e^{c_0(T-t)}a(t)|\widehat{u}^{(m)}||\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}|dt\,|_{x=l}\,, \qquad (3.11)$$

так как $n_{\widehat{i}+1}+\cdots+n_{m+1}+m\le n$. Складывая неравенства (3.6) и (3.11) аналогично неравенствам (2.13) и (2.16) с помощью оценки (2.17) приходим к неравенству (3.1) с невязкой

$$\mathcal{R}_{n,m}(\widetilde{u}^{(n)},\widehat{u}^{(m)})=(1+c_1)2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_0^{\widehat{t}} e^{c_0(\widehat{t}-t)}a(t)|\widetilde{u}_{xx}^{(n)}\widehat{u}_t^{(m)}-\widehat{u}_{xx}^{(m)}\widetilde{u}_t^{(n)}|dt\,|_{x=l}\ +$$

$$2\widetilde{M}_1\widehat{h}^{(m)}\int\limits_{\widehat{t}}^{T} e^{c_0(T-t)}a(t)|\widehat{u}^{(m)}||\widetilde{u}_t^{(n)}-\widehat{u}_t^{(m)}|dt\,|_{x=l}\,, \qquad (3.12)$$

которая стремится к нулю при $\widehat{h}^{(m)}\to 0$, так как $u_{xx}|_{x=l}$ и $u_t|_{x=l}$ равномерно ограничены по t и $|u(t,l)|^2\le l\,\|u_x(t,x)\|_0^2\ \ \forall t\ge\widehat{t}$.

Оценив левую часть неравенства (3.1) снизу через $(1/2)c_3^*T^{-1}\int_0^T||\widetilde{u}^{(n)}-\widehat{u}^{(m)}||_0^2dt$, в полученном неравенстве устремим $m,n\to\infty$ и в силу сильной сходимости $\widetilde{u}^{(n)}$ к $\widetilde{u}$ и $\widehat{u}^{(m)}$ к $\widehat{u}$ в $L_2(G)$ при $m,n\to\infty$ увидим, что $\int_0^T||\widetilde{u}-\widehat{u}||_0^2dt\le 0$, т. е. $\widetilde{u}=\widehat{u}$. А поскольку подпоследовательности $\widetilde{u}^{(n)}$и $\widehat{u}^{(m)}$ произвольны и из любой равномерно ограниченной последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность, то вся $\widehat{u}^{(n)}$ слабо сходится в $W_2^{1,m(t)}(G)$ к единственному слабому решению $\widehat{u}=\widetilde{u}\in W_{2,\Gamma(t)}^{1,m(t)}(G)$ задачи (1.1)-(1.5) при $n\to\infty$. Кроме того, из неравенства (3.1) следует, что $^{(n)}$ — последовательность Коши в $W_2^{1,m(t)}(G)$ и, значит, $\widehat{u}^{(n)}$ сильно сходится к $\widehat{u}$ в $W_2^{1,m(t)}(G)$ при $n\to\infty$.

Теперь докажем, что $u^{(n)}$ из теоремы 1 сходится слабо в $W_2^{1,m(t)}(G)$ и сильно в $L_2(G)$ к $u=\widehat{u}$ при $n\to\infty$. Для этого, вычитая уравнения в соответствующих задачах из замечаний 2 и 3 для одних и тех же данных $f^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$, имеем уравнения

$$\widehat{u}^{(n)}_{tt}-\breve{u}^{(n,m)}_{tt}+(-1)^{m(t)}a(t)\partial^{2m(t)}(\widehat{u}^{(n)}-\breve{u}^{(n,m)})/\partial x^{2m(t)}=(-1)^{m(t)}(a(t_i^{(j)})-a(t))\partial^{2m(t)}\breve{u}^{(n,m)}/\partial x^{2m(t)},$$

где $j=\overline{0,m},\ i=\overline{0,n}$, с соответствующими однородными граничными и начальными условиями, для которых согласно (2.23) справедлива оценка

$$\frac{1}{2}c_3^*\sup_{[0,T]}\mathcal{N}(t;\widehat{u}^{(n)}-\breve{u}^{(n,m)})\le(1+c_1)e^{c_0T}M_1h^{(m)}\int_0^T\left\|\partial^{2m(t)}\breve{u}^{(n,m)}/\partial x^{2m(t)}\right\|_0^2dt. \tag{3.13}$$

Отсюда видим, что при каждом n приближения $\breve{u}^{(n,m)}\to\widehat{u}^{(n)}$ сильно в $W_2^{1,m(t)}(G)$ при $m\to\infty$, так как умножая скалярно в $L_2(0,l)$ сумму уравнения $\breve{u}^{(n,m)}_{tt}+(-1)^{m(t)}a(t_i^{(j)})\partial^{2m(t)}\breve{u}^{(n,m)}/\partial x^{2m(t)}=f^{(n)}$ и $a(t_i^{(j)})\breve{u}^{(n,m)}$на $2\partial^{2m(t)}\breve{u}^{(n,m)}_t/\partial x^{2m(t)}$ и интегрируя должным образом по частям приходим по аналогии с (2.8) к неравенству, из которого следует равномерная по m ограниченность интеграла в (3.13). Поскольку ввиду замечания 2 и уже доказанной единственности слабых решений все подпоследовательности последовательности $\breve{u}^{(n,m)}$ сходятся слабо в $W_2^{1,m(t)}(G)$ и сильно в $L_2(G)$ к $\widehat{u}$, то, в частности, это же имеет место для ее подпоследовательности $\breve{u}^{(n,0)}=u^{(n)}$ при $n\to\infty$. Теорема 3 доказана.

4. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Приближенные решения $u^{(n)}$ задачи (1.1)-(1.5) ищем методом разделения переменных, хотя в принципе можно использовать другие точные методы решения и их комбинации. На каждом $[t_i,t_{i+1}[,\ i<\widehat{i}$, этот метод Фурье $u_i(t,x)=T_i(t)X_i(x)\neq0$ приводит к задачам Штурма-Лиувилля

$$X^{(4)}(x)=\lambda X(x),\ 0<x<l;\quad X(0)=X''(0)=0,\ X'(l)+\beta(t_i)X(l)=X^{(3)}(l)+\beta(t_i)X''(l)=0. \tag{4.1}$$

Поскольку операторы $A_1^{(n)}(t_i)=\partial^4/\partial x^4$ с граничными условиями из (4.1) являются положительными самосопряженными в $L_2(0,l)$, то все собственные значения λ задач (4.1) неотрицательны. Легко проверяется, что $\lambda=0$ не является собственным значением. Общее решение уравнения из (4.1) для $\lambda>0$ имеет вид

$$X(x)=C_1ch\sqrt[4]{\lambda}x\ +\ C_2sh\sqrt[4]{\lambda}x\ +\ C_3\cos\sqrt[4]{\lambda}x\ +\ C_4\sin\sqrt[4]{\lambda}x. \tag{4.2}$$

Из первых двух граничных условий в (4.1) следует, что $C_1=C_3=0$. Два другие условия в (4.1) приводят к системе

$$\left.\begin{array}{l}C_2(\sqrt[4]{\lambda}ch\sqrt[4]{\lambda}l+\beta(t_i)sh\sqrt[4]{\lambda}l)+C_4(\sqrt[4]{\lambda}\cos\sqrt[4]{\lambda}l+\beta(t_i)\sin\sqrt[4]{\lambda}l)=0,\\ C_2(\sqrt[4]{\lambda}ch\sqrt[4]{\lambda}l+\beta(t_i)sh\sqrt[4]{\lambda}l)-C_4(\sqrt[4]{\lambda}\cos\sqrt[4]{\lambda}l+\beta(t_i)\sin\sqrt[4]{\lambda}l)=0,\end{array}\right\} \tag{4.3}$$

которая имеет нетривиальные решения относительно C_2 и C_4, если только ее определитель равен нулю, т.е. к уравнениям $\sqrt[4]{\lambda}ch\sqrt[4]{\lambda}l+\beta(t_i)sh\sqrt[4]{\lambda}l=0$ или $\sqrt[4]{\lambda}\cos\sqrt[4]{\lambda}l+\beta(t_i)\sin\sqrt[4]{\lambda}l=0$. Первое уравнение не имеет решений, так как $chz>0,\ shz>0$ для $\forall z>0$. Второе уравнение имеет счетное множество решений. Пусть $z_{i,k}^{(n)}$— все строго положительные, упорядоченные по возрастанию корни уравнения $tgz=-z/l\beta(t_i),\ z=\sqrt[4]{\lambda}l,\ i<\widehat{i}$. Из системы (4.3) заключаем, что $C_4\neq0$ и $C_2=0$. Таким образом, согласно (4.2) собственными функциями на $[t_i,t_{i+1}[$ являются

$$X_{i,k}^{(n)}(x)=\sin\sqrt[4]{\lambda_{i,k}^{(n)}}x=\sin(z_{i,k}^{(n)}x/l),\ \lambda_{i,k}^{(n)}=(z_{i,k}^{(n)}/l)^4,\ k=1,\ 2,...,\ i=\overline{0,\widehat{i}-1}. \tag{4.4}$$

Легко доказывается, что эти собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, попарно ортогональны в $L_2(0,l)$. Их полнота в пространствах $L_2(0,l)$ и $W^4_{2,\Gamma(t_i)}(0,l),\ i=\overline{0,\widehat{i}-1}$, установлена в [4]. Для коэффициентов рядов Фурье имеем рекуррентные задачи Коши:

$$T''(t)+\lambda_{i,k}^{(n)}a(t_i)T(t)=f_{i,k}^{(n)}(t),\ t\in[t_i,t_{i+1}[;\quad T(t_i)=\varphi_{i,k}^{(n)},\ T'(t_i)=\psi_{i,k}^{(n)},\ i<\widehat{i}, \tag{4.5}$$

где $f_{i,k}^{(n)}$, $\varphi_{i,k}^{(n)}$ и $\psi_{i,k}^{(n)}$ — коэффициенты Фурье рекуррентных разложений соответственно $f_i^{(n)}(t,x)$, $\varphi^{(n)}(x)$ и $\psi^{(n)}(x)$ по собственным функциям $X_{i,k}^{(n)}(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}f_{i,k}^{(n)}(t)=\frac{1}{\left\|X_{i,k}^{(n)}\right\|^2}\int\limits_0^l f_i^{(n)}(t,x)\sin\frac{z_{i,k}^{(n)}x}{l}dx;\ \varphi_{i,k}^{(n)}=\frac{1}{\left\|X_{i,k}^{(n)}\right\|^2}\int\limits_0^l u_{i-1}^{(n)}(t_i-0,x)\sin\frac{z_{i,k}^{(n)}x}{l}dx,\ u_{-1}^{(n)}(0,x)\equiv\varphi^{(n)}(x);\\ \psi_{i,k}^{(n)}=\frac{1}{\left\|X_{i,k}^{(n)}\right\|^2}\int\limits_0^l u_{i-1,t}^{(n)}(t_i-0,x)\sin\frac{z_{i,k}^{(n)}x}{l}dx,\ u_{-1,t}^{(n)}(0,x)\equiv\psi^{(n)}(x);\ \ \left\|X_{i,k}^{(n)}\right\|^2=\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\frac{\sin2z_{i,k}^{(n)}}{2z_{i,k}^{(n)}}.\end{array}\right\} \tag{4.6}$$

Хорошо известны рекуррентные формулы решений задач Коши (4.5)

$$T_{i,k}^{(n)}(t) = \varphi_{i,k}^{(n)} \cos \sqrt{\lambda_{i,k}^{(n)} a(t_i)}t + \frac{\psi_{i,k}^{(n)}}{\sqrt{\lambda_{i,k}^{(n)} a(t_i)}} \sin \sqrt{\lambda_{i,k}^{(n)} a(t_i)}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{i,k}^{(n)} a(t_i)}} \int_0^t f_{i,k}^{(n)}(\tau) \sin \sqrt{\lambda_{i,k}^{(n)} a(t_i)}(t-\tau)d\tau. \quad (4.7)$$

Таким образом, формальными решениями задач (2.1),(2.3),(2.5),(2.6) являются ряды Фурье $u_i^{(n)}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{i,k}^{(n)}(t) X_{i,k}^{(n)}(x)$, $i = \overline{0, \widehat{i}-1}$, где $X_{i,k}^{(n)}$ и $T_{i,k}^{(n)}$ выражаются формулами (4.4) и (4.7). По теореме 2 из [4] имеющаяся гладкость $f_i^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$ обеспечивает равномерную по $t \in [0, \widehat{t}]$ сходимость этих радов в $W_2^4(0,l)$ и $u_i^{(n)}$— решения задач (2.1),(2.3),(2.5),(2.6) в $W_2^{2,4}(]0, \widehat{t}[\times]0,l[)$.

На каждом $]t_i, t_{i+1}[$, $i \geq \widehat{i}$, метод Фурье приводит к задачам Штурма-Лиувилля

$$-X''(x) = \lambda X(x), \ 0 < x < l; \quad X(0) = 0, \ X'(l) + \beta(t_i) X(l) = 0. \quad (4.8)$$

По той же причине, что и в (4.1), ее собственные значения строго положительны. Общее решение уравнения из (4.8) для $\lambda > 0$ имеет вид $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$. Из первого граничного условия в (4.8) следует $C_1 = 0$. Второе условие в (4.8) приводит к прежнему уравнению $tgz = -z/l\beta(t_i)$, $z = \sqrt{\lambda} l$, $\quad i \geq \widehat{i}$. Тогда собственными функциями задач (4.8) являются

$$X_{i,k}^{(n)}(x) = \sin \sqrt{\lambda_{i,k}^{(n)}} x = \sin(z_{i,k}^{(n)} x/l), \ \lambda_{i,k}^{(n)} = (z_{i,k}^{(n)}/l)^2, \ k = 1, \ 2, ..., \ i = \overline{\widehat{i}, n}. \quad (4.9)$$

Аналогично предыдущему они попарно ортогональны в $L_2(0,l)$ и образуют полную систему в $L_2(0,l)$ и $W_{2,\Gamma(t_i)}^2(0,l)$, $i = \overline{\widehat{i}, n}$, [4]. Для коэффициентов $T_{i,k}^{(n)}(t)$ рядов Фурье имеем рекуррентные задачи Коши (4.5) для $i \geq \widehat{i}$, где $f_{i,k}^{(n)}$, $\varphi_{i,k}^{(n)}$ и $\psi_{i,k}^{(n)}$— коэффициенты Фурье рекуррентных разложений соответственно $f_i^{(n)}(t,x)$, $u_{\widehat{t}-1}^{(n)}(\widehat{t}-0,x)$ и $u_{\widehat{t}-1,t}^{(n)}(\widehat{t}-0,x)$ по собственным функциям $X_{i,k}^{(n)}$, которые тоже выражаются формулами (4.6), но при собственных функциях и собственных значениях (4.9). Хорошо известно, что рекуррентные формулы решений соответствующих задач (4.5) имеют вид (4.7), но с собственными значениями из (4.9).

Таким образом, формальными решениями задач (2.2),(2.4)-(2.6) являются ряды Фурье $u_i^{(n)}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{i,k}^{(n)}(t) X_{i,k}^{(n)}(x)$, $i = \overline{\widehat{i}, n}$, где $X_{i,k}^{(n)}$ и $T_{i,k}^{(n)}$ выражаются формулами (4.9) и (4.7). По теореме 2 из [4] эти ряды равномерно по $t \in [\widehat{t}, T]$ сходятся в $W_2^2(0,l)$ и $u_i^{(n)}$— решения задач (2.2),(2.4)-(2.6) в $W_2^{2,2}(]\widehat{t}, T[\times]0,l[)$.

Найденные приближения $u^{(n)}$ в виде рядов Фурье сходятся к точным слабым решениям задачи (1.1)-(1.5) согласно теореме 3. Если удается решить уравнения из (4.5) с переменным $a(t)$, то получаем приближения вида $\widehat{u}^{(n)}$, для которых погрешность приближений указывает

Теорема 4. *Если выполняются предположения теоремы 2, то для каждых* $\{f, \varphi, \psi\} \in L_2(G) \times W_{2,\Gamma(0)}^2(0,l) \times L_2(0,l)$ *приближения* $\widehat{u}^{(n)}$ *сильно сходятся в* $W_2^{1,m(t)}(G)$ *к слабому решению* $\widehat{u} \in W_{2,\Gamma(t)}^{1,m(t)}(G)$ *смешанной задачи (1.1)-(1.5) с погрешностью*

$$\frac{1}{2} c_3^* \sup_{[0,T]} \mathcal{N}(t; \widehat{u} - \widehat{u}^{(n)}) \leq (1 + c_1) e^{c_0 T} \{ \int_0^T \left\| f - \widehat{f}^{(n)} \right\|_0^2 dt + a(0) \left\| \varphi_{xx} - \widehat{\varphi}_{xx}^{(n)} \right\|_0^2 + a(0) \left\| \varphi - \widehat{\varphi}^{(n)} \right\|_0^2 +$$

$$\left\| \psi - \widehat{\psi}^{(n)} \right\|_0^2 + 4 c_0^{-1} M \widetilde{M}_1 V_1 max\{F_1, U_1\} h^{(n)} \}, \quad U_1 = \max_{[\widehat{t}, T]} |u(t,l)|. \quad (4.10)$$

Доказательство. Достаточно в (3.1) поменять местами индексы n и m, $m > n$, провести элементарные оценки и интегрирование и затем в полученных неравенствах устремить $m \to \infty$.

Замечание 4. Из оценки (4.10) видно, что чем точнее аппроксимируются исходные данные f, φ и ψ и мельче разбиения $\{I_i\}$, тем точнее приближения $\widehat{u}^{(n)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломовцев Ф.Е.* Метод внутренней аппроксимации приближенного решения задачи Коши для параболических дифференциально-операторных уравнений первого порядка с переменными областями определения // Докл. НАН Беларуси.2002.Т.46.№6.С.5-10.

2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

3. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машиностроение, 1967.

4. *Бриш Н.И., Валешкевич И.Н.* Метод Фурье для нестационарных уравнений с общими краевыми условиями // Дифференц. ур-ния.1965.Т.1.№3.С.393-399.

5. *Lions J.-L.*equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin: Springer-Verlag,1961.