О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С НОРМАМИ ГЕЛЬДЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ ПАРАМЕТРОВ

В.А. Емеличев, В.И. Мычков

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
пр-т Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
vemelichev@gmail.com, vadim.mychkov@gmail.com

Рассматривается s-критериальная дискретная инвестиционная задача с критериями крайнего оптимизма

$$Z^s(E): \quad f_k(x, e_k) = \max_{i \in N_m} e_{ik}x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk}x_j \to \max_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

состоящая в поиске множества Парето $P^s(E)$, т.е. множества Парето-оптимальных портфелей.

Здесь $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$; e_{ik} – i-я строка k-го сечения $e_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ трехиндексной матрицы $E = [e_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$; e_{ijk} – оценка экономической эффективности вида $k \in N_s$ инвестиционного проекта с номером $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$; $x_j = 1$, если j-й проект реализуется, и $x_j = 0$ – в противном случае; $X \subset \mathbf{E}^n$ – множество всех допустимых инвестиционных портфелей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Для любых чисел $p, q, r \in [1, \infty]$ в пространствах состояний рынка $\mathbf{R}^m$ и проектов $\mathbf{R}^n$, а так же в критериальном пространстве эффективности $\mathbf{R}^s$ зададим соответственно нормы Гельдера l_p, l_q и l_r, т.е. под нормой матрицы $E \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ будем понимать число

$$\|E\| = \|(\|e_1\|_{qp}, \|e_2\|_{qp}, \dots, \|e_s\|_{qp})\|_r,$$

где

$$\|e_k\|_{qp} = \|(\|e_{1k}\|_q, \|e_{2k}\|_q, \dots, \|e_{mk}\|_q)\|_p, \quad k \in N_s.$$

Радиусом устойчивости $\rho^s(p, q, r)$ задачи $Z^s(E)$, как обычно [1–3], назовем число

$$\rho^s(p, q, r) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall E' \in \Omega(\varepsilon) \ (P^s(E + E') \subseteq P^s(E))\},$$
$$\Omega(\varepsilon) = \{E' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} : \|E'\| < \varepsilon\}.$$

Теорема. *При $X \neq P^s(E)$ и любых $p, q, r \in [1, \infty]$ справедливы следующие оценки радиуса устойчивости $\rho^s(p, q, r)$ задачи $Z^s(E)$:*

$$\varphi \leq \rho^s(p, q, r) \leq m^{1/p} n^{1/q} s^{1/r} \psi,$$

где

$$\varphi = \min_{x \notin P^s(E)} \ \max_{x' \in P(x, E)} \frac{\gamma(x', x)}{\|(\|x'\|_{q'}, \|x\|_{q'})\|_u},$$

$$\psi = \min_{x \notin P^s(E)} \ \max_{x' \in P(x, E)} \frac{\gamma(x', x)}{\|x' - x\|_1},$$

$$\gamma(x', x) = \min\{f_k(x', e_k) - f_k(x, e_k) : \ k \in N_s\},$$

$$P(x, E) = \{x' \in P^s(E) : f(x', E) \geq f(x, E) \ \ \& \ \ f(x', E) \neq f(x, E)\},$$

$$f(x,E) = (f_1(x,e_1), f_2(x,e_2), \dots, f_s(x,e_s)),$$
$$u = \min\{p', q'\},\ 1/p + 1/p' = 1,\ 1/q + 1/q' = 1.$$

Следствие 1 [1]. *При любом $p \in [1,\infty]$ верны неравенства*

$$\min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x',x)}{\|x'\|_{p'} + \|x\|_{p'}} \le \rho^s(\infty,p,p) \le (ns)^{1/p} \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x',x)}{\|x'-x\|_1}.$$

Следствие 2 [2]. *При любом $p \in [1,\infty]$ верны неравенства*

$$\min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x',x)}{\|x'+x\|_1} \le \rho^s(p,\infty,p) \le (ms)^{1/p} \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x',x)}{\|x'-x\|_1}.$$

Следствие 3 [3]. *При любом $p \in [1,\infty]$ верны неравенства*

$$\min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x',x)}{\|x'\|_{p'} + \|x\|_{p'}} \le \rho^s(\infty,p,\infty) \le n^{1/p} \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\gamma(x',x)}{\|x'-x\|_1}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БРФФИ, проект № Ф13К-078.

Литература

1. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А. *О мере устойчивости решений векторного варианта одной инвестиционной задачи* // Дискр. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22. № 2. С. 5–16.

2. Емеличев В. А., Устилко Е. В. *Постоптимальный анализ инвестиционной задачи с критериями крайнего оптимизма* // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3. С. 117–123.

3. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А. *Устойчивость инвестиционной задачи Марковица с критериями крайнего оптимизма* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 44–48.