О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ В МИНИМАЛЬНОМ РЕБЕРНОМ 1-РАСШИРЕНИИ ДИГРАФА

М.Б. Абросимов, О.В. Моденова

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского
Астраханская 83, 410012 Саратов, Россия {mic,oginiel}@rambler.ru

Определение 1. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *реберным k-расширением* (k – натуральное) графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k ребер.

Определение 1. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является реберным k-расширением G;

2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;

3) α^* имеет минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Основные определения даются в соответствии с работами [1,2]. Построение минимального реберного k-расширения графа G можно представить как добавление к графу G минимально возможного числа новых ребер (дуг), так чтобы получившийся граф оказался реберным k-расширением. В данной работе мы будем рассматривать случай $k = 1$.

Обозначим число дополнительных ребер (дуг) в минимальном реберном 1-расширении через $ec(G)$. Число ребер (дуг) в графе G будем обозначать через $E(G)$.

Для неориентированных графов хорошей оценки числа дополнительных ребер в минимальном реберном 1-расширении неизвестно. Очевидно, что полный граф является реберным 1-расширением для любого отличного от него графа с тем же числом вершин. Это позволяет получить тривиальную оценку числа дополнительных ребер минимального реберного 1-расширения, однако она достигается только для графа, получающегося из полного удалением одного ребра. Для произвольных ориентированных графов хорошей оценки числа дополнительных ребер в минимальном реберном 1-расширении также неизвестно. Однако для направленных графов или диграфов такую оценку удалось получить, и она является достижимой.

Теорема. *Для произвольного диграфа G справедлива оценка:*

$$ec(G) \leq E(G). \tag{1}$$

Ранее в работе [2] был получен следующий результат, на котором достигается приведенная оценка.

Теорема. *Единственным с точностью до изоморфизма минимальным реберным 1-расширением n-вершинного турнира является полный n-вершинный граф без петель. При $k > 1$ n-вершинный турнир не имеет минимальных реберных k-расширений.*

Удалось найти еще семейства диграфов, для которых оценка является достижимой.

Теорема. *Гамильтонова ориентация цикла имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение, которое получается добавлением для каждой дуги встречной.*

Заметим, что для произвольных графов оценка (1) не выполняется. Под *соединением* двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, не имеющих общих вершин, понимается граф

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1).$$

В работе [3] доказывается следующий результат относительно минимальных реберных k-расширений неориентированных графов вида $K_m + O_n$.

Теорема. *При $k \leq n/2$ граф $K_{m+2k} + O_{n-2k}$ является единственным с точностью до изоморфизма минимальным реберным k-расширением графа $K_m + O_n$. При $k > n/2$ граф $K_m + O_n$ не имеет минимальных реберных k-расширений.*

Граф $K_m + O_n$ содержит $\frac{m(m-1)}{2} + mn$ ребер. Определим число дополнительных ребер в его минимальном реберном 1-расширении: две вершины из части O_n соединяются ребром между собой и с оставшимися $n-2$ вершинами, получаем:

$$ec(K_m + O_n) = 2n - 3.$$

Можно найти значения m и n, при которых оценка (1) не будет выполняться: $m = 1$ и $n > 3$. При $m = 1$ граф $K_m + O_n$ оказывается звездой $K_{1,n} = K_1 + O_n$ и содержит n ребер. Таким образом, любая звезда $K_{1,n}$ при $n > 1$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение, причем для него справедливо

$$ec(K_{1,n}) = 2E(K_{1,n}) - 3$$

и при $n > 3$

$$ec(K_{1,n}) > E(K_{1,n}).$$

Литература

1. Harary F., Hayes J. P. *Edge fault tolerance in graphs* // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.
2. Абросимов М. Б. *Графовые модели отказоустойчивости.* Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012.
3. Абросимов М. Б. *Минимальные реберные расширения некоторых предполных графов* // Прикладная дискретная математика. 2010. №1. С. 105–117.